

# A Linear Integer Approach for the Equitable Coloring Problem

Daniel Severin<sup>1</sup>   Isabel Méndez-Díaz<sup>2</sup>   Graciela Nasini<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> FCEIA, UNR, {nasini, daniel}@fceia.unr.edu.ar

<sup>2</sup> FCEyN, UBA, imendez@dc.uba.ar

<sup>3</sup> CONICET, Argentina

MACI, Universidad Austral, 2009

## Definiciones

### Coloreo clásico

Sea  $G = (V, E)$  (simple). Un  $k$ -coloreo es una partición de  $C_1, C_2, \dots, C_k$  de  $V$  tal que:

- $u, v \in C_j \implies uv \notin E \quad \forall j = 1, \dots, k$

### Coloreo equitativo

Un  $k$ -eqcol es un  $k$ -coloreo tal que:

- $\| |C_i| - |C_j| \| \leq 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, k$

### Número cromático equitativo

$\chi_{eq}(G) = \min\{k : G \text{ admite un } k\text{-eqcol}\}$

- Problema de Coloreo Equitativo: Hallar  $\chi_{eq}(G)$  (es NP-Hard).

## Definiciones

### Coloreo clásico

Sea  $G = (V, E)$  (simple). Un  $k$ -coloreo es una partición de  $C_1, C_2, \dots, C_k$  de  $V$  tal que:

- $u, v \in C_j \implies uv \notin E \quad \forall j = 1, \dots, k$

### Coloreo equitativo

Un  $k$ -eqcol es un  $k$ -coloreo tal que:

- $||C_i| - |C_j|| \leq 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, k$

### Número cromático equitativo

$$\chi_{eq}(G) = \min\{k : G \text{ admite un } k\text{-eqcol}\}$$

- Problema de Coloreo Equitativo: Hallar  $\chi_{eq}(G)$  (es NP-Hard).

## Definiciones

### Coloreo clásico

Sea  $G = (V, E)$  (simple). Un  $k$ -coloreo es una partición de  $C_1, C_2, \dots, C_k$  de  $V$  tal que:

- $u, v \in C_j \implies uv \notin E \quad \forall j = 1, \dots, k$

### Coloreo equitativo

Un  $k$ -eqcol es un  $k$ -coloreo tal que:

- $||C_i| - |C_j|| \leq 1 \quad \forall i, j = 1, \dots, k$

### Número cromático equitativo

$\chi_{eq}(G) = \min\{k : G \text{ admite un } k\text{-eqcol}\}$

- Problema de Coloreo Equitativo: Hallar  $\chi_{eq}(G)$  (es NP-Hard).

# Historia y Estado del Arte del Problema de Coloreo Equitativo (ECP)

- Definición del ECP y primeros resultados [Meyer (1973)]
- Uso del Coloreo Equitativo para servicio de recolección de basura [Tucker 1973]
- Uso del Coloreo Equitativo en aplicaciones para el control de tráfico [Irani S. y Leung V. (1996)]
- Uso del Coloreo Equitativo en problemas de optimización para redes de celular [Touhami (2004)]
- Complejidad del ECP [Kubale M. y Furmanczyk H. (2005)]
- Avance en conjetura. Heurística para hallar un  $k$ -eqcol con  $\forall k = \Delta + 1, \dots, n$  [Kierstead H. y Kostochka A. (2008)]
- Primer modelo de Programación Entera para el ECP [Nasini G., Méndez-Díaz I. y Severin D. (2008)]
- Primer algoritmo Branch & Cut, basado en modelo *Assymmetric Representatives* [Ribeiro C. et al. (2009)]

# Historia y Estado del Arte del Problema de Coloreo Equitativo (ECP)

- Definición del ECP y primeros resultados [Meyer (1973)]
- Uso del Coloreo Equitativo para servicio de recolección de basura [Tucker 1973]
- Uso del Coloreo Equitativo en aplicaciones para el control de tráfico [Irani S. y Leung V. (1996)]
- Uso del Coloreo Equitativo en problemas de optimización para redes de celular [Touhami (2004)]
- Complejidad del ECP [Kubale M. y Furmanczyk H. (2005)]
- Avance en conjetura. Heurística para hallar un  $k$ -eqcol con  $\forall k = \Delta + 1, \dots, n$  [Kierstead H. y Kostochka A. (2008)]
- Primer modelo de Programación Entera para el ECP [Nasini G., Méndez-Díaz I. y Severin D. (2008)]
- Primer algoritmo Branch & Cut, basado en modelo *Assymmetric Representatives* [Ribeiro C. et al. (2009)]

# Historia y Estado del Arte del Problema de Coloreo Equitativo (ECP)

- Definición del ECP y primeros resultados [Meyer (1973)]
- Uso del Coloreo Equitativo para servicio de recolección de basura [Tucker 1973]
- Uso del Coloreo Equitativo en aplicaciones para el control de tráfico [Irani S. y Leung V. (1996)]
- Uso del Coloreo Equitativo en problemas de optimización para redes de celular [Touhami (2004)]
- Complejidad del ECP [Kubale M. y Furmanczyk H. (2005)]
- Avance en conjetura. Heurística para hallar un  $k$ -eqcol con  $\forall k = \Delta + 1, \dots, n$  [Kierstead H. y Kostochka A. (2008)]
- Primer modelo de Programación Entera para el ECP [Nasini G., Méndez-Díaz I. y Severin D. (2008)]
- Primer algoritmo Branch & Cut, basado en modelo *Assymmetric Representatives* [Ribeiro C. et al. (2009)]

# Historia y Estado del Arte del Problema de Coloreo Equitativo (ECP)

- Definición del ECP y primeros resultados [Meyer (1973)]
- Uso del Coloreo Equitativo para servicio de recolección de basura [Tucker 1973]
- Uso del Coloreo Equitativo en aplicaciones para el control de tráfico [Irani S. y Leung V. (1996)]
- Uso del Coloreo Equitativo en problemas de optimización para redes de celular [Touhami (2004)]
- Complejidad del ECP [Kubale M. y Furmanczyk H. (2005)]
- Avance en conjetura. Heurística para hallar un  $k$ -eqcol con  $\forall k = \Delta + 1, \dots, n$  [Kierstead H. y Kostochka A. (2008)]
- Primer modelo de Programación Entera para el ECP [Nasini G., Méndez-Díaz I. y Severin D. (2008)]
- Primer algoritmo Branch & Cut, basado en modelo *Assymmetric Representatives* [Ribeiro C. et al. (2009)]



# Historia y Estado del Arte del Problema de Coloreo Equitativo (ECP)

- Definición del ECP y primeros resultados [Meyer (1973)]
- Uso del Coloreo Equitativo para servicio de recolección de basura [Tucker 1973]
- Uso del Coloreo Equitativo en aplicaciones para el control de tráfico [Irani S. y Leung V. (1996)]
- Uso del Coloreo Equitativo en problemas de optimización para redes de celular [Touhami (2004)]
- Complejidad del ECP [Kubale M. y Furmanczyk H. (2005)]
- Avance en conjetura. Heurística para hallar un  $k$ -eqcol con  $\forall k = \Delta + 1, \dots, n$  [Kierstead H. y Kostochka A. (2008)]
- Primer modelo de Programación Entera para el ECP [Nasini G., Méndez-Díaz I. y Severin D. (2008)]
- Primer algoritmo Branch & Cut, basado en modelo *Assymmetric Representatives* [Ribeiro C. et al. (2009)]

# Historia y Estado del Arte del Problema de Coloreo Equitativo (ECP)

- Definición del ECP y primeros resultados [Meyer (1973)]
- Uso del Coloreo Equitativo para servicio de recolección de basura [Tucker 1973]
- Uso del Coloreo Equitativo en aplicaciones para el control de tráfico [Irani S. y Leung V. (1996)]
- Uso del Coloreo Equitativo en problemas de optimización para redes de celular [Touhami (2004)]
- Complejidad del ECP [Kubale M. y Furmanczyk H. (2005)]
- Avance en conjetura. Heurística para hallar un  $k$ -eqcol con  $\forall k = \Delta + 1, \dots, n$  [Kierstead H. y Kostochka A. (2008)]
- Primer modelo de Programación Entera para el ECP [Nasini G., Méndez-Díaz I. y Severin D. (2008)]
- Primer algoritmo Branch & Cut, basado en modelo *Assymmetric Representatives* [Ribeiro C. et al. (2009)]

# Historia y Estado del Arte del Problema de Coloreo Equitativo (ECP)

- Definición del ECP y primeros resultados [Meyer (1973)]
- Uso del Coloreo Equitativo para servicio de recolección de basura [Tucker 1973]
- Uso del Coloreo Equitativo en aplicaciones para el control de tráfico [Irani S. y Leung V. (1996)]
- Uso del Coloreo Equitativo en problemas de optimización para redes de celular [Touhami (2004)]
- Complejidad del ECP [Kubale M. y Furmanczyk H. (2005)]
- Avance en conjetura. Heurística para hallar un  $k$ -eqcol con  $\forall k = \Delta + 1, \dots, n$  [Kierstead H. y Kostochka A. (2008)]
- Primer modelo de Programación Entera para el ECP [Nasini G., Méndez-Díaz I. y Severin D. (2008)]
- Primer algoritmo Branch & Cut, basado en modelo *Assymmetric Representatives* [Ribeiro C. et al. (2009)]

# Historia y Estado del Arte del Problema de Coloreo Equitativo (ECP)

- Definición del ECP y primeros resultados [Meyer (1973)]
- Uso del Coloreo Equitativo para servicio de recolección de basura [Tucker 1973]
- Uso del Coloreo Equitativo en aplicaciones para el control de tráfico [Irani S. y Leung V. (1996)]
- Uso del Coloreo Equitativo en problemas de optimización para redes de celular [Touhami (2004)]
- Complejidad del ECP [Kubale M. y Furmanczyk H. (2005)]
- Avance en conjetura. Heurística para hallar un  $k$ -eqcol con  $\forall k = \Delta + 1, \dots, n$  [Kierstead H. y Kostochka A. (2008)]
- Primer modelo de Programación Entera para el ECP [Nasini G., Méndez-Díaz I. y Severin D. (2008)]
- Primer algoritmo Branch & Cut, basado en modelo *Assymmetric Representatives* [Ribeiro C. et al. (2009)]

# Modelo entero para el Problema de Coloreo Clásico

[Méndez-Díaz I. y Zabala P. (2005)]

$$x_{vj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado a } v, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \quad w_j = \begin{cases} 1 & x_{vj} = 1 \text{ para algún } v, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$(x, w)$  coloreo  $\leftrightarrow (x, w)$  es binario y satisface :

$$\sum_{j=1}^n x_{vj} = 1, \quad \forall v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \quad \forall uv \in E, j = 1, \dots, n-1$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \quad \forall j = 1, \dots, n-1$$

$$\chi(G) = \min \left\{ \sum_{j=1}^n w_j : (x, w) \text{ coloreo} \right\}$$

# Modelo entero para el Problema de Coloreo Clásico

[Méndez-Díaz I. y Zabala P. (2005)]

$$x_{vj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado a } v, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \quad w_j = \begin{cases} 1 & x_{vj} = 1 \text{ para algún } v, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$(x, w)$  coloreo  $\leftrightarrow (x, w)$  es binario y satisface :

$$\sum_{j=1}^n x_{vj} = 1, \quad \forall v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \quad \forall uv \in E, j = 1, \dots, n-1$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \quad \forall j = 1, \dots, n-1$$

$$\chi(G) = \min \left\{ \sum_{j=1}^n w_j : (x, w) \text{ coloreo} \right\}$$

# Modelo entero para el Problema de Coloreo Clásico

[Méndez-Díaz I. y Zabala P. (2005)]

$$x_{vj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado a } v, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases} \quad w_j = \begin{cases} 1 & x_{vj} = 1 \text{ para algún } v, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$(x, w)$  coloreo  $\leftrightarrow (x, w)$  es binario y satisface :

$$\sum_{j=1}^n x_{vj} = 1, \quad \forall v \in V$$

$$x_{uj} + x_{vj} \leq w_j, \quad \forall uv \in E, j = 1, \dots, n-1$$

$$w_{j+1} \leq w_j, \quad \forall j = 1, \dots, n-1$$

- $\chi(G) = \min \left\{ \sum_{j=1}^n w_j : (x, w) \text{ coloreo} \right\}$

## Modelando la equidad

- $k$ -eqcol  $\Leftrightarrow k$ -coloreo tal que  $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \quad \forall j$ .
- Notar que  $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$ .
- También  $w_k - w_{k+1} = 1 \Leftrightarrow (x, w)$  es  $k$ -eqcol.
- En EuroAlio 2008 propusimos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_j^k (w_k - w_{k+1}), \quad \forall j = 1, \dots, n-1,$$

$t_j^k =$  tamaño clase  $C_j$  en  $k$ -eqcol

- Elimina soluciones simétricas:  $|C_j| \geq |C_{j+1}|$ .
- Difícil de estudiar.
- Lo llamaremos modelo M1.



## Modelando la equidad

- $k$ -eqcol  $\Leftrightarrow$   $k$ -coloreo tal que  $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \quad \forall j$ .
- Notar que  $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$ .
- También  $w_k - w_{k+1} = 1 \Leftrightarrow (x, w)$  es  $k$ -eqcol.
- En EuroAlio 2008 propusimos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_j^k (w_k - w_{k+1}), \quad \forall j = 1, \dots, n-1,$$

$t_j^k =$  tamaño clase  $C_j$  en  $k$ -eqcol

- Elimina soluciones simétricas:  $|C_j| \geq |C_{j+1}|$ .
- Difícil de estudiar.
- Lo llamaremos modelo M1.

## Modelando la equidad

- $k$ -eqcol  $\Leftrightarrow k$ -coloreo tal que  $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \quad \forall j$ .
- Notar que  $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$ .
- También  $w_k - w_{k+1} = 1 \Leftrightarrow (x, w)$  es  $k$ -eqcol.
- En EuroAlio 2008 propusimos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_j^k (w_k - w_{k+1}), \quad \forall j = 1, \dots, n-1,$$

$t_j^k =$  tamaño clase  $C_j$  en  $k$ -eqcol

- Elimina soluciones simétricas:  $|C_j| \geq |C_{j+1}|$ .
- Difícil de estudiar.
- Lo llamaremos modelo M1.

## Modelando la equidad

- $k$ -eqcol  $\Leftrightarrow k$ -coloreo tal que  $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \quad \forall j$ .
- Notar que  $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$ .
- También  $w_k - w_{k+1} = 1 \Leftrightarrow (x, w)$  es  $k$ -eqcol.
- En EuroAlio 2008 propusimos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} t_j^k (w_k - w_{k+1}), \quad \forall j = 1, \dots, n-1,$$

$t_j^k =$  tamaño clase  $C_j$  en  $k$ -eqcol

- Elimina soluciones simétricas:  $|C_j| \geq |C_{j+1}|$ .
- Difícil de estudiar.
- Lo llamaremos modelo M1.

## Modelando la equidad

- $k$ -eqcol  $\Leftrightarrow k$ -coloreo tal que  $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \quad \forall j$ .
- Notar que  $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$ .
- También  $w_k - w_{k+1} = 1 \Leftrightarrow (x, w)$  es  $k$ -eqcol.
- En este trabajo proponemos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}), \quad \forall j = 1, \dots, n-1, \text{ (r. cota inf)}$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \leq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil (w_k - w_{k+1}), \quad \forall j = 1, \dots, n-1. \text{ (r. cota sup)}$$

- Más relajado que M1.
- Resultados útiles para poliedro de EuroAlio 2008.

## Modelando la equidad

- $k$ -eqcol  $\Leftrightarrow k$ -coloreo tal que  $\lfloor n/k \rfloor \leq |C_j| \leq \lceil n/k \rceil \quad \forall j$ .
- Notar que  $|C_j| = \sum_{v \in V} x_{vj}$ .
- También  $w_k - w_{k+1} = 1 \Leftrightarrow (x, w)$  es  $k$ -eqcol.
- En este trabajo proponemos:

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \geq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}), \quad \forall j = 1, \dots, n-1, \text{ (r. cota inf)}$$

$$\sum_{v \in V} x_{vj} \leq w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil (w_k - w_{k+1}), \quad \forall j = 1, \dots, n-1. \text{ (r. cota sup)}$$

- Más relajado que M1.
- Resultados útiles para poliedro de EuroAlio 2008.

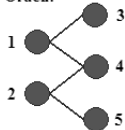
## Rompiendo simetrías

- Supongamos que los vértices están ordenados.
- Vamos a prohibir pintar  $v$  con un color  $j$  tal que  $j > v$ :

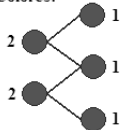
$$x_{vj} = 0, \quad \forall j = v + 1, \dots, n. \quad (\text{simetr})$$

- (r. cota inf) + (r. cota sup) + (simetr)  $\longrightarrow$  modelo M2
- Se puede probar la siguiente condición:
  - $\forall k$  admisible,  $\exists k - eqcol$  : satisface (simetr)
- (simetr) no puede aplicarse a M1.

Orden:



Colores:



$$\therefore x_{12} \neq 0$$

## Modelando la equidad otra vez

- Agregaremos  $n - 1$  variables binarias:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor + 1 \text{ en un } k\text{-eqcol,} \\ 0 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor \text{ en un } k\text{-eqcol.} \end{cases}$$

- Restricción de equidad en un  $k$ -eqcol:  $|C_j| = \lfloor n/k \rfloor + y_j$ .

$$\sum_{v=1}^n x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}) + y_j, \quad \forall j = 1, \dots, n-1. \text{ (nueva)}$$

- (nueva) + (simetr)  $\longrightarrow$  modelo M3
- M3 es más relajado que M2, pues (r. cota sup) domina a  $y_j \leq 1$ . Sin embargo, en M3, (r. cota sup) se puede agregar en la etapa de *cutting*.

## Modelando la equidad otra vez

- Agregaremos  $n - 1$  variables binarias:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor + 1 \text{ en un } k\text{-eqcol,} \\ 0 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor \text{ en un } k\text{-eqcol.} \end{cases}$$

- Restricción de equidad en un  $k$ -eqcol:  $|C_j| = \lfloor n/k \rfloor + y_j$ .

$$\sum_{v=1}^n x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}) + y_j, \quad \forall j = 1, \dots, n-1. \text{ (nueva)}$$

- (nueva) + (simetr)  $\longrightarrow$  modelo M3
- M3 es más relajado que M2, pues (r. cota sup) domina a  $y_j \leq 1$ . Sin embargo, en M3, (r. cota sup) se puede agregar en la etapa de *cutting*.



## Modelando la equidad otra vez

- Agregaremos  $n - 1$  variables binarias:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor + 1 \text{ en un } k\text{-eqcol,} \\ 0 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor \text{ en un } k\text{-eqcol.} \end{cases}$$

- Restricción de equidad en un  $k$ -eqcol:  $|C_j| = \lfloor n/k \rfloor + y_j$ .

$$\sum_{v=1}^n x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}) + y_j, \quad \forall j = 1, \dots, n-1. \text{ (nueva)}$$

- (nueva) + (simetr)  $\longrightarrow$  modelo M3
- M3 es más relajado que M2, pues (r. cota sup) domina a  $y_j \leq 1$ . Sin embargo, en M3, (r. cota sup) se puede agregar en la etapa de *cutting*.

## Modelando la equidad otra vez

- Agregaremos  $n - 1$  variables binarias:

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor + 1 \text{ en un } k\text{-eqcol,} \\ 0 & \text{si } |C_j| = \lfloor n/k \rfloor \text{ en un } k\text{-eqcol.} \end{cases}$$

- Restricción de equidad en un  $k$ -eqcol:  $|C_j| = \lfloor n/k \rfloor + y_j$ .

$$\sum_{v=1}^n x_{vj} = w_n + \sum_{k=j}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (w_k - w_{k+1}) + y_j, \quad \forall j = 1, \dots, n-1. \text{ (nueva)}$$

- (nueva) + (simetr)  $\longrightarrow$  modelo M3
- M3 es más relajado que M2, pues (r. cota sup) domina a  $y_j \leq 1$ . Sin embargo, en M3, (r. cota sup) se puede agregar en la etapa de *cutting*.

## Comparación de los modelos

- *Testbed*: 252 grafos generados al azar.
- *Programa*: Cut & Branch, basado en CPLEX 10.1, desig. *clique* en etapa de *cutting*, y heurísticas iniciales.
- *Hardware*: Sun UltraSparc workstation. *Límite*: 2 hs.

| n  | Dens. | % of s.s.i. |     |     | Evaluated nodes |             |             | Time in sec. |           |            |
|----|-------|-------------|-----|-----|-----------------|-------------|-------------|--------------|-----------|------------|
|    |       | M1          | M2  | M3  | M1              | M2          | M3          | M1           | M2        | M3         |
| 25 | low   | 100         | 100 | 100 | 3               | 2           | 2           | 0            | 0         | 0          |
|    | med.  | 100         | 100 | 100 | 55              | 15          | 16          | 3            | 0         | 0          |
|    | high  | 100         | 100 | 100 | 1293            | 125         | 23          | 27           | 1         | 0          |
| 30 | low   | 100         | 100 | 100 | 11              | 20          | 39          | 1            | 0         | 1          |
|    | med.  | 100         | 100 | 100 | 3175            | <b>1184</b> | 1323        | 317          | <b>51</b> | 58         |
|    | high  | 84          | 100 | 100 | 3603            | 338         | <b>244</b>  | 577          | 14        | <b>11</b>  |
| 35 | low   | 100         | 100 | 100 | 182             | 12          | 8           | 6            | 1         | 1          |
|    | med.  | 81          | 100 | 100 | 4381            | 1633        | <b>802</b>  | 696          | 104       | <b>57</b>  |
|    | high  | 67          | 90  | 90  | 2109            | 3994        | <b>1298</b> | 895          | 603       | <b>131</b> |

## Comparación de los modelos

- *Testbed*: 252 grafos generados al azar.
- *Programa*: Cut & Branch, basado en CPLEX 10.1, desig. *clique* en etapa de *cutting*, y heurísticas iniciales.
- *Hardware*: Sun UltraSparc workstation. *Límite*: 2 hs.

| n  | Dens. | % of s.s.i. |     |     | Evaluated nodes |             |             | Time in sec. |           |            |
|----|-------|-------------|-----|-----|-----------------|-------------|-------------|--------------|-----------|------------|
|    |       | M1          | M2  | M3  | M1              | M2          | M3          | M1           | M2        | M3         |
| 25 | low   | 100         | 100 | 100 | 3               | 2           | 2           | 0            | 0         | 0          |
|    | med.  | 100         | 100 | 100 | 55              | 15          | 16          | 3            | 0         | 0          |
|    | high  | 100         | 100 | 100 | 1293            | 125         | 23          | 27           | 1         | 0          |
| 30 | low   | 100         | 100 | 100 | 11              | 20          | 39          | 1            | 0         | 1          |
|    | med.  | 100         | 100 | 100 | 3175            | <b>1184</b> | 1323        | 317          | <b>51</b> | 58         |
|    | high  | 84          | 100 | 100 | 3603            | 338         | <b>244</b>  | 577          | 14        | <b>11</b>  |
| 35 | low   | 100         | 100 | 100 | 182             | 12          | 8           | 6            | 1         | 1          |
|    | med.  | 81          | 100 | 100 | 4381            | 1633        | <b>802</b>  | 696          | 104       | <b>57</b>  |
|    | high  | 67          | 90  | 90  | 2109            | 3994        | <b>1298</b> | 895          | 603       | <b>131</b> |

## Comparación con B&C-LF<sub>2</sub>

- *Testbed*: Instancias DIMACS fáciles.
- *Programa 1*: Branch & Cut, basado en CPLEX 11.1 y en modelo M3 (intercambiando desig. de adyacencia por desig. de vecindad), desig. *clique* en etapa de *cutting*, heurísticas iniciales y heurísticas primales.
- *Hardware 1*: AMD-Athlon 2.2 Ghz quad core (usamos 1 core).
- *Programa 2*: B&C-LF<sub>2</sub>, basado en XPRESS 2005 y en modelo *assymetric representatives* [Ribeiro C. et al. (2009)]
- *Hardware 2*: AMD-Athlon 1.8 Ghz.
- *Factor*:  $1.8\text{Ghz}/2.2\text{Ghz} = 0.82$ . *Límite*: 2 hs.

## Comparación con B&C-LF<sub>2</sub>

- *Testbed*: Instancias DIMACS fáciles.
- *Programa 1*: Branch & Cut, basado en CPLEX 11.1 y en modelo M3 (intercambiando desig. de adyacencia por desig. de vecindad), desig. *clique* en etapa de *cutting*, heurísticas iniciales y heurísticas primales.
- *Hardware 1*: AMD-Athlon 2.2 Ghz quad core (usamos 1 core).
- *Programa 2*: B&C-LF<sub>2</sub>, basado en XPRESS 2005 y en modelo *assymetric representatives* [Ribeiro C. et al. (2009)]
- *Hardware 2*: AMD-Athlon 1.8 Ghz.
- *Factor*:  $1.8\text{Ghz}/2.2\text{Ghz} = 0.82$ . *Límite*: 2 hs.

## Comparación con B&amp;C-LF2

| Name        | n   | Evaluated nodes |                     | Time in sec. |                     |              |
|-------------|-----|-----------------|---------------------|--------------|---------------------|--------------|
|             |     | B&C-M3          | B&C-LF <sub>2</sub> | B&C-M3       | B&C-LF <sub>2</sub> | (refactored) |
| miles1000   | 128 | 0               | 13                  | <b>0</b>     | 267                 | 219          |
| miles1500   | 128 | 0               | 1                   | <b>0</b>     | 13                  | 11           |
| jean        | 80  | 0               | 1                   | 0            | 4                   | 3            |
| anna        | 138 | 0               | 2                   | <b>0</b>     | 26                  | 21           |
| games120    | 120 | 0               | 1                   | <b>0</b>     | 30                  | 25           |
| kneser5-2   | 10  | 0               | 1                   | 0            | 0                   | 0            |
| david       | 87  | 0               | 1                   | <b>0</b>     | 13                  | 11           |
| 1-FullIns-3 | 30  | 0               | 34                  | 0            | 2                   | 2            |
| 2-FullIns-3 | 52  | 0               | 84                  | <b>0</b>     | 25                  | 20           |
| 3-FullIns-3 | 80  | 0               | 38                  | <b>0</b>     | 85                  | 70           |
| 4-FullIns-3 | 114 | 2               | 3                   | <b>1</b>     | 72                  | 59           |
| 5-FullIns-3 | 154 | 0               | 5                   | <b>0</b>     | 268                 | 220          |
| miles750    | 128 | 0               | 6                   | <b>3</b>     | 171                 | 140          |
| kneser7-2   | 21  | 492             | <b>357</b>          | <b>0</b>     | 6                   | 5            |
| kneser7-3   | 35  | 2               | 4                   | 0            | 2                   | 2            |
| kneser9-4   | 126 | 0               | 4                   | <b>0</b>     | 809                 | 663          |
| zeroin.i.1  | 211 | 0               | 1                   | <b>0</b>     | 50                  | 41           |
| zeroin.i.2  | 211 | 0               | 23                  | <b>1</b>     | 510                 | 418          |
| zeroin.i.3  | 206 | 0               | 28                  | <b>1</b>     | 491                 | 403          |
| myciel3     | 11  | 1               | 7                   | 0            | 0                   | 0            |
| myciel4     | 23  | 353             | <b>237</b>          | 0            | 5                   | 4            |
| queen6-6    | 36  | 2               | 1                   | 0            | 1                   | 1            |
| queen7-7    | 49  | 2               | 1                   | 2            | 0                   | 0            |
| queen8-8    | 64  | 648             | <b>27</b>           | <b>194</b>   | 441                 | 362          |

- Primeras 6 instancias fueron resueltas por la heurística inicial.

Comparación con B&C- $LF_2$ 

- *Testbed 1*: 50 grafos aleatorios de 60 vértices.
- *Hardware 1*: AMD-Athlon 2.2 Ghz quad core (usamos 1 core).
- *Testbed 2*: 25 grafos aleatorios de 60 vértices.
- *Hardware 2*: AMD-Athlon 1.8 Ghz.
- *Factor*:  $1.8\text{Ghz}/2.2\text{Ghz} = 0.82$ . *Límite*: 2 hs.

| Dens. | % of s.s.i. |        | Evaluated nodes |            | Time in sec. |        |           |
|-------|-------------|--------|-----------------|------------|--------------|--------|-----------|
|       | $M3$        | $LF_2$ | $M3$            | $LF_2$     | $M3$         | $LF_2$ | (refact.) |
| 10%   | 100         | 100    | <b>1</b>        | 13         | <b>0</b>     | 21     | 17        |
| 30%   | <b>100</b>  | 40     | 696             | 89         | 124          | 91     | 75        |
| 50%   | <b>90</b>   | 60     | 3192            | 202        | 1250         | 123    | 101       |
| 70%   | 100         | 100    | 1221            | <b>200</b> | 425          | 71     | <b>58</b> |
| 90%   | 100         | 100    | 2               | 1          | <b>1</b>     | 9      | 7         |



Comparación con B&C- $LF_2$ 

- *Testbed 1*: 50 grafos aleatorios de 60 vértices.
- *Hardware 1*: AMD-Athlon 2.2 Ghz quad core (usamos 1 core).
- *Testbed 2*: 25 grafos aleatorios de 60 vértices.
- *Hardware 2*: AMD-Athlon 1.8 Ghz.
- *Factor*:  $1.8\text{Ghz}/2.2\text{Ghz} = 0.82$ . *Límite*: 2 hs.

| Dens. | % of s.s.i. |        | Evaluated nodes |            | Time in sec. |        |           |
|-------|-------------|--------|-----------------|------------|--------------|--------|-----------|
|       | $M3$        | $LF_2$ | $M3$            | $LF_2$     | $M3$         | $LF_2$ | (refact.) |
| 10%   | 100         | 100    | <b>1</b>        | 13         | <b>0</b>     | 21     | 17        |
| 30%   | <b>100</b>  | 40     | 696             | 89         | 124          | 91     | 75        |
| 50%   | <b>90</b>   | 60     | 3192            | 202        | 1250         | 123    | 101       |
| 70%   | 100         | 100    | 1221            | <b>200</b> | 425          | 71     | <b>58</b> |
| 90%   | 100         | 100    | 2               | 1          | <b>1</b>     | 9      | 7         |

Comparación con B&C- $LF_2$ 

- *Testbed 1*: 50 grafos aleatorios de 60 vértices.
- *Hardware 1*: AMD-Athlon 2.2 Ghz quad core (usamos 1 core).
- *Testbed 2*: 25 grafos aleatorios de 60 vértices.
- *Hardware 2*: AMD-Athlon 1.8 Ghz.
- *Factor*:  $1.8\text{Ghz}/2.2\text{Ghz} = 0.82$ . *Límite*: 2 hs.

| Dens. | % of s.s.i. |        | Evaluated nodes |            | Time in sec. |        |           |
|-------|-------------|--------|-----------------|------------|--------------|--------|-----------|
|       | $M3$        | $LF_2$ | $M3$            | $LF_2$     | $M3$         | $LF_2$ | (refact.) |
| 10%   | 100         | 100    | <b>1</b>        | 13         | <b>0</b>     | 21     | 17        |
| 30%   | <b>100</b>  | 40     | 696             | 89         | 124          | 91     | 75        |
| 50%   | <b>90</b>   | 60     | 3192            | 202        | 1250         | 123    | 101       |
| 70%   | 100         | 100    | 1221            | <b>200</b> | 425          | 71     | <b>58</b> |
| 90%   | 100         | 100    | 2               | 1          | <b>1</b>     | 9      | 7         |

## Comparación con estrategia por defecto de CPLEX 11.1

- *Testbed A*: 50 grafos aleatorios de 60 vértices.
- *Testbed B*: Instancias DIMACS medianas.
- *Hardware*: AMD-Athlon 2.2 Ghz quad core (usamos 1 core).

| Dens. | % of s.s.i. |       | Evaluated nodes |       | Time in sec. |       |
|-------|-------------|-------|-----------------|-------|--------------|-------|
|       | B&C         | CPLEX | B&C             | CPLEX | B&C          | CPLEX |
| 10%   | 100         | 100   | 1               | 0     | 0            | 0     |
| 30%   | 100         | 40    | <b>696</b>      | 3777  | <b>124</b>   | 421   |
| 50%   | <b>90</b>   | 50    | 3192            | 6831  | 1250         | 1023  |
| 70%   | <b>100</b>  | 70    | 1221            | 2173  | 425          | 286   |
| 90%   | 100         | 100   | <b>2</b>        | 98    | 1            | 2     |

## Comparación con estrategia por defecto de CPLEX 11.1

- *Testbed A*: 50 grafos aleatorios de 60 vértices.
- *Testbed B*: Instancias DIMACS medianas.
- *Hardware*: AMD-Athlon 2.2 Ghz quad core (usamos 1 core).

| Dens. | % of s.s.i. |       | Evaluated nodes |       | Time in sec. |       |
|-------|-------------|-------|-----------------|-------|--------------|-------|
|       | B&C         | CPLEX | B&C             | CPLEX | B&C          | CPLEX |
| 10%   | 100         | 100   | 1               | 0     | 0            | 0     |
| 30%   | 100         | 40    | <b>696</b>      | 3777  | <b>124</b>   | 421   |
| 50%   | <b>90</b>   | 50    | 3192            | 6831  | 1250         | 1023  |
| 70%   | <b>100</b>  | 70    | 1221            | 2173  | 425          | 286   |
| 90%   | 100         | 100   | <b>2</b>        | 98    | 1            | 2     |

## Comparación con estrategia por defecto de CPLEX 11.1

| Name           | n   | Evaluated nodes |        | Time in sec. |           |
|----------------|-----|-----------------|--------|--------------|-----------|
|                |     | B&C             | CPLEX  | B&C          | CPLEX     |
| 1-Insertions-4 | 67  | 605170          | —      | 1551         | —         |
| 2-Insertions-3 | 37  | 151             | 3062   | 0            | 1         |
| 3-Insertions-3 | 56  | 15848           | 395589 | <b>18</b>    | 308       |
| 4-Insertions-3 | 79  | 332959          | —      | 370          | —         |
| myciel5        | 47  | 4912            | 111680 | <b>34</b>    | 525       |
| queen6-6       | 36  | 2               | 611    | <b>0</b>     | 5         |
| queen7-7       | 49  | 2               | 682    | <b>2</b>     | 18        |
| queen8-8       | 64  | 648             | —      | 194          | —         |
| mug100-1       | 100 | 3676            | 5506   | <b>7</b>     | 19        |
| mug100-25      | 100 | 766             | 9812   | <b>3</b>     | 38        |
| DSJC125.1      | 125 | 2               | —      | 11           | —         |
| kneser11-5     | 462 | 0               | 0      | <b>11</b>    | 21        |
| inithx.i.1     | 864 | 0               | 0      | 136          | <b>70</b> |

## Conclusiones

- $M3$  funciona mejor que  $M1$  debido a que elimina más cantidad de soluciones, achicando el espacio de búsqueda.
- Las restricciones (r. cota sup) parecen influir ligeramente (de forma negativa) en la performance de  $M2$ .
- Las pruebas realizadas indican que B&C- $M3$  funciona mejor que B&C- $LF_2$  en grafos aleatorios de densidad baja, y en grafos con estructura (como las instancias DIMACS).
- B&C- $M3$  resuelve más instancias que CPLEX. Además, en muchas de las instancias que ambos resuelven, el factor de tiempo es de una orden de magnitud (10:1).

# Conclusiones

- $M3$  funciona mejor que  $M1$  debido a que elimina más cantidad de soluciones, achicando el espacio de búsqueda.
- Las restricciones (r. cota sup) parecen influir ligeramente (de forma negativa) en la performance de  $M2$ .
- Las pruebas realizadas indican que B&C- $M3$  funciona mejor que B&C- $LF_2$  en grafos aleatorios de densidad baja, y en grafos con estructura (como las instancias DIMACS).
- B&C- $M3$  resuelve más instancias que CPLEX. Además, en muchas de las instancias que ambos resuelven, el factor de tiempo es de una orden de magnitud (10:1).

## Conclusiones

- $M3$  funciona mejor que  $M1$  debido a que elimina más cantidad de soluciones, achicando el espacio de búsqueda.
- Las restricciones (r. cota sup) parecen influir ligeramente (de forma negativa) en la performance de  $M2$ .
- Las pruebas realizadas indican que B&C- $M3$  funciona mejor que B&C- $LF_2$  en grafos aleatorios de densidad baja, y en grafos con estructura (como las instancias DIMACS).
- B&C- $M3$  resuelve más instancias que CPLEX. Además, en muchas de las instancias que ambos resuelven, el factor de tiempo es de una orden de magnitud (10:1).



## Conclusiones

- $M3$  funciona mejor que  $M1$  debido a que elimina más cantidad de soluciones, achicando el espacio de búsqueda.
- Las restricciones (r. cota sup) parecen influir ligeramente (de forma negativa) en la performance de  $M2$ .
- Las pruebas realizadas indican que B&C- $M3$  funciona mejor que B&C- $LF_2$  en grafos aleatorios de densidad baja, y en grafos con estructura (como las instancias DIMACS).
- B&C- $M3$  resuelve más instancias que CPLEX. Además, en muchas de las instancias que ambos resuelven, el factor de tiempo es de una orden de magnitud (10:1).

# GRACIAS!