LA FORMACIÓN EN MATEMÁTICA DE ALUMNOS INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD

Cattaneo, Betina; Galván, Claudia; Mansilla, Sandra; Miyara, Alberto; Muñoz, Lorena; Piraino, Marisa; Vital, Beatriz
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura -Universidad Nacional de Rosario

RESUMEN

En este artículo se describen distintas experiencias llevadas a cabo en el marco de un proyecto de investigación de la UNR[1], con el objetivo de introducir el concepto de modelización en la enseñanza de las matemáticas de los primeros años de Ingeniería., y teniendo en cuenta que uno de los desafíos más importantes que se le presenta a los docentes de Matemática de estas carreras es precisamente formar en Matemática a alumnos que la utilizan como instrumento de modelización y herramienta de solución de situaciones problemáticas.

Se analizan diferentes opciones ensayadas: capacitación de docentes, trabajo informal con alumnos ingresantes a la universidad, uso de herramientas informáticas. Se describen los obstáculos encontrados en cada una de ellas y el proceso que lleva a la conclusión de que un cambio en el espíritu de la didáctica de la matemática debe pasar necesariamente por un cierto grado de institucionalización, para lo cual se proponen diferentes opciones, complementarias —no sustitutorias— de los contenidos teórico-prácticos de las actuales asignaturas del área.

Se describe además una experiencia realizada con alumnos de primer año de Ingeniería, trabajando en la modalidad Taller, a quienes se les presentó un problema en un contexto real y concreto, a partir del cual se pudo hacer emerger el concepto de límite de una función, cuya ley, dominio e imagen tenían que hallar previamente.

INTRODUCCIÓN, MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Entre docentes de matemática de la Escuela de Formación Básica (E.F.B) de la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario, y alumnos de las carreras de Ingeniería, han surgido inquietudes, con bastante consenso entre docentes de otras especialidades que trabajan con alumnos ingresantes, como las siguientes:

- En muchos de los textos de Análisis Matemático aparecen ejemplos y problemas que sólo requieren aplicación mecánica de fórmulas o, en el extremo opuesto, problemas que exigen conocimientos específicos de un área determinada de especialización, y relacionados con temas que los alumnos sólo verán más adelante en sus carreras, o que pertenecen a otra especialidad que la que cursan.
- Estos últimos problemas inhiben también al docente dado el requerimiento de conocimientos especiales. En consecuencia, generalmente se los saltea.
- Muchas veces al alumno le interesa más obtener un resultado que verificar si corresponde a las condiciones del problema. No utilizan estrategias como prueba y error o el uso de distintos registros (verbal, simbólico, gráfico, numérico); simplemente se remiten a una fórmula.
- Es necesario que no solamente se valore la solución final sino que se discutan también las estrategias, conexiones y extensiones que se pueden establecer durante el proceso de solución.
- Existe una carencia de problemas que generen un espacio donde el alumno con sus

conocimientos matemáticos y generales previos pueda buscar estrategias que le permitan construir un modelo matemático.

- Aun cuando muchos estudiantes tienen los recursos matemáticos necesarios para resolver algunos problemas, les cuesta trabajo utilizar tales recursos y emplearlos eficientemente en el proceso de resolución. En la fase inicial, en la que tendrían que encontrar el sentido del enunciado del problema, algunos estudiantes no se detienen a analizar los elementos y relaciones que podrían entrar en juego. Si no se les presenta una fórmula directa de aplicación, se paralizan.

Los factores anteriormente citados plantearon la necesidad de una investigación relativa a los procesos que entran en juego cuando los alumnos de un primer curso de Análisis Matemático resuelven problemas que requieren conceptos de dicha disciplina en distintas áreas de la Física o Ingeniería en nuestro caso, con los conocimientos generales que se supone poseen.

Según Douady (1995), interesan distintos factores que rigen la elaboración de un problema:
- La actividad propuesta como punto de partida debería presentar un problema para los alumnos pero a la vez ser comprendido por ellos, es decir, los alumnos tendrían que poder pensar y planear la respuesta al problema.
- Tendría que permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores para poder introducirse en el problema.
- Pero también tendría que ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a hacer evolucionar sus conocimientos anteriores, a cuestionarlos y a elaborar nuevos conocimientos.
- En lo posible también tendría que contener su propia validación, para que el alumno pueda por si mismo, o bien confrontando con otros alumnos, controlar su solución y decidir la validez de su respuesta.

De una manera general, nuestro trabajo pretende inscribirse en la metodología de la Ingeniería Didáctica, disciplina desarrollada entre otros por Artigue y Douady.
Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "relaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Artigue (1995) propone las siguientes fases para la ejecución de un trabajo de Ingeniería Didáctica:

- análisis previo
- concepción y análisis a priori
- desarrollo
- análisis a posteriori
- transferencia

ALTERNATIVAS DE TRABAJO

Bajo este fundamento en anteriores ediciones de estos Simposios presentamos problemas de nuestra autoría analizados según el prisma de la Ingeniería Didáctica.
Nuestro interés es poder cerrar la brecha que se les presenta a alumnos ingresantes a

distintas carreras universitarias: cierta desconexión entre las herramientas matemáticas impartidas y cualquier tipo de realidad física o geométrica, estableciendo, dentro de las limitaciones temporales y logísticas que constriñen nuestro trabajo, una modalidad didáctica que, aunque sea en una medida limitada, aproxime al alumno al mundo que lo rodea a través de la herramienta matemática.
Por ejemplo, enseñamos el concepto de límite infinito, pero ¿qué oportunidad ofrecemos al alumno de que vincule este concepto con la realidad? Proponemos:

PROBLEMA DE LA EPE

Este problema se diseñó a partir de datos suministrados por una boleta de la Empresa Provincial de la Energía, que adjuntamos a continuación:

EPE

EMPRESA PROVINCIAL DE LA ENERGIA DE SANTA FE

Área de aplicación: Todo el territorio de la Provincia de Santa Fe - Vigencia: desde 01/03/08 hasta el 31/03/08, para el consumo de energía realizado durante el período: MARZO 2008

FACTURACION BIMESTRAL

Demanda Máxima: menor de 20 kW

TARIFA - PEQUEÑAS DEMANDAS URBANAS

Tarifa 1 - Uso Residencial (menor de 20 kW)	Cuota de Servicio $/sum. mes	Primeros 60 kWh/ mes ($/kWh)	Siguientes 60 kWh/ mes ($/kWh)	Excedente de 120 kWh/mes ($/kWh)
Tarifa 1 01 (cons. sup. a 120 kWh-mes)	10,37802	0,09347	0,11932	0,22030
Tarifa 1 04 (cons. hasta a 120 kWh-mes)	6,75935	0,08686	0,11514	
Tarifa 1 06 Jub. y/o Pens. (cons. hasta a 120 kWh-mes)	3,38404	0,04518	0,06162	
	Cuota de Servicio $/sum. mes	Primeros 120 kWh/ mes ($/kWh)	SGTES 30 kWh/mes ($/kWh)	
Tarifa 1 08 Carenciados (cons. hasta a 120 kWh-mes, más 30 kWh-mes de tolerancia)	2,24928	0,04139	0,13509	
	Cuota de Servicio $/sum. mes	Primeros 200 kWh/ mes ($/kWh)	Excedente de 200 kWh/mes ($/kWh)	
Tarifa 1C08 Carenciados (hasta a 2,2 kW)	10,37802	0,05775	0,07150	
Tarifa 1I08 Carenciados (hasta a 2,2 kW - Tarifa Fija)	20,76000			

Enunciado

La Empresa Provincial de la Energía tiene un sistema escalonado de facturación; en la medida en que más consume un usuario, mayor es el costo promedio mensual de su consumo.

a) Hallar la función que da el costo total del consumo en función de la cantidad de KWh consumidos sabiendo que la empresa cobra, según boleta que se adjunta:

1) Una cuota de servicio fija de 10,37802 $ por mes.

2) 0,09347 $ por cada KWh para los primeros 60 KWh consumidos.

3) 0,11932 $ por cada KWh para los siguientes 60 KWh consumidos.

4) 0,22030 $ por cada KWh a partir de los 120 KWh.

b) Esta función ¿admite inversa? Determinar, si un cliente pagó x pesos, cuántos KWh consumió.

c) Hallar el costo promedio del KWh en función de la cantidad de KWh consumidos.

d) ¿A qué valor se aproxima el costo promedio del KWh cuando la cantidad consumida aumenta a valores cada vez mayores?

e) *¿Qué sucede con el costo promedio cuando el consumo es prácticamente nulo?*

La solución es:

a)

$$f(x)=\begin{cases}10{,}37802+0{,}09347x \quad , \quad \text{si} \quad x<60\\ 10{,}37802+0{,}09347\cdot 60+0{,}11932(x-60) \quad , \quad \text{si} \quad 60\leq x<120\\ 10{,}37802+0{,}09347\cdot 60+0{,}11932\cdot 60+0{,}22030(x-120) \quad , \quad \text{si} \quad x\geq 120\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}10{,}37802+0{,}09347x \quad , \quad \text{si} \quad x<60\\ 8{,}82702+0{,}11932x \quad , \quad \text{si} \quad 60\leq x<120\\ -3{,}29058+0{,}22030x \quad , \quad \text{si} \quad x\geq 120\end{cases}$$

b) Sí, admite inversa pues es una función monótona y por lo tanto es inyectiva.

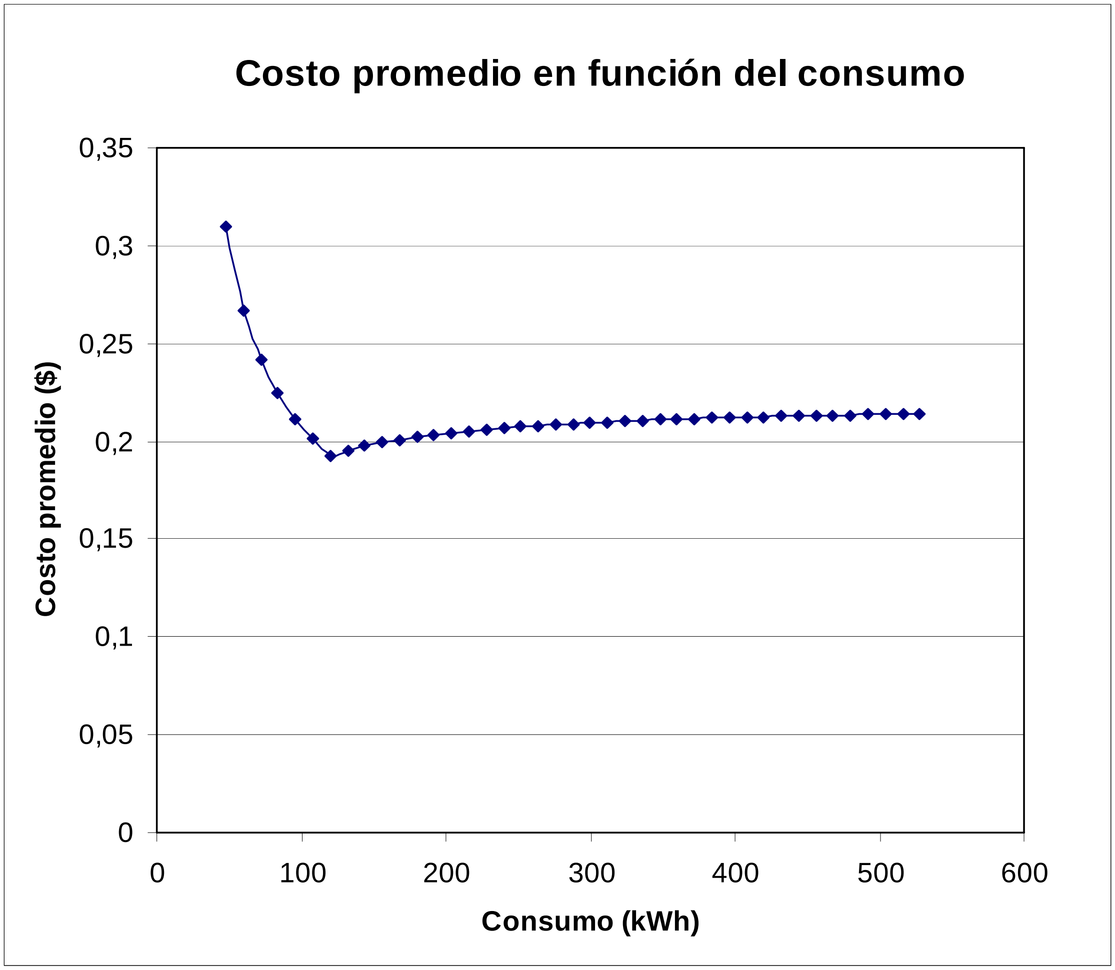
$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-10{,}37802}{0{,}09347} \quad , \quad \text{si} \quad x<15{,}98622\\ \dfrac{x-8{,}82702}{0{,}11932} \quad , \quad \text{si} \quad 15{,}98622\leq x<23{,}14542\\ \dfrac{x+3{,}29058}{0{,}22030} \quad , \quad \text{si} \quad x\geq 23{,}14542\end{cases}$$

c)

$$f_p(x)=\begin{cases}\dfrac{10{,}37802}{x}+0{,}09347 \quad , \quad \text{si} \quad x<60\\ \dfrac{8{,}82702}{x}+0{,}11932 \quad , \quad \text{si} \quad 60\leq x<120\\ \dfrac{-3{,}29058}{x}+0{,}22030 \quad , \quad \text{si} \quad x\geq 120\end{cases}$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} f_p(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3{,}29058}{x}+0{,}22030\right)=0{,}22030$$



<u>Análisis a Priori</u>

-¿Qué entienden los alumnos por costo promedio y costo total?

-¿Qué dificultades se les presenta para hallar la ley de la función y su dominio?

-¿Grafican? ¿Cómo?

-¿Qué conocimientos de Análisis Matemático se necesitan para abordar el problema?

-¿Qué obstáculos se presentan en el cálculo de Límites o en la interpretación de sus significados?

-¿Cuál es el sentido de conocer el costo promedio? ¿Lo comparan con el costo total?

Resultados de la experiencia

Al desarrollar esta experiencia con 35 alumnos de dos cursos de Análisis Matemático I correspondiente a dos comisiones del turno tarde y del turno mañana, observamos que no fue necesario pedir explícitamente el cálculo de un límite en el enunciado, sino que éste surgió naturalmente al tratar de averiguar tendencias para tiempos muy grandes.
No decimos que este problema sea realista en el sentido de que sería verosímil que el alumno lo tuviera alguna vez que resolver. Pero sí pone en contexto al concepto de límite infinito, lo cual ya es un avance.
En el primer apartado: La mayoría de los estudiantes planteó bien la función para $0<x<60$ pero muchos obtuvieron mal la función para x desde 60 en adelante. Es decir si dependiera de ellos el cálculo del pago de la luz, pagarían siempre de más sin chillar. Ahora bien, todos plantearon algo, ninguno entregó en blanco este apartado.
Cuando presentamos el problema, el 33% de los alumnos planteó una función constante en cada sub-intervalo y cuando se les preguntó si les parecía que van a pagar lo mismo por consumir 30 o 50 KW/h reaccionaron y cambiaron el planteo.
En el segundo apartado: Algunos alumnos dijeron que la función admite inversa porque es inyectiva sin justificarlo, otros lo argumentaron diciendo que es una función lineal (justificación errónea porque se trata de lineal a trozos, que no necesariamente resulta inyectiva en todos los casos). Hubo quienes dijeron certeramente que es monótona creciente (analítica o gráficamente), unos pocos intentaron calcular la inversa y no determinaron los intervalos en los que queda dividido el dominio de esta nueva función.
En el tercer apartado: Hubo alumnos que no lo resolvieron, y tampoco hicieron el siguiente. Sólo el 22% de los alumnos escribió bien el costo promedio.
En el cuarto apartado: Los mismos alumnos que resolvieron bien el apartado anterior hicieron también correctamente éste (22%).
La respuesta de quienes lo resolvieron erróneamente fue que el costo promedio se aproxima a infinito (11%).

PROPUESTAS REALIZADAS

Una vez establecida la necesidad de plantear este tipo de problemas en el curso de Análisis Matemático I, la cuestión que se planteó es: ¿cómo implementarlo? Es a este objetivo que nos dedicamos en los últimos cuatro años, encarando las propuestas —y encontrando los obstáculos— que se describen a continuación.

1.- CLASES TALLER EN CONTRATURNO PARA DOCENTES

Fue importante comenzar con el cuerpo docente, para concientizar, interesar y generar la necesidad de movilizar el aprendizaje en esta dirección. Produjo un acercamiento del docente al lugar de aprendizaje del alumno, como así también generó una conciencia de la necesidad de intercomunicación entre los propios docentes. Juntos se pudo analizar la mejor manera de puesta en práctica en esa institución.
En 2005 dictamos talleres para docentes de la Facultad, así como para profesores que cursaban un postítulo en Matemática en una institución privada. Básicamente presentamos distintos problemas que ilustraban la aplicación de conceptos matemáticos a situaciones

físicas y geométricas; la producción de los asistentes a los talleres consistió en su propio aporte de problemas (no necesariamente de su autoría, sino, en muchos casos, tomados de distintas fuentes, dado que no estamos descubriendo la pólvora, sino tratando de usarla donde aún se está cazando con arco y flecha).
Una importante derivación de los cursos ,por parte de los docentes que asistieron, fue el llevado de la propuesta a situaciones áulicas, de las cuales se recogió una realimentación que complementó la que nosotros mismos recibimos en nuestros propios intentos en ese sentido (ver punto 2).
La experiencia reforzó nuestra convicción de que cualquier intento de reforma de la manera como se imparte matemática debe comenzar con un trabajo conjunto de todos los docentes de la institución en modalidad taller.

2.- INTRODUCCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN EN LAS CLASES REGULARES

Otra tarea que llevamos a cabo fue la de plantear en nuestro dictado de clases de Análisis Matemático I la resolución de problemas de modelización, cuyo listado pusimos a disposición de los alumnos como un apunte en la Fotocopiadora. La idea era estimular un trabajo continuado del alumno. Una observación, quizá inesperada, fue que los alumnos mostraron bastante entusiasmo. Sin embargo, hubo varios factores que conspiraron contra el éxito de la iniciativa:

a) La falta de formalización derivó en que muy pronto se comenzó a percibir un desgaste en los niveles de cumplimiento de estas tareas por parte del alumnado. A pesar de que se les dejó en claro que la resolución de los problemas podría ser un factor conceptual importante para su evaluación (por ejemplo, podría definir la aprobación o no de un alumno que obtuvo 5,50 en un parcial), los alumnos no percibieron esta tarea como un componente de su nota, en parte porque se trataba de una experiencia piloto restringida a algunas comisiones, y la realimentación que recibían de sus compañeros de otras comisiones, donde no se presentaban problemas de modelización, les indicaba que estos últimos no debían ser decisivos para su calificación final.
b) Los horarios asignados a práctica en la asignatura no permitieron una discusión o corrección exhaustiva de estos problemas en clase, dado que hubieran consumido parte del tiempo reservado a la adquisición de destrezas técnicas a través de ejercicios canónicos.
c) Las correcciones individuales desgastaron el trabajo docente y los alumnos no aprovecharon las distintas situaciones problemáticas presentadas.

3.- USO DE HERRAMIENTAS ALTERNATIVAS

Esta fase está en realidad en proceso aún, pero básicamente se trata de incorporar el uso de Internet para agilizar el proceso, por ejemplo instalando en páginas web los enunciados de los problemas, así como problemas resueltos ilustrativos, y posibilitando la consulta por correo electrónico del material propuesto como problemas de modelización.
La experiencia indica, sin embargo, que esta herramienta sólo puede cumplir un rol complementario, en todos los casos precedida o continuada por sesiones presenciales. Aparentemente la mediatización del proceso de enseñanza-aprendizaje provoca inseguridades y cohibiciones en una audiencia que todavía no ha completado el ciclo de

abstracción de conceptos.

4.- INSTITUCIONALIZACIÓN DE UN TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA ALUMNOS

Las conclusiones del punto 2.- más arriba nos convencieron de que es necesario conferir al taller de resolución de problemas un grado de formalidad. La manera de lograrlo es plantearlos dentro de un espacio propio, complementario, no sustitutivo, del que ocupa la adquisición de técnicas abstractas, que en todo momento acordamos en que son un *sine qua non* para la práctica de la modelización. Una alternativa que contemplamos originalmente —y que de hecho no descartamos— fue la incorporación de parte de nuestro material (problemas de modelización) a las materias de Introducción a la Ingeniería de las diversas carreras. Llevamos esta idea a las distintas Escuelas, percibiendo en ellas un interés significativo con respecto a la utilidad de la propuesta, aunque quizá no la convicción respecto a la necesidad de su implementación inmediata.
En la Escuela de Ingeniería Industrial se produjo una contrapropuesta, en cuya implementación trabajamos en este momento: plantear el curso como una materia optativa, que otorgaría créditos para la carrera. Las características de la misma podrían ser resumidas de este modo:
· Se pensó en un curso para alumnos con conocimientos básicos de matemática.
· Producción de modelizaciones para los requerimientos de Ingeniería Industrial (cubriendo tópicos de ingeniería con una mirada generalista, característica de la carrera).
· Funcionaría tipo taller. La metodología sería la misma que la utilizada para el curso de docentes. (Trabajo en el aula, planteo, corrección grupal con análisis de cada situación, producción de nuevos problemas).

OBSERVACIONES FINALES

1 Es fundamental tener un espacio para el trabajo en grupo en cuanto a planteo, resolución y devolución del problema.
2 La cantidad de situaciones distintas a resolver, no es tan importante como el análisis de los distintos enfoques de resolución que pueda tener una misma situación problemática. El verdadero aprendizaje emerge a través de este proceso de análisis.
3 Entendemos la evaluación como un proceso continuo y de retroalimentación para el aprendizaje.
4 Podemos afirmar que las representaciones mentales previas que tienen los estudiantes sobre los conceptos que entran en juego en la resolución de problemas se manifiestan de manera natural en su intento de organizar y explicar la estrategia de resolución. Como trabajo en prospectiva creemos que es posible rediseñar el contenido de matemáticas para ingeniería creando un espacio de taller de resolución de problemas que aportaría soluciones a las problemáticas que fundamentaron este trabajo y que especialmente darían un mayor sentido al estudio de conceptos teóricos y desarrollo de teoremas.

BIBLIOGRAFÍA

- ANIDO,M. ; MIYARA, A.; PIRAINO,M.(2007) La construcción de modelos matemáticos en el Análisis Matemático en una variable”. En: Biblioteca del Departamento

de Matemática, Escuela de Formación Básica, FCEIA, UNR.
- ARTIGUE, M. – DOUADY, R. – MORENO, L. – GÓMEZ, P.(1995): "Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas"; Grupo Editorial Iberoamérica; Bogotá.
- EDWARDS, C.H., PENNEY, D.E. (1997) Cálculo Diferencial e Integral, Vol. 1 y 2, Prentice Hall Hispanoamericana S.A., 4ta. Edición, México.
- MIYARA, A. J. (2007) Problemas de Ecuaciones Diferenciales. En: Biblioteca del Departamento de Matemática, Escuela de Formación Básica, FCEIA, UNR.
- MIYARA, F.; MIYARA, A.; PIRAINO, M. (2007) Análisis Matemático I, Problemas complementarios. En: Biblioteca del Departamento de Matemática, Escuela de Formación Básica, FCEIA, UNR.
- POLYA, G. (1965) Cómo plantear y resolver problemas. México: Editorial Trillas.
- RESNICK, R.; HALLIDAY, D; KRANE, K.(2005) Física, Vol. 1, 5ª Edición ,Continental.
- SCHOENFELD, A. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. Buenos Aires: Olimpíada Matemática Argentina.
- STEWART, J.(2002) Cálculo, International Thomson Editores, 4ta. Edición, México.
- THOMAS,G.B, JR (2006) Cálculo Una y Varias Variables, Vols. I y II, 11ª Edición, Addison-Wesley .