

Planificación de  
**Álgebra lineal**



Código/s: R-211

**Identificación y características del Espacio Curricular**

Carrera/s:	Licenciatura en Ciencias de la Computación		
Plan de Estudios:	2010, TO2024	Carácter:	Obligatoria
Bloque/Campo:		Área:	Ciencias Básicas Generales y Específicas
Régimen de cursado:	Cuatrimestral		
Cuatrimestre:	3º [LCC], 3º [LCC]		
Carga horaria:	105 hs. / 7 hs. semanales	Formato curricular:	Asignatura
Escuela:	Ciencias Exactas y Naturales	Departamento:	Matemática
Docente responsable:	ESCALANTE, Mariana		

**Programa Sintético**

Espacios vectoriales. Subespacios. Independencia lineal. Bases y dimensión. Espacios vectoriales con producto interno. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Bases ortonormales. Proyección ortogonal. Transformaciones lineales. Espacios vectoriales isomorfos. Autovalores y autovectores de una matriz. Matrices diagonalizables. Matrices ortogonales y unitarias. El teorema de la descomposición espectral. Matrices definidas positivas. Equivalencias para el caso simétrico. Matrices semidefinidas positivas.

**Espacios Curriculares Relacionados**

Previos Aprobados:	R-121 - Algebra y Geometría Analítica II
Simultaneos Recomendados:	
Posteriores:	R-221 - Complementos de Matemática I, R-224 - Métodos Numéricos, R-423 - Complementos de Matemática II

**Vigencia desde 2024**

\_\_\_\_\_  
Firma Profesor

\_\_\_\_\_  
Fecha

\_\_\_\_\_  
Firma Aprob. Escuela

\_\_\_\_\_  
Fecha

Con el aval del Consejo Asesor:

## Fundamentación

Álgebra Lineal se ubica en el segundo año de la carrera. Es una materia troncal para la formación general de licenciado en ciencias de la computación ya que brinda las herramientas matemáticas desde el ámbito de lo discreto y el manejo de estructuras de datos como matrices y vectores, y operaodres lineales.

Se presenta en ella una introducción a la estructura de espacios vectoriales, transformaciones lineales y matrices. Se introduce al alumno en el manejo de distintos espacios con distintos productos internos, que dan lugar a una norma sobre los mismos. Se analizan familias de matrices con estructuras particulares como las unitarias, las hermitianas, las normales. Se presentan herramientas básicas del cálculo de autovalores y autovectores de matrices y propiedades de los mismos en subfamilias particulares de matrices con entradas reales y complejas.

## Resultados del aprendizaje

Al finalizar el cursado los/las estudiantes serán capaces de:

RA1 Conocer y aplicar las propiedades básicas del álgebra matricial y los métodos de eliminación y descomposición de matrices a la resolución de diversas situaciones problemáticas.
RA2 Interpretar, plantear y resolver problemas aplicando los conceptos de espacios vectoriales, transformaciones lineales, dualidad, autovalores y autovectores de matrices
RA3 Demostrar hábitos de trabajo individual y en equipo
RA4 Asimilar y manipular conceptos básicos sobre las operaciones de matrices en bloques.
RA5 Interpretar situaciones problemáticas sencillas y poder modelizarlas utilizando sistemas de ecuaciones lineales

## Competencias / Ejes transversales y Resultados del Aprendizaje

Competencia/Eje transversal al que tributa	Nivel	Resultados del Aprendizaje
CGT0-Conocimiento, interpretación y utilización de técnicas y herramientas matemáticas y de procesos de modelización, para su aplicación a problemas de informática	Bajo	RA1, RA2, RA4, RA5
CGS1-Fundamentos para el desempeño en equipos de trabajo	Bajo	RA3
CGS2-Fundamentos para la comunicación efectiva	Bajo	RA3

## Programa Analítico

En sintonía con las expectativas de logro, resultados de aprendizaje y ejes transversales señalados, consignar los contenidos que se prevén desarrollar en el espacio curricular. Indicarlos mediante el siguiente formato:

Unidad 1. ELIMINACIÓN GAUSSIANA

1.1. Introducción.

1.1.1 Ejemplos.

1.1.2 Notación matricial

1.2. Factorización triangular.

1.2.1. Matrices elementales.

1.2.2 Matrices Inversas y transpuestas.

Unidad 2. ESPACIOS VECTORIALES

- 2.1. Espacio vectorial.
  - 2.1.1. Definición y ejemplos. Subespacios: definición y caracterización.
  - 2.1.2. Solución de sistemas de m ecuaciones con n incógnitas.
  - 2.1.3. Independencia lineal. Bases y dimensión.
  - 2.1.4. Los cuatro subespacios fundamentales.
  - 2.1.5. Ortogonalidad de vectores y subespacios.
  - 2.1.6. Pares de subespacios ortogonales
- 2.2 Espacios vectoriales con producto interno.
  - 2.2.1 Producto interno. Ejemplos. Norma de un vector. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Desigualdad triangular. Ángulo entre dos vectores.
  - 2.2.3 Conjunto ortogonal. Extensión del teorema de Pitágoras . Conjunto ortonormal. Ortogonalidad e independencia lineal. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Bases ortonormales.
  - 2.2.4 Ortogonalidad entre dos subespacios. Complemento ortogonal de un subespacio. Teorema de descomposición ortogonal. Proyección ortogonal.
- Unidad 3. TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES
  - 3.1. Transformaciones lineales.
    - 3.1.1 Definición. Espacio nulo y recorrido de una transformación lineal.
    - 3.1.2 Monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos. Propiedades.
  - 3.2 Transformaciones lineales en espacios de dimensión finita.
    - 3.2.1 Transformaciones lineales definidas por matrices. Propiedades.
  - 3.3. Dualidad.
    - 3.3.1. Espacio dual. Base dual de una base dada.
    - 3.3.2 Isomorfismo canónico entre un espacio vectorial y su segundo dual.
    - 3.3.3. Dualidad en espacios con producto interno.
- Unidad 4. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES
  - 4.1. Autovalores y autovectores
    - 4.1.1. Definición y cálculo. Polinomio característico de una matriz. Multiplicidad algebraica de un autovalor. Autoespacio correspondiente a un autovalor.
    - 4.1.2. Ortogonalidad de autovectores.
    - 4.1.3. Independencia lineal de un conjunto de autovectores.
    - 4.1.4 El caso complejo: matrices hermitianas y unitarias. El teorema de la descomposición espectral
  - 4.2 Transformaciones de semejanza y formas triangulares
    - 4.2.1 Formas triangulares: Lema de Schur.
    - 4.2.2 Matrices normales y defectuosas. La forma de Jordan.
  - 4.3 Matrices definidas positivas.
    - 4.3.1 Definición. Equivalencias para el caso simétrico. Propiedades.
    - 4.3.2 Matrices semidefinidas positivas. Definición. Propiedades
    - 4.3.3 Relación con formas cuadráticas.

## Modalidades de enseñanza

La actividad curricular combina clases teóricas dictadas por el docente responsable con clases prácticas en las que cobra mayor protagonismo el alumno.

En las clases teóricas se pretende una permanente interacción con los alumnos en la que el docente a cargo destaca la importancia de cada tema, presenta definiciones, enuncia y/o prueba propiedades relevantes y analiza ejemplos simples que faciliten la comprensión y conceptualización.

En la instancia práctica los alumnos, trabajan en grupos sobre una guía de ejercicios y problemas, con el soporte de los docentes quienes interaccionan constantemente con cada grupo fomentando la discusión entre sus miembros, el trabajo grupal y reorientando sus iniciativas.

Asimismo los docentes fijan una hora semanal de consulta en la que aclaran aquellos conceptos y problemas en los que los alumnos hayan encontrado dificultades. El lugar y horario de las mismas se publican en la página de

Comunidades de la asignatura y en la lista de correo electrónico euclides.

De esta manera se busca construir conocimientos bien estructurados, en un contexto motivador, sobre la base de la actividad del alumno en interacción con otros y abordando problemas debidamente motivados.

En este contexto el docente adopta el rol de facilitador, reforzando la confianza de los alumnos en su capacidad de aprendizaje y resolución de problemas; pero también actúa de observador y evaluador, detectando y ayudando a superar dificultades, proporcionando de este modo retroalimentación sobre el desarrollo del trabajo grupal.

Se desarrollan clases de tipo teórico-prácticas. En las clases de teoría de manera alternada se exponen algunos temas en el pizarrón y para otros temas se realiza una lectura conjunta de textos suministrados por el equipo docente.

En las clases prácticas se plantea el desafío de la resolución de problemas y ejercicios de manera socializada en el grupo-clase y de manera individual o en pequeños grupos.

## Recursos

Detallar los recursos utilizados en el desarrollo del espacio curricular: Espacios físicos (aula, laboratorio, equipamiento informático, etc.), Recursos tecnológicos de apoyo (proyector multimedia, software, equipo de sonido, aulas virtuales, plataforma educativa, etc.), Transporte, seguros, elementos de protección para desarrollar actividades en laboratorios, empresas, fábricas, etc.

Mencionar, si lo considera conveniente, recursos didácticos especiales utilizados. Si el Departamento / Carrera / Espacio Curricular / Docente tiene algún sitio web / plataforma de referencia, indicarlo.

En esta asignatura se trabaja principalmente con apuntes de cátedra y bibliografía recomendada. En algunas clases teórico-prácticas se realizan exposiciones orales utilizando los recursos de las aulas: pizarrón, fibrón y eventualmente para algunas exposiciones especiales se utiliza una pc con cañón proyector.

La cátedra mantiene fluida comunicación con los alumnos a través de la página de Comunidades UNR, a través del mismo se envían los archivos digitales de los apuntes y trabajos prácticos, como así también toda información referente a horarios y lugar de consulta, fechas de parciales y resultados de las evaluaciones. Se le asignan tareas que pueden entregar digitalmente y enviar consultas a los foros de discusión.

## Actividades de Formación Práctica

Nº	Título	Descripción
1	Eliminación Gaussiana. Factorización LU	Los ejercicios son de complejidad creciente. En un primer grupo se presentan sistemas de ecuaciones lineales con matrices de tamaño pequeño con el fin de interpretar matricialmente los pasos de la eliminación gaussiana (la cual comenzó a ser desarrollada en una materia previa llamada Álgebra y Geometría Analítica II). Se presentan también ejercicios que culminan con la factorización LU y sus propiedades generales
2	Espacios Vectoriales	Los ejercicios son de complejidad creciente y acorde a los temas desarrollados en clases teóricas. Se presenta un conjunto de ejercicios donde se pretende determinar si ciertos conjuntos son o no espacios vectoriales con distintas operaciones definidas en ellos. También se incluyen ejercicios más teóricos con propiedades generales de espacios vectoriales. Finalmente, se presentan ejercicios sobre lineal dependencia en espacios más generales. Espacios fundamentales de matrices y subespacios generados.

3	Espacio vectorial con producto interno	Los ejercicios son de complejidad creciente. Se analizan si determinadas operaciones definen producto interno. Espacios de funciones o de polinomios. Ortogonalidad de vectores en distintos espacios. Base y dimensión de espacios ortogonales. Norma generada por un producto interno. Ejercicios donde se pretende que se demuestren propiedades generales sencillas.
4	Proceso de Gram-Schmidt. Proyecciones	Los ejercicios son de complejidad creciente. Se analiza el procedimiento sobre distintos conjuntos de vectores en distintos espacios vectoriales con producto interno. Matrices ortogonales y proyecciones.
5	Transformaciones lineales	Los ejercicios son de complejidad creciente. Se analizan distintas funciones y se analiza si las mismas son transformaciones lineales. Hallar matrices de las transformaciones fijadas las bases de los espacios vectoriales en los que esta definida. Análisis de si esta definen isomorfismo, epimorfismo o monomorfismo.
6	Dualidad	Los ejercicios consisten en fijar los conceptos presentados en las clases teóricas. Algunos de los ejercicios son más teóricos que en otro tipo de práctica debido al tema de esta práctica.
7	Autovalores y autovectores	Los ejercicios son de complejidad creciente. Se pretende que el alumno se familiarice con los conceptos presentados en las clases teóricas hallando autovalores y conjunto de autovectores asociados a matrices de tamaño pequeño. Se pretende que relacionen los conceptos con las propiedades de ser definidas positivas o semidefinidas positivas en familias particulares de matrices.

## Evaluación

Se combinan actividades de evaluación sumativa con actividades de evaluación formativa y continua. Esta última está integrada a las actividades de enseñanza y aprendizaje y le permite al alumno conocer sus logros y dificultades y al docente, de ser necesario, reorientar la enseñanza de manera rápida y eficaz.

En cuanto a las actividades de evaluación sumativa:

Se realizan dos evaluaciones parciales de tipo teórico-práctico-conceptual, con posibilidad de un recuperatorio que sustituya la nota del parcial no aprobado. Comprenden el manejo de definiciones, propiedades, teoremas y la resolución de problemas y ejercicios.

Parcial n°1: unidades 1, 2 y 3.

Parcial n° 2: unidad 4 y parte de la unidad 5.

1. El alumno que apruebe los parciales o el recuperatorio correspondiente con una nota superior a 4 y un promedio de los dos parciales superior a 6 alcanza la condición de alumno regular. Para acreditar la aprobación de la materia debe realizar en las mesas de exámenes una evaluación práctica que debe aprobar con nota superior a 6 y un examen sobre fundamentos teóricos y/o una exposición de un tema especial que esté fuertemente relacionado con aplicaciones de los conocimientos adquiridos y aplicación práctica de los mismos.

2. El alumno que apruebe los parciales o el recuperatorio correspondiente con una nota superior a 7 y un promedio de los dos parciales superior a 8 alcanza la condición de alumno regular (promovido), teniendo la posibilidad de un examen práctico que consiste sólo en los temas que no han sido evaluados en los dos exámenes parciales. Si lo aprueba, debe realizar un examen teórico globalizador y así acredita la materia, junto con la exposición de un tema especial que esté fuertemente relacionado con aplicaciones de los conocimientos adquiridos y aplicación práctica de los mismos.

3. El alumno que no aprueba los parciales y/o recuperatorio queda en condición de alumno libre. El examen para el alumno con condición libre consta de una primera instancia escrita de práctica, que deberá aprobar para acceder a la segunda instancia sobre fundamentos teóricos y un coloquio final globalizador, con la

exposición final del tema especial mencionado para las otras condiciones. La aprobación de ambas instancias implica la acreditación de la asignatura.

<b>Resultado de Aprendizaje</b>	<b>Actividades/Modalidad de Enseñanza</b>	<b>Modalidad de Evaluación</b>
RA1	Presentación de los conceptos básicos y ejemplos en las clases teóricas y prácticas.	Durante las clases prácticas los alumnos, previo trabajo grupal o individual, presentan sus resoluciones a la clase en el pizarrón. Evaluación continua y luego en forma individual, en examen parcial.
RA2	Se presentan enunciados distintos, que necesitan un proceso de interpretación, siendo de complejidad creciente a lo largo del cursado, fomentando la interpretación de distintos problemas relacionados	Además de la evaluación continua durante el trabajo en aula, se pide entrega de ejercicios seleccionados cada dos semanas sobre cada uno de los temas presentados, para corregir la interpretación y la escritura matemática de los problemas planteados.
RA3	Durante las clases prácticas se propone el trabajo en pequeños grupos, fomentando la discusión de ideas entre ellos.	Evaluación permanente de la interacción en el grupo y luego, en los exámenes parciales, del trabajo individual.
RA4	Desarrollo de los conceptos por parte de los docentes en clases teóricas/prácticas.	Evaluación de la aplicación de los mismos en las evaluaciones parciales.
RA5	Desarrollo de los conceptos por parte de los docentes en clases teóricas/prácticas. Propuesta de distintos ejemplos de aplicaciones y propuesta a los estudiantes de búsqueda de nuevas situaciones como tarea.	Exposición de sus hallazgos en breves presentaciones orales durante el cursado de la asignatura

#### **Bibliografía básica**

<b>Autores (Apellido, Inicial nombre)</b>	<b>Año de edición</b>	<b>Título de la obra</b>	<b>Editorial o Revista</b>	<b>Ejemplares disponibles o sitio web</b>
STRANG, G	2019	Linear Algebra and Learning from Data (1era edición)	Wellesley-Cambridge Press	<a href="https://math.mit.edu/~gs/">https://math.mit.edu/~gs/</a>
HOFFMAN, K. - KUNZE, R.	1991	Linear Algebra	Prentice-Hall	1

#### **Bibliografía complementaria**

<b>Autores (Apellido, Inicial nombre)</b>	<b>Año de edición</b>	<b>Título de la obra</b>	<b>Editorial o Revista</b>	<b>Ejemplares disponibles o sitio web</b>
---	-----------------------	--------------------------	----------------------------	---

LARROTONDA, A.R	1977	Algebra lineal y geometría	Eudeba	1
HERSTEIN, I.N.	1979	Algebra Moderna	Trillas	2
GROSSMAN, S.I.	2019	Algebra Lineal	Mc. Graw Hill	1

### Distribución de la carga horaria

#### Presenciales

Teóricas		55 Hs.
Prácticas	Formación Experimental	
	Resolución de Problemas vinculados a la Profesión	
	Resolución de Problemas y Ejercicios	45 Hs.
	Actividades de Proyecto y Diseño	
	Formación en la Práctica Profesional	
Evaluaciones		5 Hs.
	<b>Total</b>	<b>105 Hs.</b>

#### Dedicadas por el alumno fuera de clase

	Preparación Teórica	60 Hs.
	Preparación Práctica	35 Hs.
	Elaboración y redacción de informes, trabajos, presentaciones, etc.	10 Hs.
	<b>Total</b>	<b>105 Hs.</b>

### Cronograma de actividades

Semana	Unidad	Tema	Actividad
1	1	Eliminación gaussiana. Introducción.. Ejemplos. Notación matricial. Facotrización LU.	Clases Teórico Prácticas. Práctica 1 (primera parte)
2	1	Factorización triangular. Matrices elementales. Matrices Inversas y transpuestas. Gauss-Jordan. Resolución de sistemas simultáneos.	Clases Teórico Prácticas. Práctica 1 (fin primera parte. Comienzo segunda parte)
3	2	Espacios vectoriales Definición y ejemplos. Subespacios: definición y caracterización.	Clases Teórico Prácticas Practica 1 (segunda parte)
4	2	Solución de sistemas de m ecuaciones conn incógnitas. Independencia lineal. Bases y dimensión. Los cuatro subespacios fundamentales. Ortogonalidad de vectores y subespacios.	Clases Teórico Prácticas. Práctica 2 (primera parte)
5	2	Pares de subespacios y producto de matrices. Espacios vectoriales con producto interno. Producto interno. Ejemplos. Norma de un vector. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Desigualdad triangular. Ángulo entre dos vectores	Clases Teórico Prácticas. Práctica 2 (fin primera parte, comienzo segunda parte)

6	2	Conjunto ortogonal. Extensión del teorema de Pitágoras. Conjunto ortonormal. Ortogonalidad e independencia lineal. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Bases ortonormales. Ortogonalidad entre dos subespacios. Complemento ortogonal de un subespacio	Clases Teórico Prácticas. Práctica 2 (fin segunda parte) Comienzo practica 3.
7	3	Transformaciones lineales. Definición. Espacio nulo y recorrido de una transformación lineal. Monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos. Propiedades.	Clases Teórico Prácticas. Fin práctica 3. Primer examen parcial.
8	3	Transformaciones lineales en espacios de dimensión finita. Transformaciones lineales definidas por matrices. Propiedades.	Clases Teórico Prácticas. Práctica 4.
9	4	Dualidad. Espacio dual. Base dual de una base dada. Isomorfismo canónico entre un espacio vectorial y su segundo dual. Dualidad en espacios con producto interno.	Clases Teórico Prácticas. Práctica 5.
10	4	Autovalores y autovectores Definición y cálculo. Polinomio característico de una matriz (y de una transformación lineal). Multiplicidad algebraica de un autovalor. Autoespacio correspondiente a un autovalor. Ortogonalidad	Clases Teórico Prácticas. Práctica Dualidad
11	4	Independencia lineal de un conjunto de autovectores. El caso complejo: matrices hermitianas y unitarias.	Clases Teórico Prácticas. Práctica 6
12	4	El teorema de la descomposición espectral. Transformaciones de semejanza y formas triangulares	Clases Teórico Prácticas. Práctica 6
13	4	Formas triangulares: Lema de Schur. Matrices normales y defectuosas. La forma de Jordan.	Clases Teórico Prácticas. Segundo examen parcial
14	4	Matrices definidas positivas. Definición. Equivalencias para el caso simétrico. Propiedades..	Clases Teórico Prácticas. Práctica 6 (continuación)
15	4	Matrices semidefinidas positivas. Definición. Propiedades Relación con formas cuadráticas. Repaso final.	Clases Teórico Prácticas. Ejercicios adicionales. Recuperatorio exámenes parciales.