UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

EXAMEN INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA - 07/12/2024

Nombre y apellido:____

Comisión:____

REGULARES: Ejercicios 1, 2, 3 y 4
LIBRES: Ejercicios 1, 2, 3, 4 y 5

TEMA 1

1) Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) $\left(x+\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + 3 \quad \forall\, x \,\epsilon\, R$

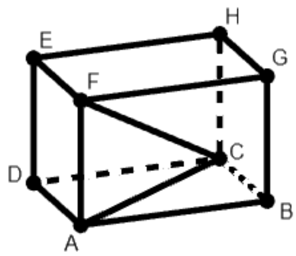
b) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot |-2x+3| - 1 \leq -7 \;\Rightarrow\; x \,\epsilon\, (-\infty, -\frac{9}{2}] \cup [\frac{15}{2}, \infty)$

c) $tg(x) + ctg(x) = sec(x) \cdot\, cosec(x)$

d) $\{x \in Z / -2 \leq x \leq 5\} = [-2; 5]$

2) El área de un rectángulo viene dada por la expresión $\frac{x^2-6x+9}{x-3}$ y su base por la expresión $\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}$, donde $x > 3$. Hallar la altura del rectángulo.
Si corresponde, indicar otras restricciones de la variable. En caso de que no haya, explicar por qué.

3) Considerar un paralelepípedo recto de base rectangular de 1,2 dm de largo; 50 mm de ancho y 5 cm de altura.



a) Calcular la amplitud del ángulo $A\hat{C}F$ determinado por una de las diagonales del paralelepípedo y la diagonal de su base.
b) Calcular el área total en cm^2 y el volumen del paralelepído en dm^3.

4) Plantear y resolver un sistema de ecuaciones que permita dar respuesta al siguiente problema: Se dispone de dos lingotes de aluminio, uno con un 80% de pureza y el otro con un 95% de pureza. ¿Cuánto se debe fundir de cada uno para obtener un lingote de aluminio de 5 kilos con un 86% de pureza?

5) **a)** Resolver: $(3x-2)^2 = (2x+1)(2x-1) - 2$

b) Con un descuento de 60%, por la compra de cierto artículo, se pagaron $3600. ¿Cuál era el precio inicial del artículo? Mostrar el procedimiento de cálculo.

c) Calcular, mostrando los pasos de la resolución: $\mathbf{1 - \frac{3}{2} \,.\, 4 - \frac{1}{3} \,.\, \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)}$

d) Sabiendo que $sec(x) = 4$ y que $x \in IV_C$ hallar en forma exacta $sen(x)$ y $tg(x)$.

Resolución:

1)

a) $\left(x+\sqrt{3}\right)^2 = x^2+3 \quad \forall\, x \epsilon R.$

FALSO. Esta afirmación no es cierta para todo x. Por ejemplo, si $x = 1$,

$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 1+2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2 = 1+2\sqrt{3}+3 = 4+2\sqrt{3}$

$1^2+3 = 1+3 = 4$

Por lo tanto, $\left(1+\sqrt{3}\right)^2 \neq 1^2+3$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot|-2x+3|-1 \leq -7 \;\Rightarrow\; x\,\epsilon\,(-\infty,-\frac{9}{2}]\cup[\frac{15}{2},\infty)$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot|-2x+3|-1 \leq -7$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot|-2x+3| \leq -7+1$$

$$|-2x+3| \geq -6 : \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|-2x+3| \geq 12$$

$-2x+3 \geq 12$	ó	$-2x+3 \leq -12$
$-2x \geq 12-3$	ó	$-2x \leq -12-3$
$-2x \geq 9$	ó	$-2x \leq -15$
$x \leq -\frac{9}{2}$	ó	$x \geq \frac{15}{2}$

Por lo tanto, $x\,\epsilon\,(-\infty,-\frac{9}{2}]\cup[\frac{15}{2},\infty)$. **VERDADERO.**

c) $tg(x)+ctg(x) = sec(x)\cdot\; cosec(x)$

$$tg(x)+ctg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}+\frac{\cos(x)}{sen(x)} = \frac{sen^2(x)+\cos^2(x)}{\cos(x).sen(x)} = \frac{1}{\cos(x).sen(x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos(x)}.\frac{1}{sen(x)} = sec(x)\cdot\; cosec(x)$$

VERDADERO.

d) $\{x \in Z / -2 \leq x \leq 5\} = [-2; 5]$

FALSO. Por definición de igualdad de conjuntos, sabemos que dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos.

El conjunto $\{x \in Z / -2 \leq x \leq 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, está formado por todos los números **enteros** mayores o iguales a -2 y menores o iguales a 5.

El conjunto $[-2; 5] = \{x \in R / -2 \leq x \leq 5\}$, es un intervalo de números reales, está formado por todos los números **reales** mayores o iguales a -2 y menores o iguales a 5.

Luego, por ejemplo, $0{,}5 \in [-2; 5]$, pero $0{,}5 \notin \{x \in Z / -2 \leq x \leq 5\}$, por lo tanto $\{x \in Z / -2 \leq x \leq 5\} \neq [-2; 5]$.

2) El área de un rectángulo de base b y altura h es $b.h$. Luego:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9} \, .h$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} : \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9} = h$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} \, . \, \frac{x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} = h$$

$$\frac{(x - 3)^2}{x - 3} \, . \, \frac{x^2 + 3x + 9}{(x - 3).(x^2 + 3x + 9)} = h$$

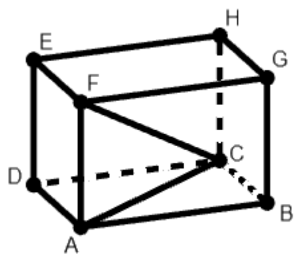
$$h = 1$$

No hay restricciones de la variable, ya que los denominadores se anulan únicamente cuando $x = 3$, pero se indica en el enunciado que $x > 3$.

3) Largo: $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{FG} = \overline{EH} = 1{,}2\ dm = 12\ cm$

Ancho: $\overline{DA} = \overline{BC} = \overline{EF} = \overline{GH} = 50\ mm = 5\ cm$

Alto: $\overline{DE} = \overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = 5\ cm$



a) El triángulo ABC es rectángulo en $\hat{B}$ por ser ABCD un rectángulo. Luego, por teorema de Pitágoras:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{AC}^2 = (12\ cm)^2 + (5\ cm)^2$

$\overline{AC}^2 = 144\ cm^2 + 25\ cm^2$

$\overline{AC}^2 = 169\ cm^2$

$\overline{AC} = \sqrt{169\ cm^2}$

$\overline{AC} = 13\ cm$

El triángulo ACF es rectángulo en $\hat{A}$ por ser un paralelepípedo recto. Entonces:

$$tg\left(A\hat{C}F\right) = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}$$

$$tg\left(A\hat{C}F\right) = \frac{5}{13}$$

$$A\hat{C}F = tg^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$A\hat{C}F \cong 21{,}03°$$

b) Área total: $4.(12\ cm\ .\ 5\ cm) + 2.(5\ cm\ .\ 5\ cm) = 240\ cm^2 + 50\ cm^2 = 290\ cm^2$

Volumen: $12\ cm\ .\ 5\ cm\ .\ 5\ cm = 300\ cm^3 = 0{,}3\ dm^3$

4) x: cantidad a fundir (en kg) del lingote al 80%

y: cantidad a fundir (en kg) del lingote al 95%

$$\begin{cases} x + y = 5 & (1) \\ 0{,}8\ x + 0{,}95\ y = 0{,}86\ .\ 5 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1), despejamos y:

$$y = 5 - x$$

Ahora sustituimos y en la ecuación (2):

$$0{,}8\ x + 0{,}95.(5 - x) = 4{,}3$$

$$0{,}8\ x + 4{,}75 - 0{,}95\ x = 4{,}3$$

$$-0{,}15\ x = 4{,}3 - 4{,}75$$

$$x = -0{,}45 : (-0{,}15)$$

$$x = 3$$

Con lo cual, $y = 5 - x = 5 - 3 = 2$.

Rta.: se deben fundir 3 kg del lingote al 80% y 2 kg del lingote al 95%.

5)

a) $\underbrace{(3x-2)^2}_{Cuadrado\ de\ un\ binomio} = (2x+1)(2x-1)-2$

$\underbrace{(3x)^2 + 2.3x.(-2) + (-2)^2}_{Trinomio\ cuadrado\ perfecto} = \underbrace{(2x)^2 - 1^2}_{Diferencia\ de\ cuadrados} - 2$

$9x^2 - 12x + 4 = 4x^2 - 1 - 2$

$9x^2 - 12x + 4 - 4x^2 + 1 + 2 = 0$

$5x^2 - 12x + 7 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.5.7}}{2.5} = \frac{12 \pm \sqrt{144-140}}{10} = \frac{12 \pm \sqrt{4}}{10} = \frac{12 \pm 2}{10}$$

$$x_1 = \frac{12+2}{10} \qquad x_2 = \frac{12-2}{10}$$

$$x_1 = \frac{14}{10} \qquad x_2 = \frac{10}{10}$$

$$x_1 = \frac{7}{5} \qquad x_2 = 1$$

$$S = \left\{\frac{7}{5}, 1\right\}$$

b) x: precio inicial del artículo
Si se hizo un descuento del 60%, lo que se pagó es el 40% del precio inicial. Es decir, el 40% de x es \$3600.

$$\frac{40}{100}.x = \$3600$$

$$0{,}4.x = \$3600$$

$$x = \$3600 : 0{,}4$$

$$x = \$9000$$

Rta.: el precio inicial del artículo es \$9000

c)

$$1 - \frac{3}{2}.4 - \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) =$$

$$= 1 - 6 - \frac{1}{3}.\left(\frac{2-1}{10}\right) =$$

$$= 1 - 6 - \frac{1}{3}.\frac{1}{10} =$$

$$= -5 - \frac{1}{30} =$$

$$= \frac{-150-1}{30} =$$

$$= \frac{-151}{30}$$

d) Sabiendo que $sec(x) = 4$ y que $x \in IV_C$ hallar en forma exacta $sen(x)$ y $tg(x)$.

$$sec(x) = 4 \Longrightarrow \frac{1}{\cos(x)} = 4 \Longrightarrow \cos(x) = \frac{1}{4}$$

Por identidad pitagórica:

$$cos^2(x) + sen^2(x) = 1$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + sen^2(x) = 1$$

$$\frac{1}{16} + sen^2(x) = 1$$

$$sen^2(x) = 1 - \frac{1}{16}$$

$$sen^2(x) = \frac{15}{16}$$

$$sen(x) = \pm\sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$sen(x) = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como $x \in IV_C$, entonces $sen(x) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$$