UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

EXAMEN INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA - 07/12/2024

Nombre y apellido:____________________________________

Comisión:____________________________________

REGULARES: Ejercicios 1, 2, 3 y 4
LIBRES: Ejercicios 1, 2, 3, 4 y 5

TEMA 2

1) Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) $(\sqrt{x}+3)^2 = x+9 \quad \forall\, x \in R$

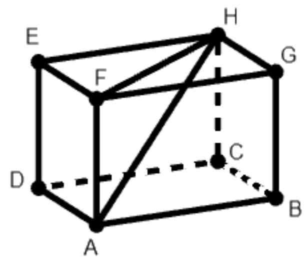
b) $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot|-2x+7|+1 < -3 \Rightarrow x \in (-\infty,-\frac{5}{2}) \cup (\frac{19}{2},\infty)$

c) $\sec^2(\mathrm{x})+\mathrm{cosec}^2(\mathrm{x}) = \sec^2(\mathrm{x}).\mathrm{cosec}^2(\mathrm{x})$

d) $\{x \in Z / -1 < x \leq 7\} = (-1, 7]$

2) El área de un rectángulo viene dada por la expresión $\frac{x^2-8x+16}{x-4}$ y su base por la expresión $\frac{x^3-64}{x^2+4x+16}$, donde $x > 4$. Hallar la altura del rectángulo.
Si corresponde, indicar otras restricciones de la variable. En caso de que no haya, explicar por qué.

3) Considerar un paralelepípedo recto de base rectangular de 12 cm de largo; 0,5 dm de ancho y 50 mm de altura.



a) Calcular la amplitud del ángulo $A\widehat{H}F$ determinado por una de las diagonales del paralelepípedo y la diagonal de su base.

b) Calcular el área total en cm^2 y el volumen del paralelepído en dm^3.

4) Plantear y resolver un sistema de ecuaciones que permita dar respuesta al siguiente problema: Se desea obtener una mezcla de 200 litros de alcohol al 80% a partir de dos alcoholes disponibles: uno al 70% y otro al 95%. ¿Cuántos litros de cada tipo de alcohol deben mezclarse para lograr la mezcla deseada?

5) **a)** Resolver: $(2x-3)^2 + x^2 = (3x+1)(3x-1) - 6$

b) Con un descuento de 15%, por la compra de cierto artículo, se pagaron $204000. ¿Cuál era el precio inicial del artículo? Mostrar el procedimiento de cálculo.

c) Calcular, mostrando los pasos de la resolución: $\mathbf{1} - \left[\frac{3}{2}\,.\,\mathbf{5} - \frac{1}{2}\,.\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\right)\right]$

d) Sabiendo que $cosec(x) = 2$ y que $x \in II_C$ hallar en forma exacta $cos(x)$ y $tg(x)$.

Resolución:

1)

a) $\left(\sqrt{x}+3\right)^2 = x+9 \quad \forall\, x \in R.$

FALSO. Esta afirmación no es cierta para todo x. Por ejemplo, si $x = 1$,

$\left(\sqrt{1}+3\right)^2 = (1+3)^2 = 4^2 = 16$

$1+3 = 4$

Por lo tanto, $\left(\sqrt{1}+3\right)^2 \neq 1+3$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot |-2x+7| + 1 < -3 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (\frac{19}{2}, \infty)$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot |-2x+7| + 1 < -3$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot |-2x+7| < -3-1$$

$$|-2x+7| > -4 : \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$|-2x+7| > 12$$

$-2x+7 > 12$	ó	$-2x+7 < -12$
$-2x > 12-7$	ó	$-2x < -12-7$
$-2x > 5$	ó	$-2x < -19$
$x < -\frac{5}{2}$	ó	$x > \frac{19}{2}$

Por lo tanto, $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{19}{2}, \infty\right)$. **VERDADERO.**

c) $sec^2(x) + cosec^2(x) = sec^2(x). cosec^2(x)$

$$sec^2(x) + cosec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{sen^2(x)} = \frac{sen^2(x) + \cos^2(x)}{\cos(x).\, sen^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)\,.\,sen^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} . \frac{1}{sen^2(x)} = sec^2(x). cosec^2(x)$$

VERDADERO.

d) $\{x \in Z / -1 < x \leq 7\} = (-1, 7]$

FALSO. Por definición de igualdad de conjuntos, sabemos que dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos.

El conjunto $\{x \in Z / -1 < x \leq 7\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, está formado por todos los números **enteros** mayores a -1 y menores o iguales a 7.

El conjunto $(-1, 7] = \{x \in Z / -1 < x \leq 7\}$, es un intervalo de números reales, está formado por todos los números **reales** mayores a -1 y menores o iguales a 7.

Luego, por ejemplo, $0{,}5 \in (-1, 7]$, pero $0{,}5 \notin \{x \in Z / -1 < x \leq 7\}$, por lo tanto $\{x \in Z / -1 < x \leq 7\} \neq (-1, 7]$.

2) El área de un rectángulo de base b y altura h es $b.h$. Luego:

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} = \frac{x^3 - 64}{x^2 + 4x + 16} . h$$

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} : \frac{x^3 - 64}{x^2 + 4x + 16} = h$$

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4} . \frac{x^2 + 4x + 16}{x^3 - 64} = h$$

$$\frac{(x - 4)^2}{x - 4} . \frac{x^2 + 4x + 16}{(x - 4).(x^2 + 4x + 16)} = h$$

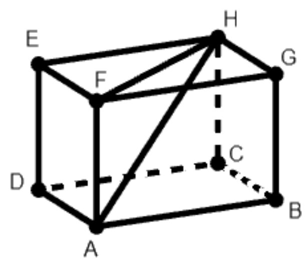
$$h = 1$$

No hay restricciones de la variable, ya que los denominadores se anulan únicamente cuando $x = 4$, pero se indica en el enunciado que $x > 4$.

3) Largo: $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{FG} = \overline{EH} = 1{,}2\ dm = 12\ cm$

Ancho: $\overline{DA} = \overline{BC} = \overline{EF} = \overline{GH} = 50\ mm = 5\ cm$

Alto: $\overline{DE} = \overline{AF} = \overline{BG} = \overline{CH} = 5\ cm$



a) El triángulo EFH es rectángulo en $\hat{E}$ por ser EFGH un rectángulo. Luego, por teorema de Pitágoras:

$\overline{FH}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{EF}^2$

$\overline{FH}^2 = (12\ cm)^2 + (5\ cm)^2$

$\overline{FH}^2 = 144\ cm^2 + 25\ cm^2$

$\overline{FH}^2 = 169\ cm^2$

$\overline{FH} = \sqrt{169\ cm^2}$

$\overline{FH} = 13\ cm$

El triángulo AFH es rectángulo en $\hat{F}$ por ser un paralelepípedo recto. Entonces:

$$tg(A\hat{H}F) = \frac{\overline{AF}}{\overline{FH}}$$

$$tg(A\hat{H}F) = \frac{5}{13}$$

$$A\hat{H}F = tg^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$A\hat{H}F \cong 21{,}03°$$

b) Área total: $4.(12\ cm\ .\ 5\ cm) + 2.(5\ cm\ .\ 5\ cm) = 240\ cm^2 + 50\ cm^2 = 290\ cm^2$

Volumen: $12\ cm\ .\ 5\ cm\ .\ 5\ cm = 300\ cm^3 = 0{,}3\ dm^3$

4) x: cantidad de alcohol (en l) del alcohol al 70%

y: cantidad de alcohol (en l) del alcohol al 95%

$$\begin{cases} x + y = 200 & (1) \\ 0{,}7\ x + 0{,}95\ y = 0{,}8\ .\ 200 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1), despejamos y:

$$y = 200 - x$$

Ahora sustituimos y en la ecuación (2):

$$0{,}7\ x + 0{,}95.(200 - x) = 160$$

$$0{,}7\ x + 190 - 0{,}95\ x = 160$$

$$-0{,}25\ x = 160 - 190$$

$$x = -30 : (-0{,}25)$$

$$x = 120$$

Con lo cual, $y = 200 - x = 200 - 120 = 80$.

Rta.: se deben mezclar 200 l del alcohol al 70% y 80 l del alcohol al 95%.

5)

a) $\underbrace{(2x-3)^2}_{Cuadrado\ de\ un\ binomio} + x^2 \quad = (3x+1)(3x-1) - 6$

$\underbrace{(2x)^2 + 2.2x.(-3) + (-3)^2}_{Trinomio\ cuadrado\ perfecto} + x^2 = \qquad \underbrace{(3x)^2 - 1^2}_{Diferencia\ de\ cuadrados} \qquad - 6$

$4x^2 - 12x + 9 = 9x^2 - 1 - 6$

$4x^2 - 12x + 9 + x^2 - 9x^2 + 1 + 6 = 0$

$-4x^2 - 12x + 16 = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.(-4)}}{2\,.\,1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{2} \qquad x_2 = \frac{-3-5}{2}$$

$$x_1 = \frac{2}{2} \qquad x_2 = \frac{-8}{2}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -4$$

$S = \{1\,, -4\}$

b) x: precio inicial del artículo
Si se hizo un descuento del 15%, lo que se pagó es el 85% del precio inicial. Es decir, el 85% de x es \$204000.

$$\frac{85}{100}\,.\,x = \$204000$$

$$0{,}85\,.\,x = \$204000$$

$$x = \$204000 : 0{,}85$$

$$x = \$240000$$

Rta.: el precio inicial del artículo es \$240000

c)

$$\mathbf{1} - \left[\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\,.\,\mathbf{5} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,.\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)\right] =$$

$$= \mathbf{1} - \left[\frac{15}{2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,.\left(\frac{\mathbf{6+1}}{\mathbf{9}}\right)\right] =$$

$$= \mathbf{1} - \left[\frac{15}{2} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,.\,\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{9}}\right] =$$

$$= \mathbf{1} - \left[\frac{15}{2} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{18}}\right] =$$

$$= \mathbf{1} - \left[\frac{\mathbf{135-7}}{\mathbf{18}}\right] =$$

$$= 1 - \frac{64}{9} =$$

$$= -\frac{55}{9}$$

d) Sabiendo que $cosec(x) = 2$ y que $x \in II_C$ hallar en forma exacta $cos(x)$ y $tg(x)$.

$$cosec(x) = 2 \Longrightarrow \frac{1}{\mathrm{sen}(x)} = 2 \Longrightarrow \mathrm{sen}(x) = \frac{1}{2}$$

Por identidad pitagórica:

$$cos^2(x) + sen^2(x) = 1$$

$$cos^2(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$cos^2(x) + \frac{1}{4} = 1$$

$$cos^2(x) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$cos^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$cos(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$cos(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $x \in II_C$, entonces $cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$