sección de la recta G con una superficie de área F, este número n_1 dependerá de la posición de la recta, y extendiendo la integración a todas las posiciones de la misma se verifica [1, p. 69], [2, p. 89],

$$\int n_1 \, dG = \pi F. \tag{21}$$

Consideremos la superficie formada por la suma de las superficies de los N corpúsculos, cuya área valdrá Nf, si f es el área de cada uno de ellos. Como G sólo puede tener con cada corpúsculo dos puntos de intersección, llamando n al número de corpúsculos que la recta G encuentra al atravesar K, la fórmula (21) da

$$\int\limits_{G.K \neq 0} n \, dG = \frac{\pi}{2} N f. \tag{22}$$

Por otra parte, la medida del conjunto total de las rectas que cortan a K es (también según (21) y siendo ahora F el el área de K)

$$\int\limits_{G.K \neq 0} dG = \frac{\pi}{2} F, \tag{23}$$

luego, dividiendo (22) por (23):

$$\bar{n} = N \frac{f}{F} \tag{24}$$

que nos da el *valor medio del número de corpúsculos que encontrará una recta arbitraria que atraviesa a K.*

2. Llamando s a la longitud de la cuerda que la recta G determina en K, es fácil ver, teniendo en cuenta (20) que [1, p. 77]

$$\int\limits_{G.K \neq 0} s \, dG = 2\pi V \tag{25}$$

siendo V el volumen de K. De (25) y (23), por división, obtenemos como valor medio de la longitud de la cuerda s:

$$\bar{s} = \frac{4V}{F}. \tag{26}$$

Dividiendo el número medio de corpúsculos que encuentra G por la longitud media (26) de la cuerda; se tendrá la densidad media δ_G de corpúsculos sobre la recta G que será

$$\delta_G = \frac{f}{4} D, \tag{27}$$

recordando que D es la densidad $\frac{N}{V}$ de los corpúsculos en K.

Esta es, por consiguiente, *la relación existente entre la densidad de corpúsculos sobre una recta que atraviesa el cuerpo y la densidad total en el mismo.*

Dividiendo, inversamente, (26) por (24), se obtendrá la *distancia media* entre los *corpúsculos vecinos*, que valdrá

$$\bar{d} = \frac{4}{fD}. \tag{28}$$

Al decir distancia media entre corpúsculos «vecinos» entendemos, como se deduce de la manera como obtenemos la fórmula (28), que se consideran únicamente las distancias de cada corpúsculo a aquellos que son visibles desde el mismo, es decir, que se pueden unir por un segmento que no encuentra a ningún otro corpúsculo intermedio.

Si los corpúsculos son esféricos de radio r, será

$$\bar{d} = \frac{1}{\pi r^2 D}. \tag{29}$$

Pólya, en el artículo ya citado [5], obtiene también esta fórmula que interpreta de la manera siguiente: supuesta una caída de nieve formada por copos esféricos de radio r con una densidad D, la distancia visible media según todas las direcciones desde un punto envuelto por la nevada, está dada por (29). (Ver el Apéndice § 3).

3. *Aplicación a la teoría cinética de los gases.* El mismo método anterior sirve para resolver el problema siguiente: Sea un cuerpo K' de área F y volumen V que contiene en su interior N corpúsculos convexos e iguales entre sí. ¿Cuál será el recorrido libre medio de un punto sin dimensiones que se mueve dentro de K en dirección arbitraria (todas igualmente probables)?

Sea G la recta sobre la cual en un momento considerado se mueve el punto (fig. 1, aunque ahora estamos en el espacio, la figura 1 sirve lo mismo). Los recorridos libres posibles serán los segmentos de esta recta limitados por dos corpúsculos sucesivos o por un corpúsculo y la pared de K. Llamando como antes s a la cuerda total que G determina en K o sea $s = AB$ y s_i a las cuerdas parciales interiores a los corpúsculos, la suma de recorridos libres posibles sobre G es

$$s - \Sigma s_i,$$

extendida la sumación al número de corpúsculos que son cortados por la recta G. En cuanto al número de recorridos libres o sea de segmentos en que la cuerda s de G queda dividida por los corpúsculos y las paredes del recipiente, es $n+1$ siendo n, como antes, el número de corpúsculos cortados por G. Extendiendo la integración a todas las rectas que cortan a K, la fórmula (25) da:

$$\int_{G.K-/-0} (s - \Sigma s_1)\, dG = 2\pi\,(V - Nv), \tag{30}$$

siendo v el volumen de cada corpúsculo. Además por la fórmula (21):

$$\int_{G.K-/-0} (n+1)\, dG = \frac{\pi}{2}(F + Nf) \tag{31}$$

siendo f el área de cada corpúsculo y F la del cuerpo K.

El *valor medio de los recorridos libres* se obtendrá dividiendo su suma total (30) por el número de ellos (31) o sea

$$\bar{l} = \frac{4\,(V - Nv)}{F + Nf}. \tag{32}$$

En el caso de ser los corpúsculos esféricos de radio r esta fórmula queda

$$\bar{l} = \frac{4\,(V - \frac{4}{3}N\pi r^3)}{F + 4\pi r^2 N}. \tag{33}$$

Esta fórmula se puede aplicar al caso del recorrido medio de las moléculas de un gas. Para ello basta observar que hasta ahora hemos considerado el recorrido medio de un punto sin dimensiones, si se quiere que sea el de una molécula o corpúsculo de radio r bastará suponer que ella se reduce a un punto y todas las demás duplican el radio puesto que entonces cuando el punto toque a una de estas moléculas de radio doble, es efectivamente el caso en que las dos moléculas se encontrarían. Sustituyendo en la fórmula anterior r por $2r$ se tiene pues como recorrido libre medio de las moléculas de un gas la fórmula conocida (ver por ejemplo [4, p. 34]),

$$\bar{l} = \frac{4(V-b)}{F+16\pi r^2 N} \tag{34}$$

indicando por b el volumen total de estas moléculas supuestas de radio $2r$.

En general para un gas a no mucha presión b y F son despreciables al lado de los demás términos de esta expresión y como valor aproximado se toma

$$\bar{l} = \frac{V}{4\pi r^2 N} = \frac{1}{4\pi r^2 D} \tag{35}$$

siendo D el número medio de moléculas por unidad de volumen.

4. *Caso de trayectorias curvas.* Recordando algunas fórmulas más de Geometría integral es fácil demostrar que el recorrido libre medio de un punto en el interior del cuerpo convexo K que contiene N corpúsculos distribuídos arbitrariamente es independiente de la forma de la trayectoria. Es decir, tiene el mismo valor dado por (32) lo mismo si la trayectoria es rectilínea, como allí se supuso, que si es circular o elíptica o cualquiera.

En efecto, supongamos que el punto debe moverse describiendo una trayectoria de forma arbitraria (pero siempre la misma) por ejemplo la representada por una curva cerrada C de longitud L (fig. 4).

Esta curva C (plana o alabeada) viene fijada en el espacio por seis coordenadas que pueden ser las tres x, y, z de uno de

sus puntos, más las ϑ y φ de una dirección por este punto, más la τ de una rotación alrededor de esta dirección. Entonces es

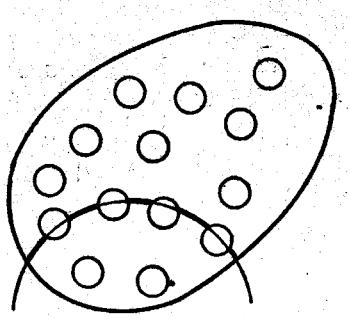

Fig. 4.

sabido que para medir un conjunto de posiciones de una tal línea se toma la integral de la llamada *densidad cinemática* que vale [1, p. 64], [6, p. 13],

$$dC = \cos\vartheta \, dx \, dy \, dz \, d\vartheta \, d\varphi \, d\tau. \tag{36}$$

Esta medida tiene la propiedad que la caracteriza de ser independiente de la posición de los ejes coordenados de referencia, o, en otras palabras, es invariante por movimientos.

Llamando n_1 al número de puntos de intersección de esta línea con las superficies de los N corpúsculos más la del cuerpo K que los contiene, vale [6, p. 39],

$$\int n_1 \, dC = 4\pi^2 (F + N f) L \tag{37}$$

siendo como antes f el área de los corpúsculos y F la de K.

Luego si n es el número de partes, interiores a K y limitadas por dos corpúsculos o las paredes, en que c queda dividida, (fig. 4), como es $n_1 = 2n$, será

$$\int n \, dC = 2\pi^2 (F + N f) L. \tag{38}$$

Por otra parte, si s es la parte de C que en cada posición queda interior a K y Σs_i la suma de las partes interiores a los corpúsculos, se verifica [6, p. 42]

$$\int (s - \Sigma s_i)\, dC = 8\pi^2 (V - N v)\, L. \tag{39}$$

Dividiendo la longitud total (39) de las partes en que C queda dividida por los corpúsculos y paredes de K, por la suma del número de partes (38), se tendrá la *longitud media* de ellas o sea *el recorrido libre medio para un punto cuya trayectoria tuviera la forma de la línea C*, que será

$$\bar{l} = \frac{4(V - Nv)}{F + Nf}$$

que es el mismo valor (32) obtenido para el caso de las trayectorias rectilíneas.

5. *Secciones por un plano.* Veamos ahora la relación existente entre la densidad de corpúsculos en una sección plana arbitraria del cuerpo y la densidad total. Un plano viene determinado por tres parámetros que pueden ser: su distancia p a un punto fijo y la latitud y longitud ϑ y φ de la dirección de su normal. Para medir conjuntos de planos se toma la integral, extendida al conjunto de que se trate, de la forma diferencial [1, p. 66], [2, p. 92]

$$dE = dp\, d\Omega \tag{40}$$

siendo, como antes, $d\Omega$ el elemento de área sobre la esfera unidad correspondiente a la dirección normal al plano.

Supuestos como siempre N corpúsculos congruentes de área f, volumen v e integral de curvatura media m (3) repartidos arbitrariamente en el interior de K, si se representa por n el número de ellos que son cortados por un plano E que corta a K, es sabido [1, p. 102] que se verifica

(3) Recuérdese que se llama *integral de la curvatura media* a la integral $\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) do$ extendida a toda la superficie del cuerpo siendo r_1 y r_2 los radios principales de curvatura correspondientes al elemento superficial do. Por ejemplo para un corpúsculo esférico de radio r sería $m = 4\pi r$. Si la superficie convexa tiene líneas de discontinuidad de la curvatura media, el valor que se debe atribuir a m es el límite de la curvatura media del cuerpo paralelo exterior a distancia ε cuando ε tiende a cero.

$$\int n\, dE = N\, m. \tag{41}$$

Por otra parte, la medida de todos los planos que cortan a K es [1, p. 72], [2, p. 95],

$$\int_{E.K \neq 0} dE = M \tag{42}$$

siendo M la curvatura media total de K. De (41) y (42) por división se deduce *el valor medio del número de corpúsculos que serán cortados por un plano dado al azar*, que será

$$\bar{n} = N \frac{m}{M}. \tag{43}$$

6. Llamando σ al área de la sección que el plano E determina en K es fácil deducir de la definición (40) que es [1, p. 74]

$$\int \sigma\, dE = 2\pi V \tag{44}$$

y dividiendo por (42), el *valor medio* de σ será:

$$\bar{\sigma} = 2\pi \frac{V}{M}. \tag{45}$$

Dividiendo el número medio (43) de corpúsculos que son cortados por E, por el valor medio (45) del área de la sección, se tendrá la *densidad media* de corpúsculos en las secciones de K por un plano arbitrario, que valdrá

$$\delta_E = \frac{mN}{2\pi V} = \frac{m}{2\pi} D \tag{46}$$

que relaciona *la densidad media de la sección con la densidad del conjunto.*

Si los corpúsculos son esféricos de radio r, es $m = 4\pi r$ y esta relación se reduce a

$$\delta_E = 2rD.$$