Vectores Parte I

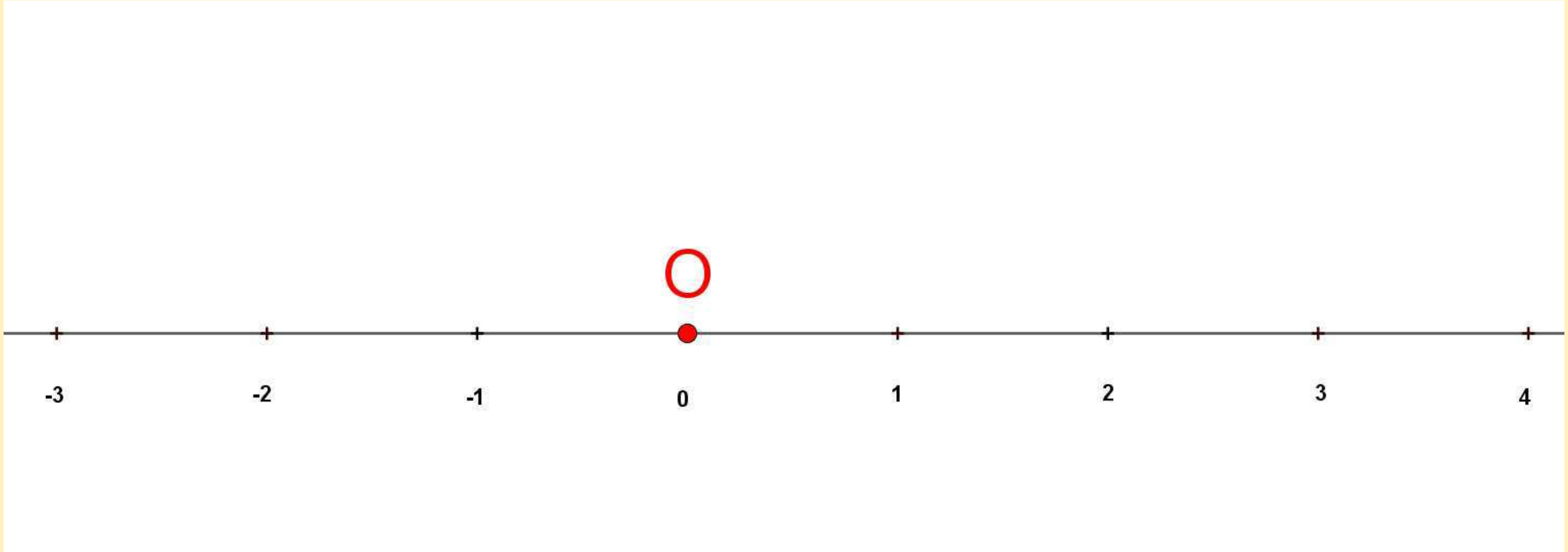
https://fceia.unr.edu.ar/~ariel/

March 8, 2019

Outline

Sistemas de coordenadas

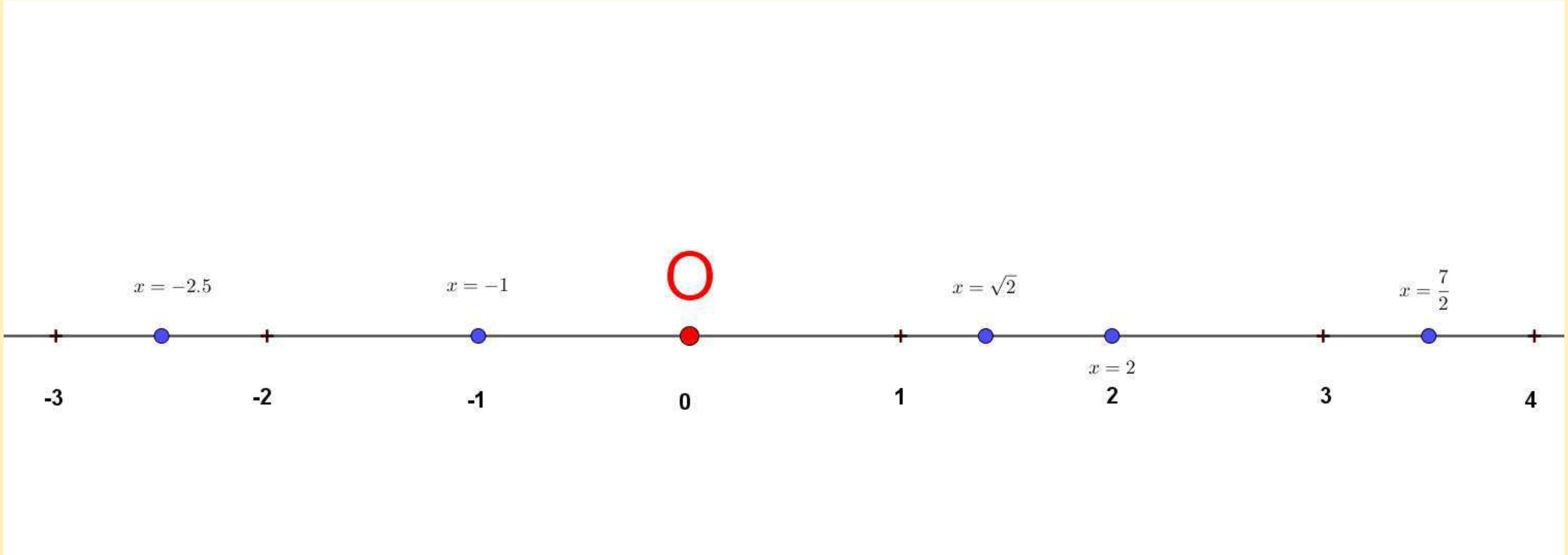
Eje Real



O: Origen de coordenadas ($x = 0$)

Sistemas de coordenadas

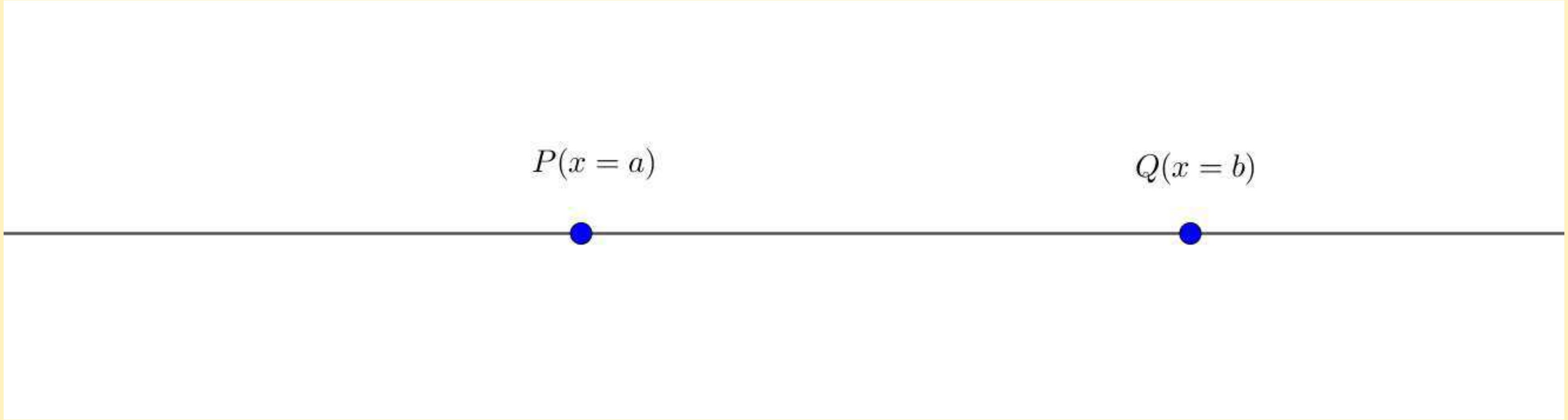
Eje Real



O: Origen de coordenadas ($x = 0$)

Sistemas de coordenadas

Eje Real



Si

$$a < b$$

entonces

$$P(x = a) \qquad \text{está a la izquierda de} \qquad Q(x = b)$$

Sistemas de coordenadas

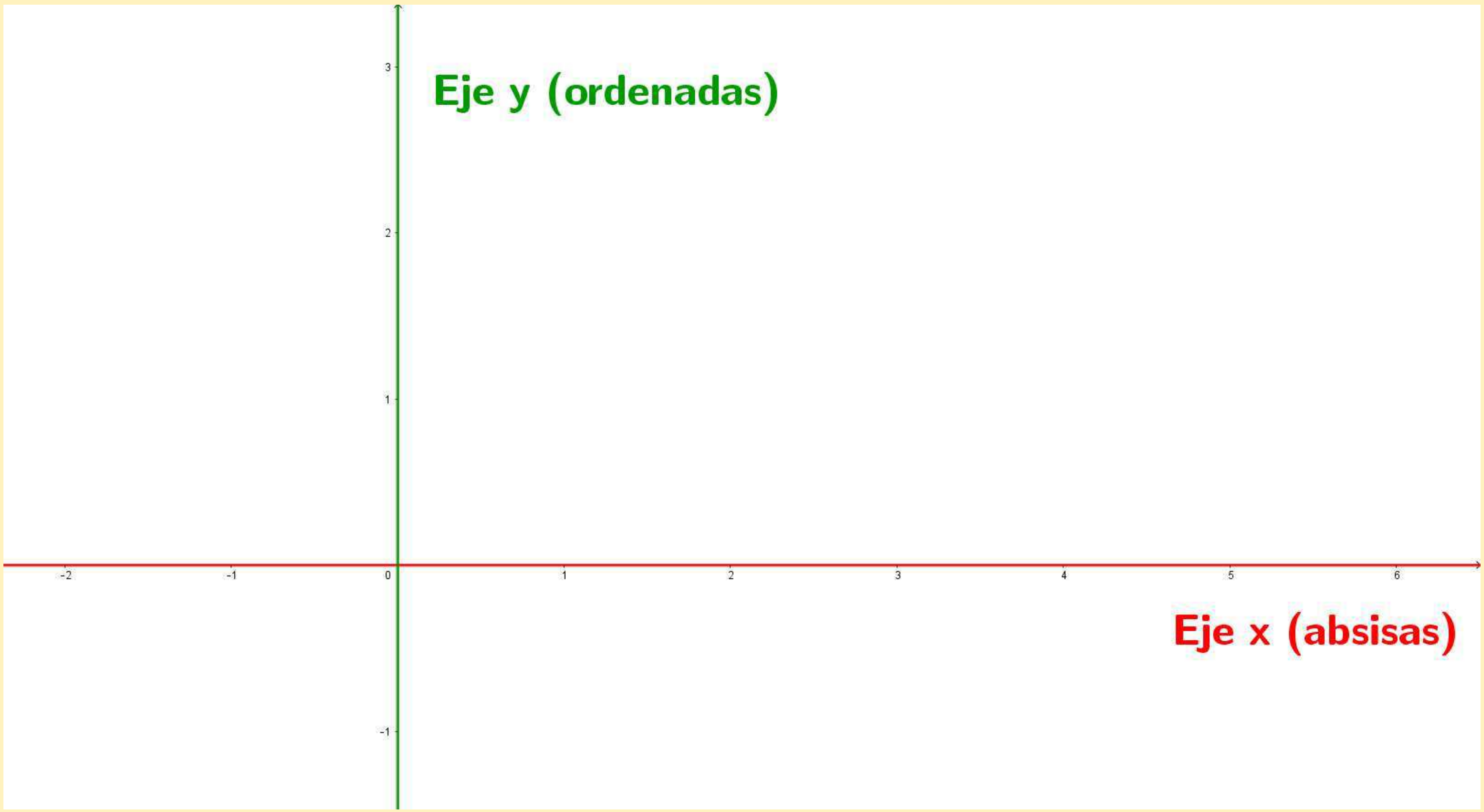
Ejemplo

Marcar en el eje real

- **Semieje positivo:** $\{x : x > 0\}$
- **Semieje negativo:** $\{x : x < 0\}$
- El **intervalo abierto** $(-1, 1.5) = \{x : x > -1$ y $x < 1.5\}$
- El **intervalo cerrado** $[-\sqrt{2}, 2] = \{x : -\sqrt{2} \leq x \leq 2\}$
- El **intervalo semiabierto** $[1, \frac{7}{4})$
- La **semirrecta** $x < 1.5$
- La **semirrecta cerrada** $x \geq -3$

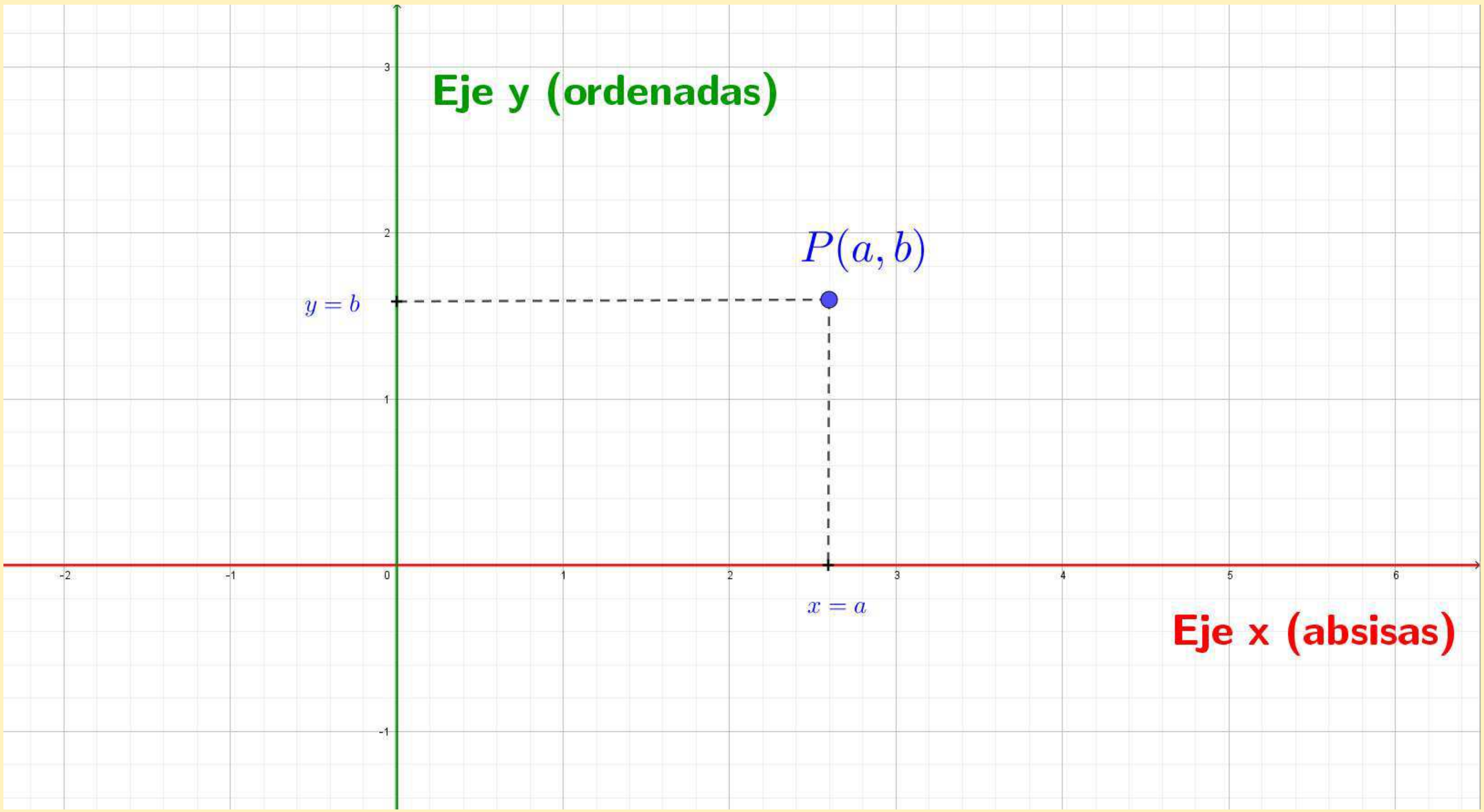
Sistemas de coordenadas

Plano cartesiano



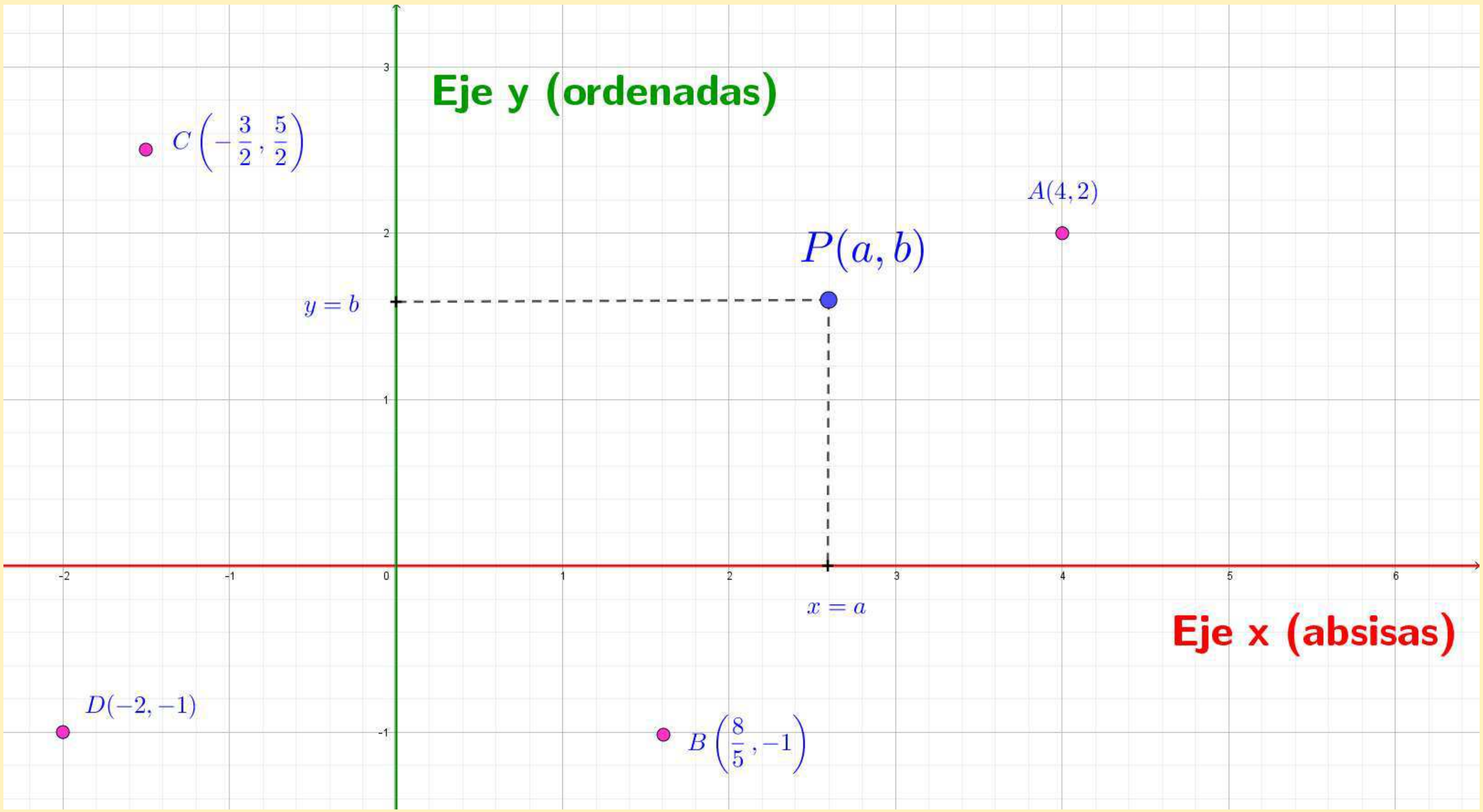
Sistemas de coordenadas

Plano cartesiano



Sistemas de coordenadas

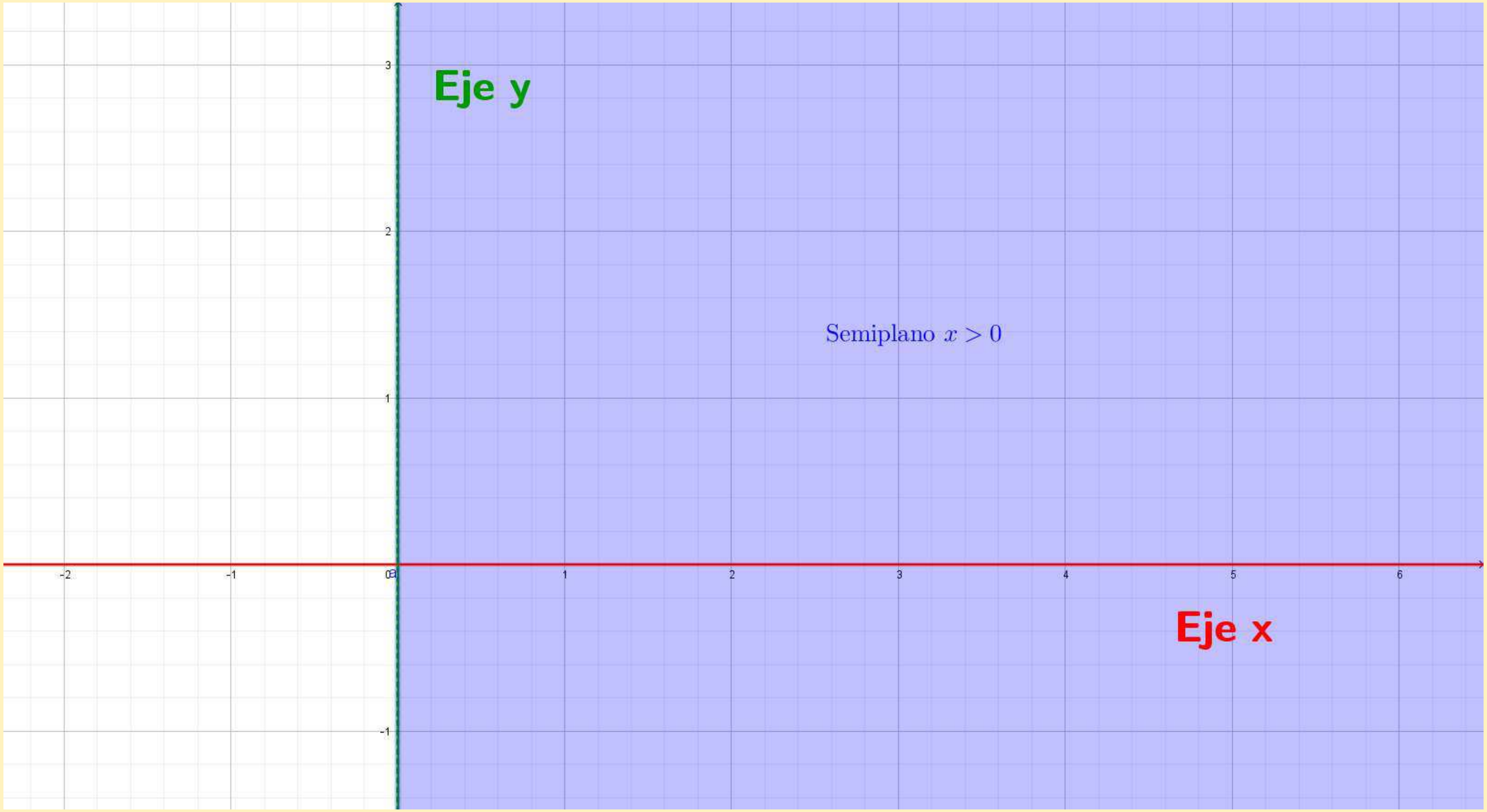
Plano cartesiano



Decimos que P tiene **coordenadas** a y b

Sistemas de coordenadas

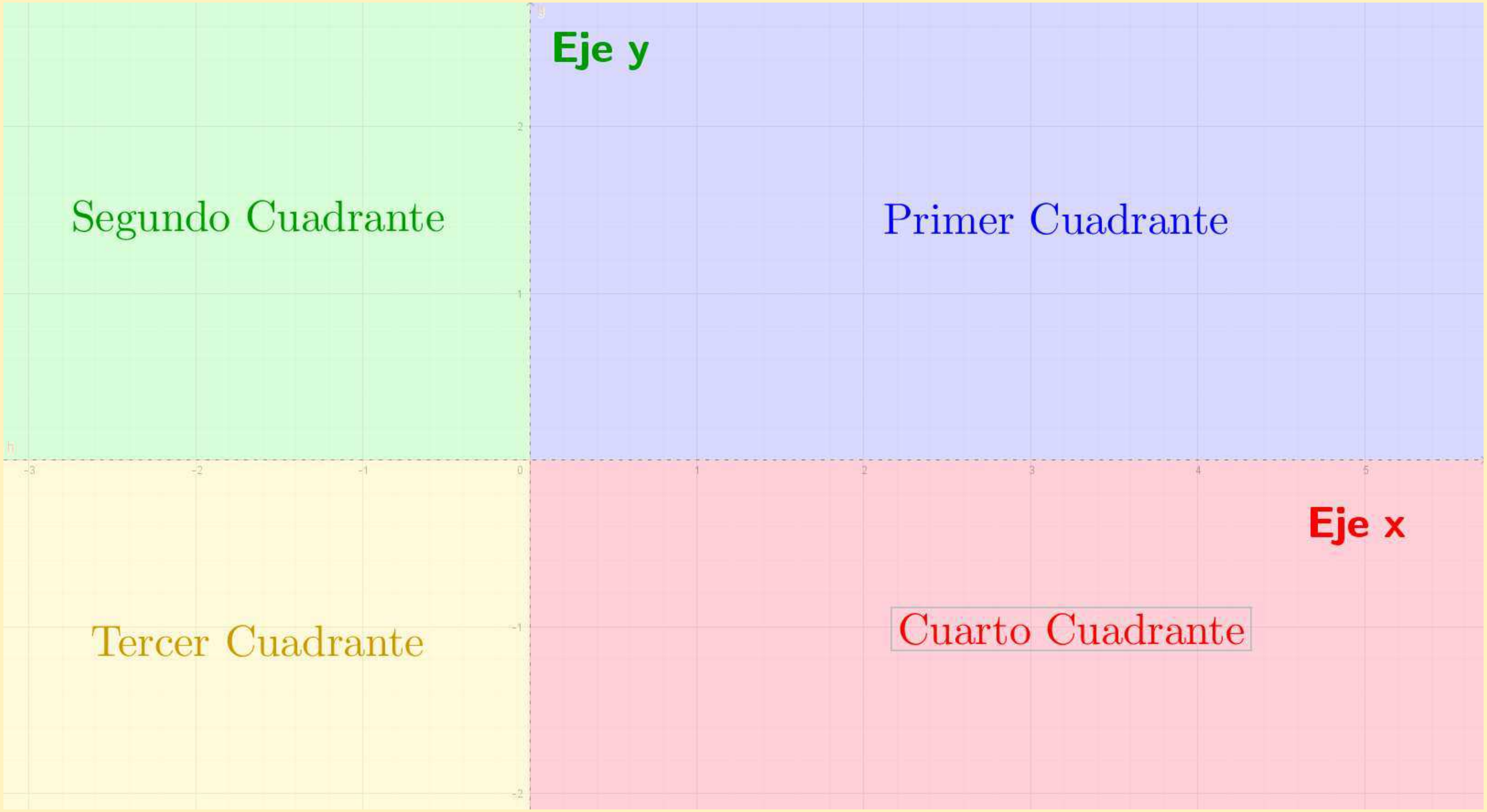
Plano cartesiano



Decimos que P tiene **coordenadas** a y b

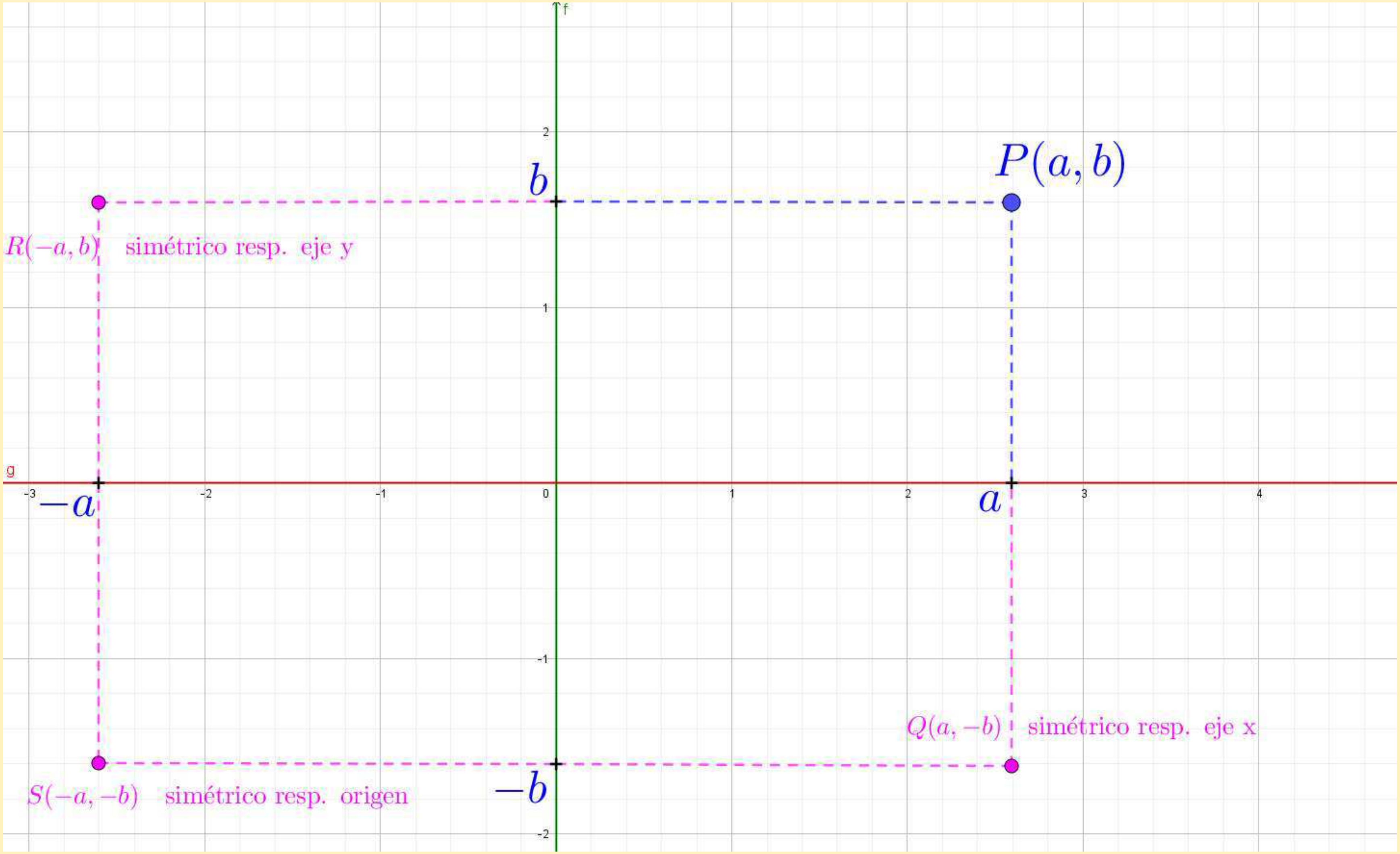
Sistemas de coordenadas

Para recordar



Sistemas de coordenadas

Para recordar



Sistemas de coordenadas

Ejemplo

Marcar en plano cartesiano xy

- El punto $A(\sqrt{5}, -\frac{5}{3})$
- El punto B simétrico de A respecto del eje x
- El simétrico de B respecto del eje y
- El simétrico de A respecto del origen
- El semiplano $y > 0$
- El semiplano $x < 4$
- El conjunto $\{(x, y) : \quad -1 < y \leq 2\}$
- El conjunto $\{(x, y) : \quad x = \frac{1}{2}\}$

Sistemas de coordenadas

Ejemplo

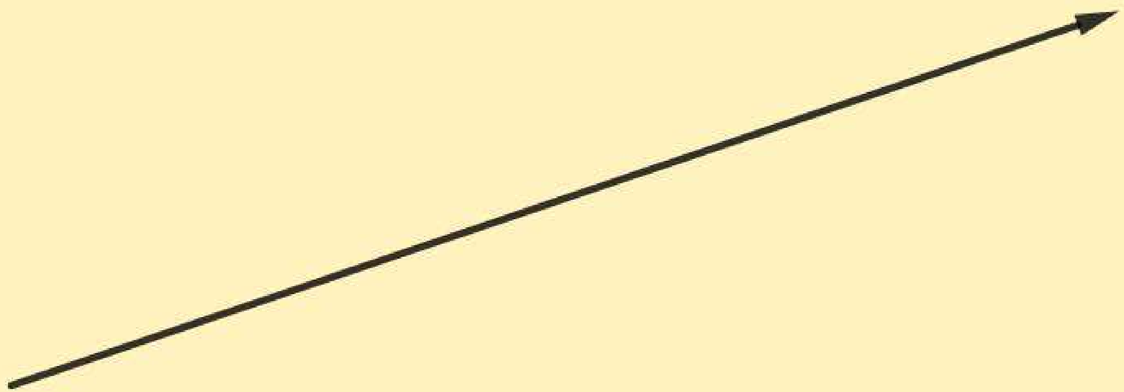
Marcar en plano cartesiano xy

- El punto $A(\sqrt{5}, -\frac{5}{3})$
- El punto B simétrico de A respecto del eje x
- El simétrico de B respecto del eje y
- El simétrico de A respecto del origen
- El semiplano $y > 0$
- El semiplano $x < 4$
- El conjunto $\{(x, y): \quad -1 < y \leq 2\}$
- El conjunto $\{(x, y): \quad x = \frac{1}{2}\}$

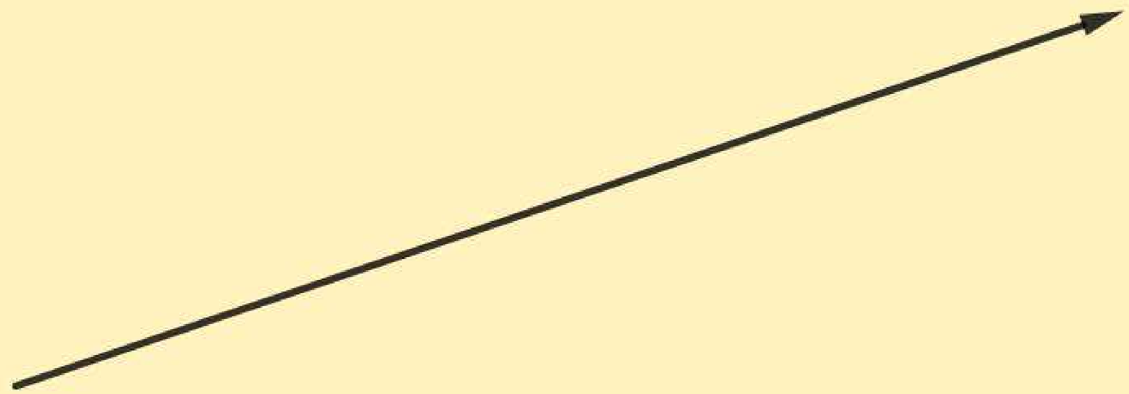
Al plano cartesiano lo denotamos

$$\text{plano } xy, \qquad \mathbb{R}^2, \qquad \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Segmentos Dirigidos

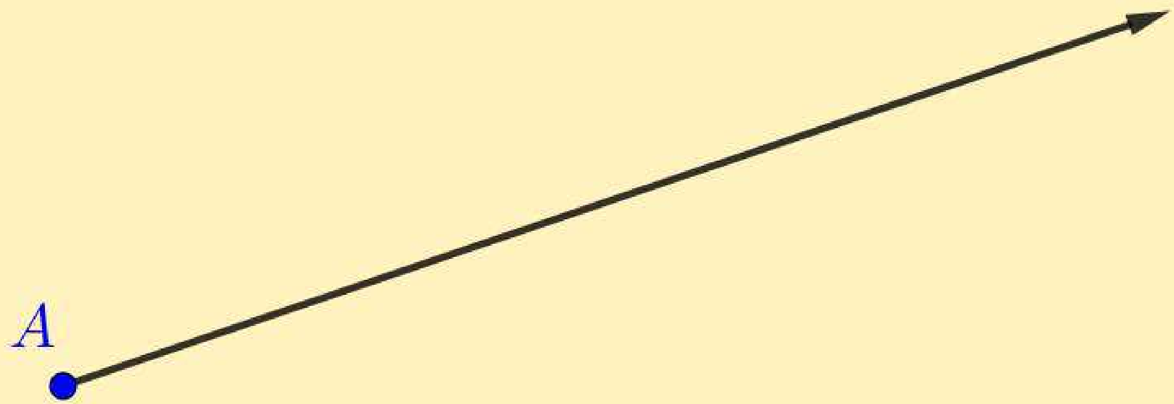


Segmentos Dirigidos



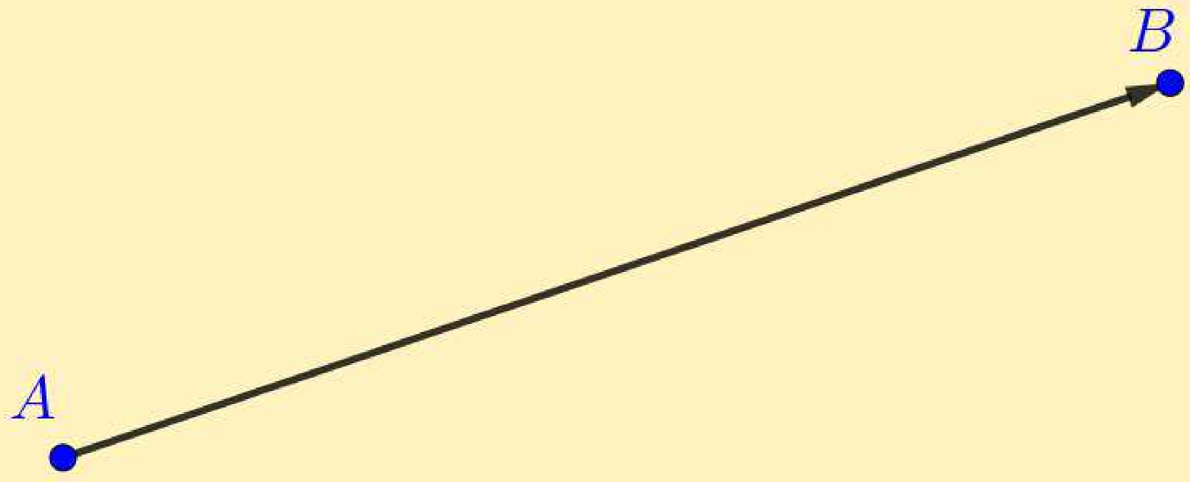
Un **segmento dirigido** es un segmento con un **punto inicial** y un **punto terminal** o **final**

Segmentos Dirigidos



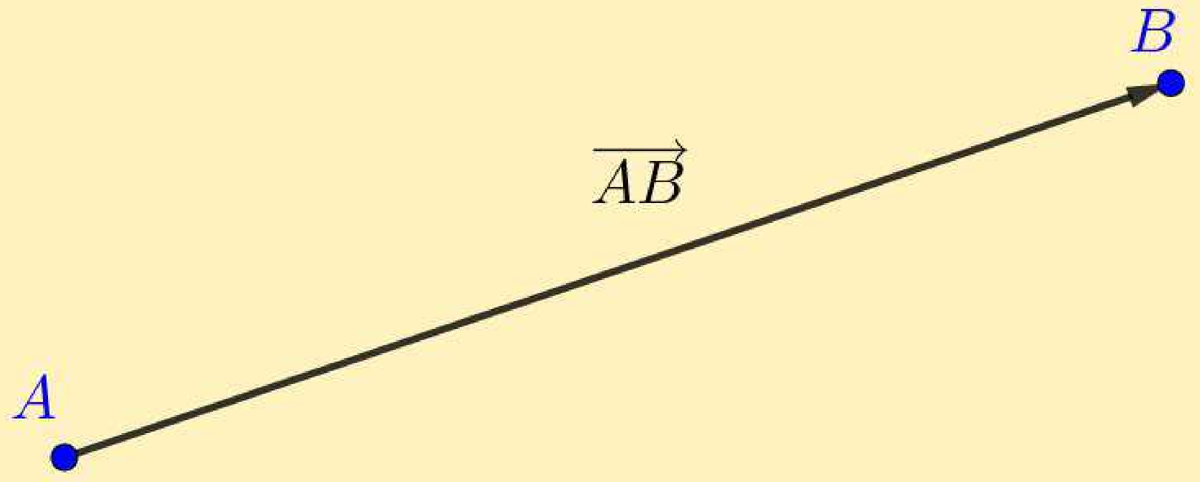
A: punto inicial

Segmentos Dirigidos



A: punto inicial B: punto terminal

Segmentos Dirigidos



A: punto inicial B: punto terminal

Denotamos al segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, o simplemente AB cuando no haya confusión

Segmentos Dirigidos

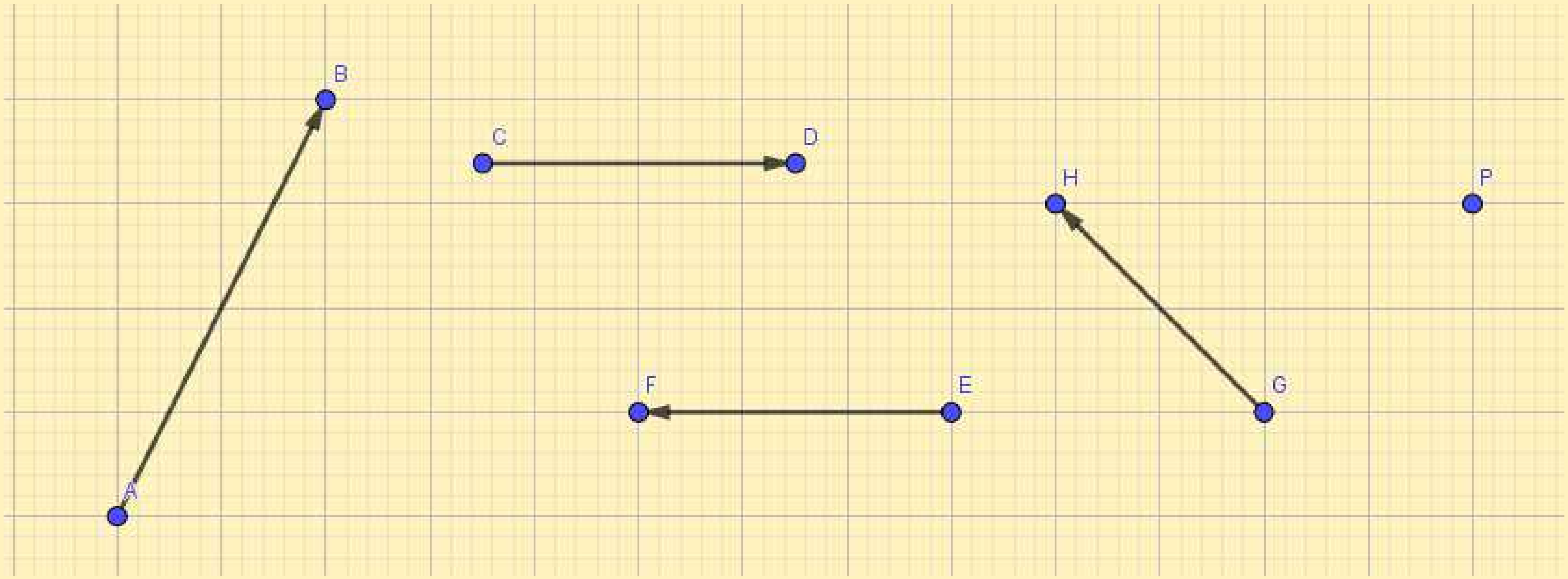
Características de un Segmento Dirigido

- **Módulo** o **Longitud**: es la longitud del segmento. Al módulo de un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ lo denotamos $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Segmentos Dirigidos

Características de un Segmento Dirigido

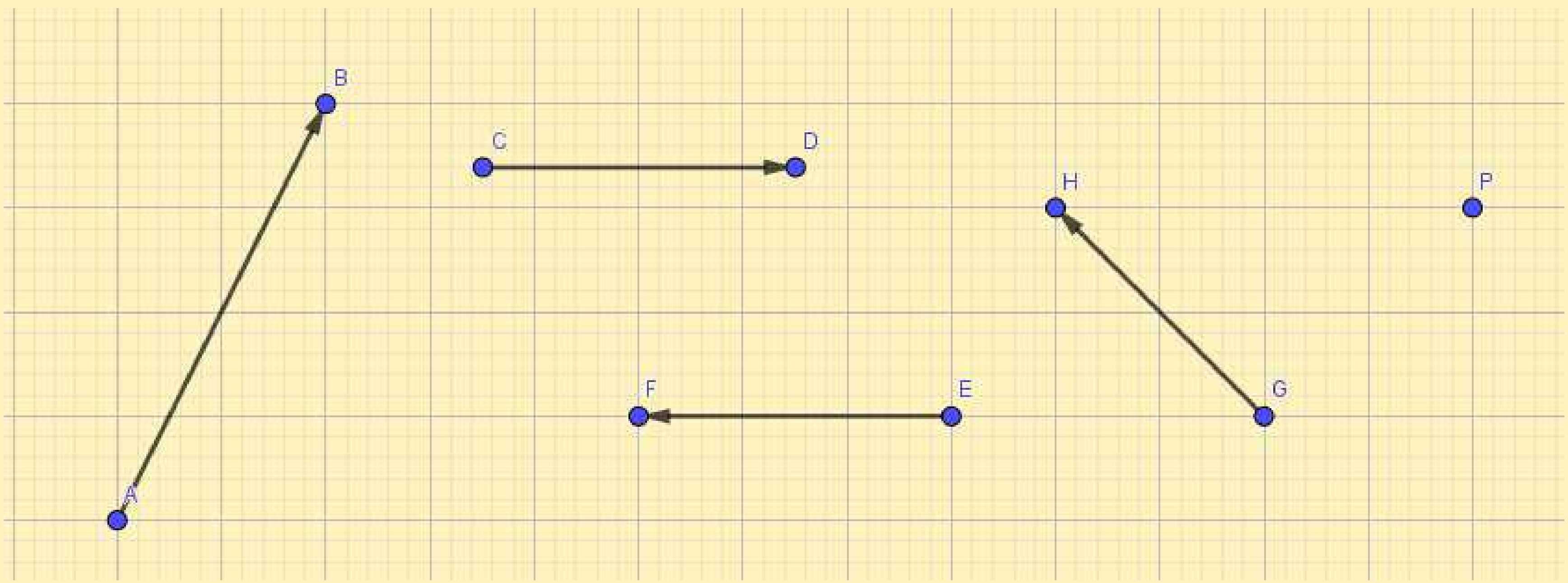
- **Módulo** o **Longitud**: es la longitud del segmento. Al módulo de un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ lo denotamos $\left|\overrightarrow{AB}\right|$



Segmentos Dirigidos

Características de un Segmento Dirigido

- **Módulo** o **Longitud**: es la longitud del segmento. Al módulo de un segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ lo denotamos $\left|\overrightarrow{AB}\right|$



$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{20}, \qquad |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{EF}| = 3, \qquad |\overrightarrow{GH}| = \sqrt{8}, \qquad |\overrightarrow{PP}| = ?$$

Segmentos Dirigidos

Características de un Segmento Dirigido

Un segmento dirigido con los mismos puntos inicial y terminal tiene módulo 0.

Entonces

$$\left|\overrightarrow{PP}\right| = 0$$

Segmentos Dirigidos

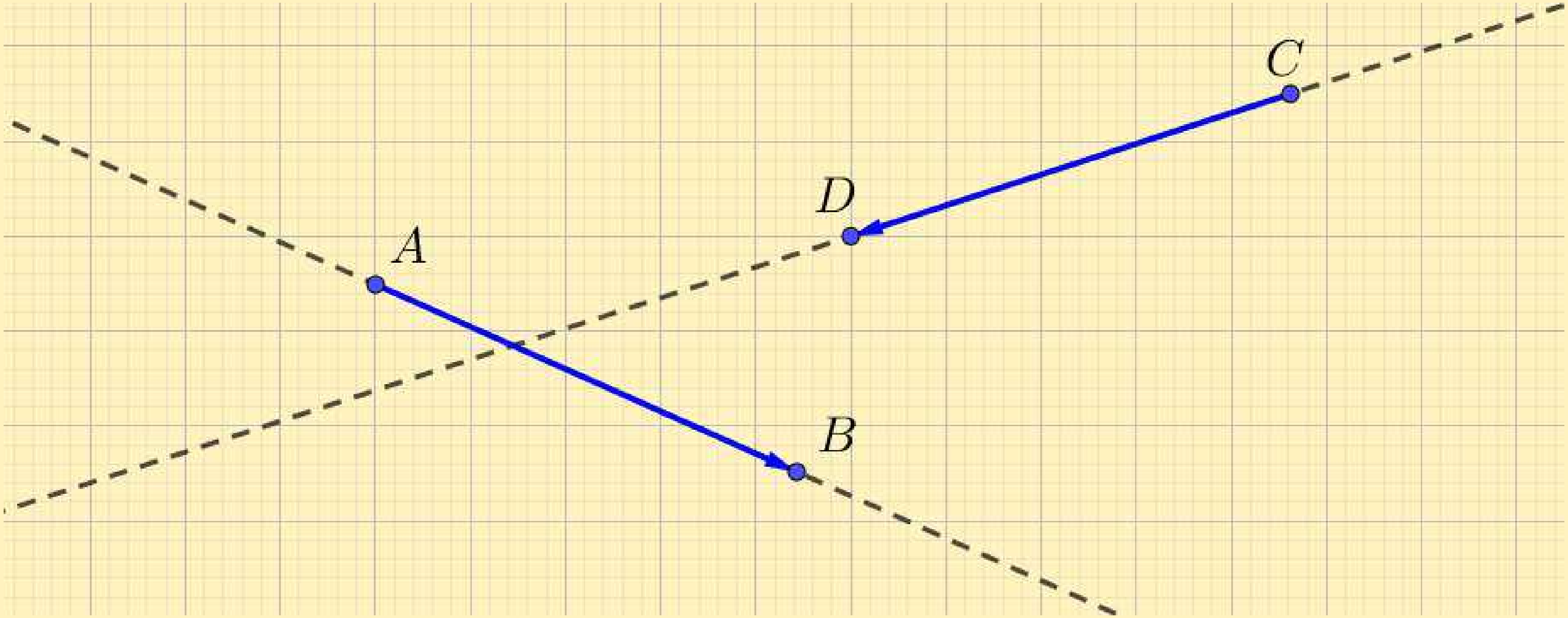
Características de un Segmento Dirigido

- **Dirección**: determinada por la recta que contiene al segmento

Segmentos Dirigidos

Características de un Segmento Dirigido

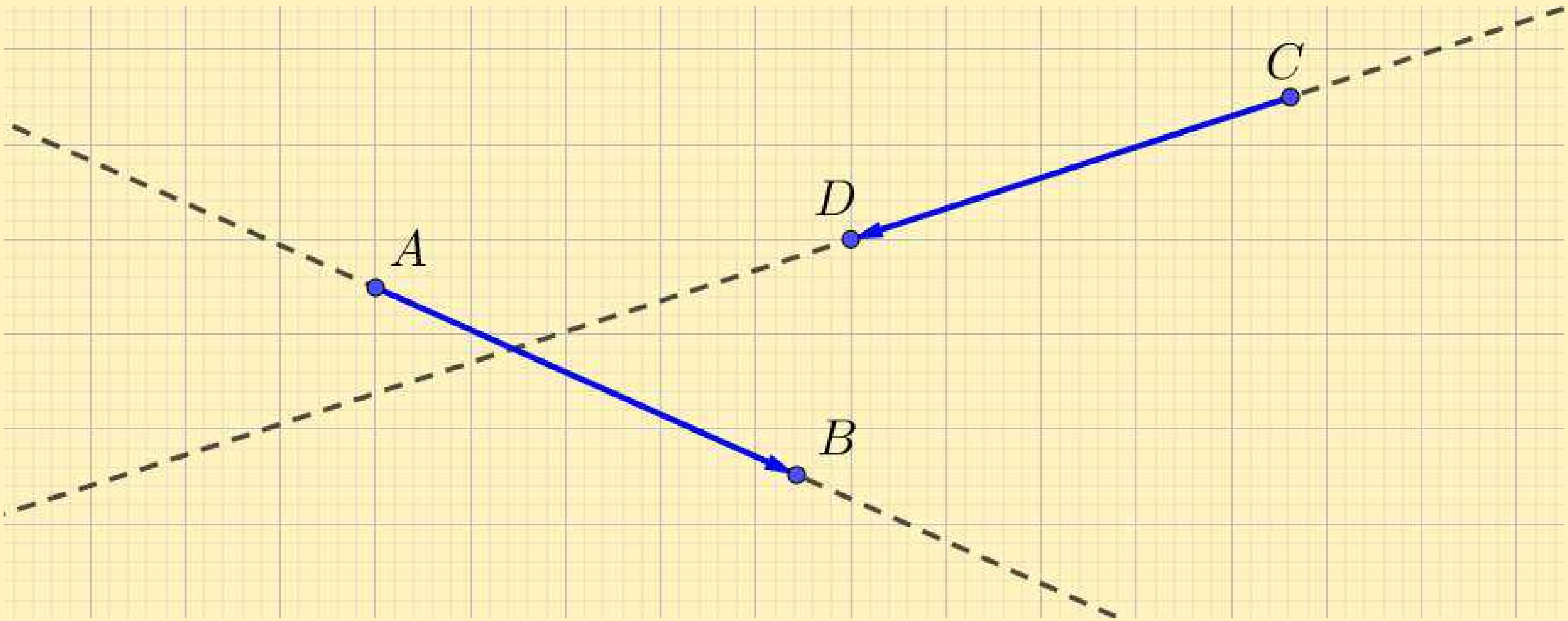
- **Dirección**: determinada por la recta que contiene al segmento



Segmentos Dirigidos

Características de un Segmento Dirigido

- **Dirección**: determinada por la recta que contiene al segmento

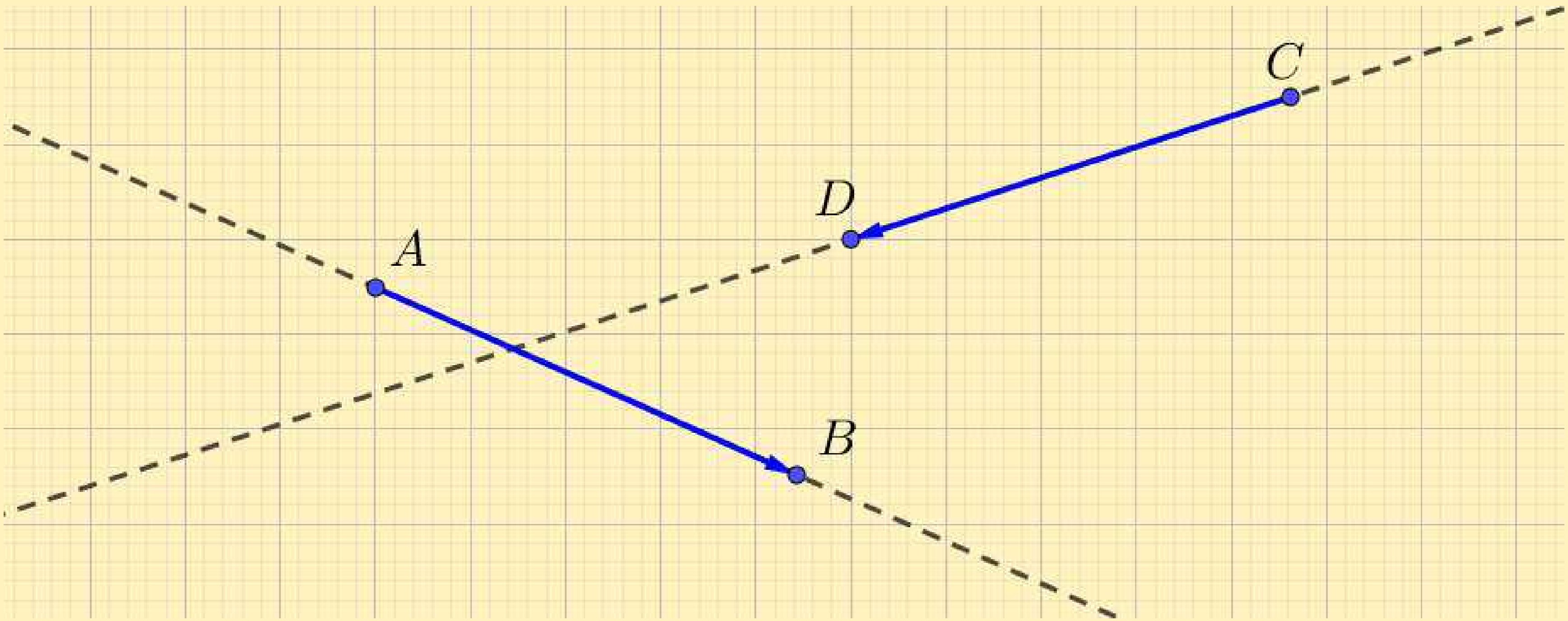


dir($\overrightarrow{AB}$) : determinada por $\overleftrightarrow{AB}$ dir($\overrightarrow{CD}$) : determinada por $\overleftrightarrow{CD}$

Segmentos Dirigidos

Características de un Segmento Dirigido

- **Dirección**: determinada por la recta que contiene al segmento



$\mathrm{dir}(\overrightarrow{AB})$: determinada por $\overleftrightarrow{AB}$ $\quad$ $\mathrm{dir}(\overrightarrow{CD})$: determinada por $\overleftrightarrow{CD}$

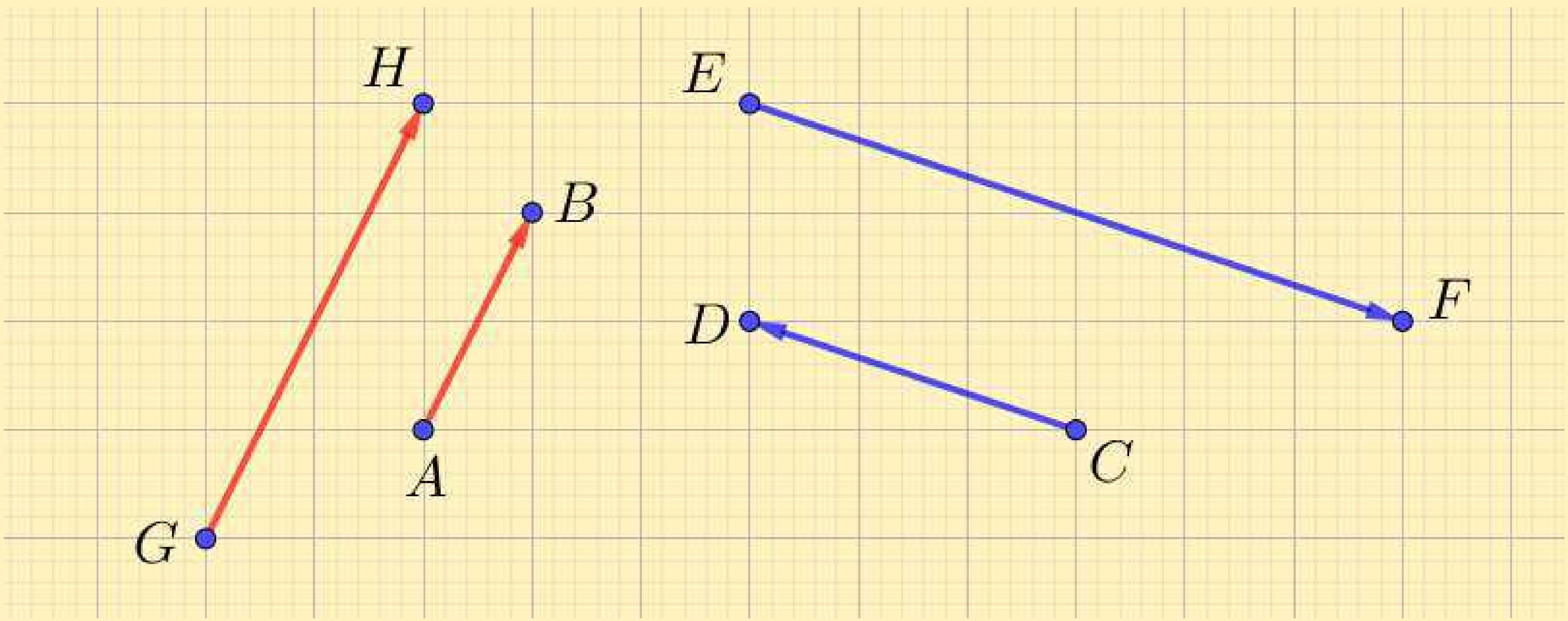
> No definimos dirección para segmentos dirigidos de módulo 0

Segmentos Dirigidos

Dos segmentos dirigidos (de módulo > 0) **tienen la misma dirección** si las rectas que los contienen son paralelas.

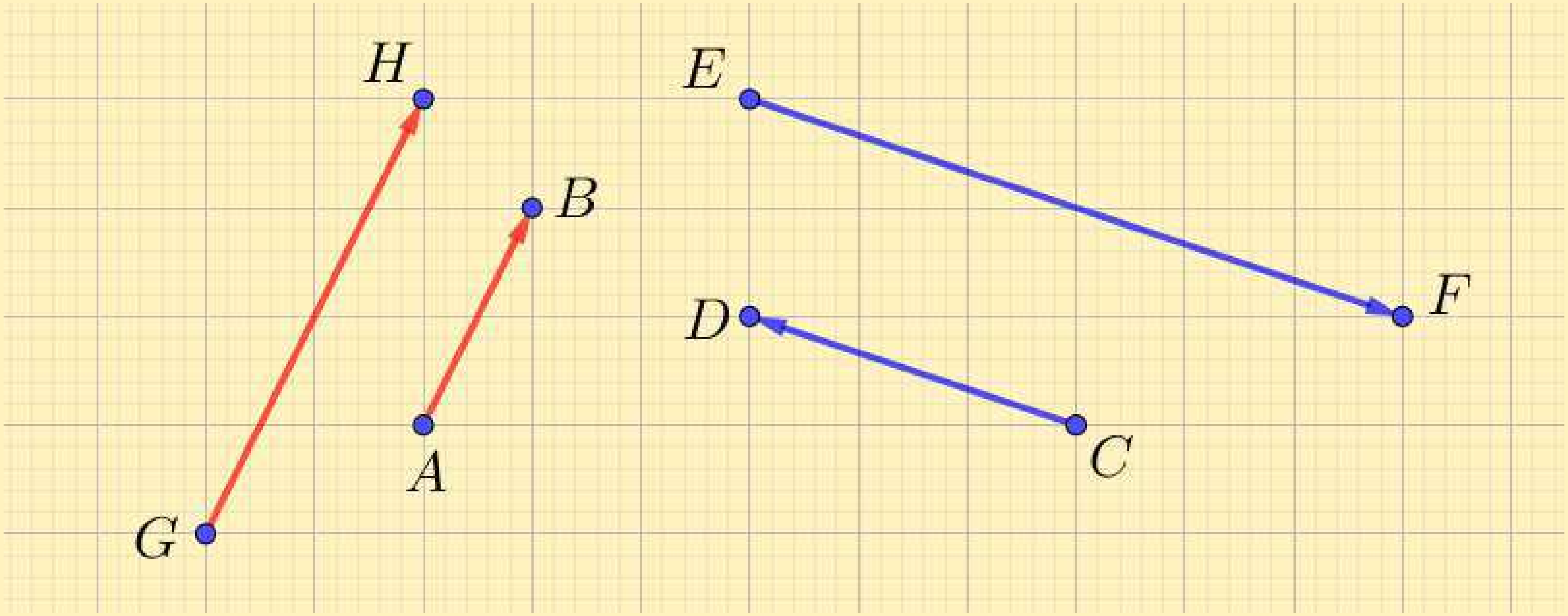
Segmentos Dirigidos

Dos segmentos dirigidos (de módulo > 0) **tienen la misma dirección** si las rectas que los contienen son paralelas.



Segmentos Dirigidos

Dos segmentos dirigidos (de módulo > 0) **tienen la misma dirección** si las rectas que los contienen son paralelas.



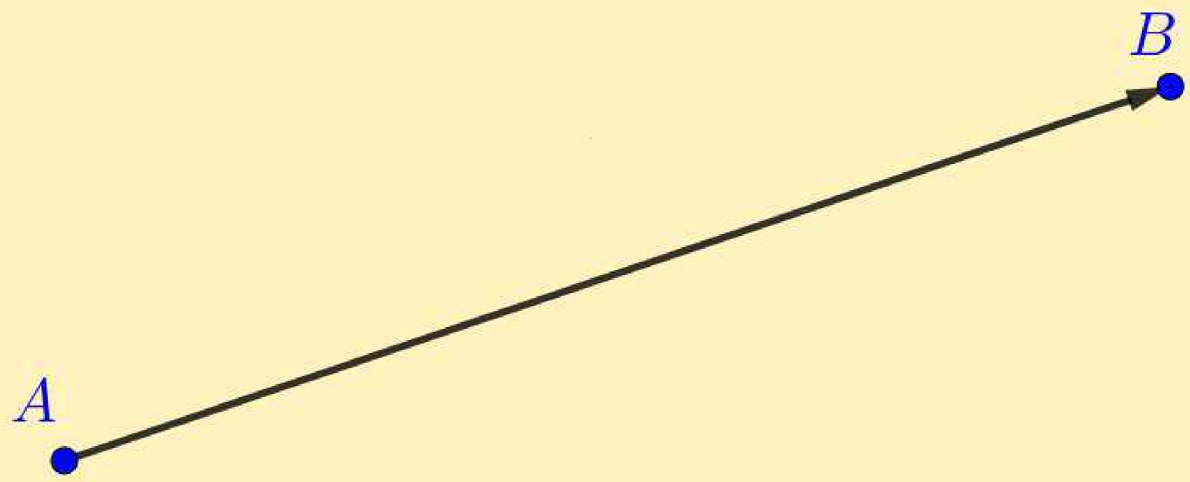
$$\text{dir}\ \overrightarrow{GH} = \text{dir}\ \overrightarrow{AB}, \qquad \text{dir}\ \overrightarrow{CD} = \text{dir}\ \overrightarrow{EF}$$

Segmentos Dirigidos

- **Sentido**: indicado por la flecha

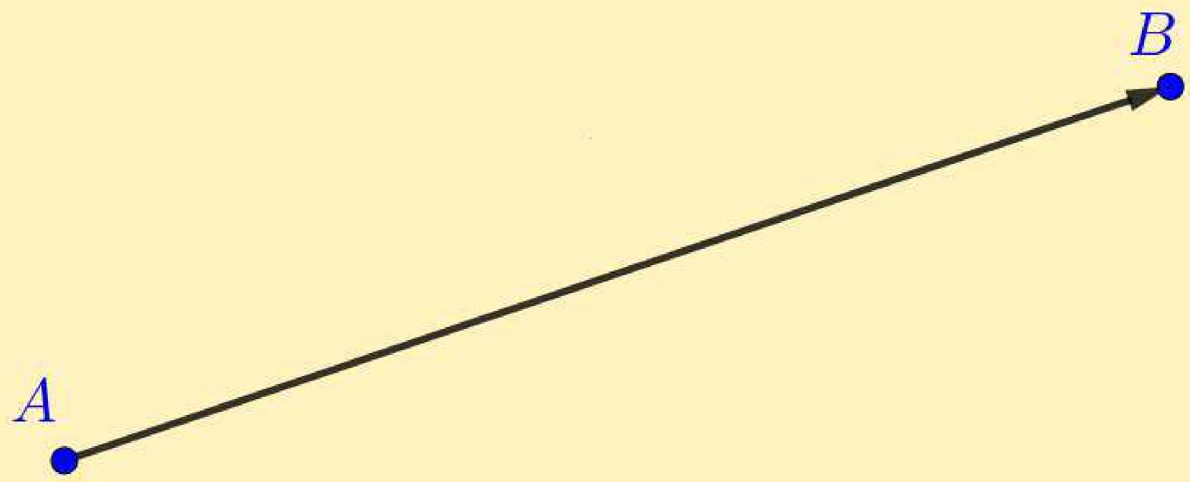
Segmentos Dirigidos

- **Sentido**: indicado por la flecha



Segmentos Dirigidos

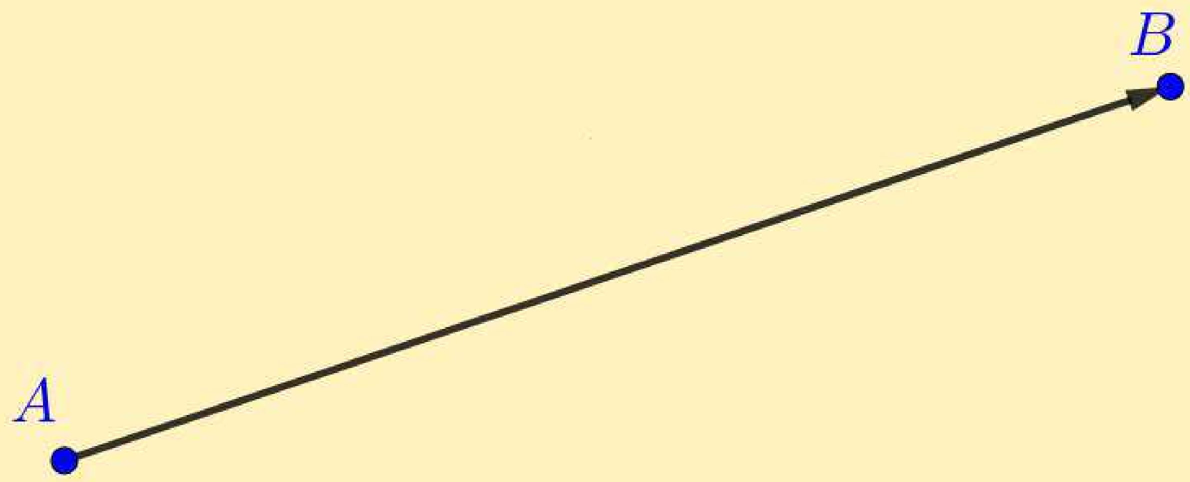
- **Sentido**: indicado por la flecha



$\overrightarrow{AB}$ tiene sentido desde A hacia B

Segmentos Dirigidos

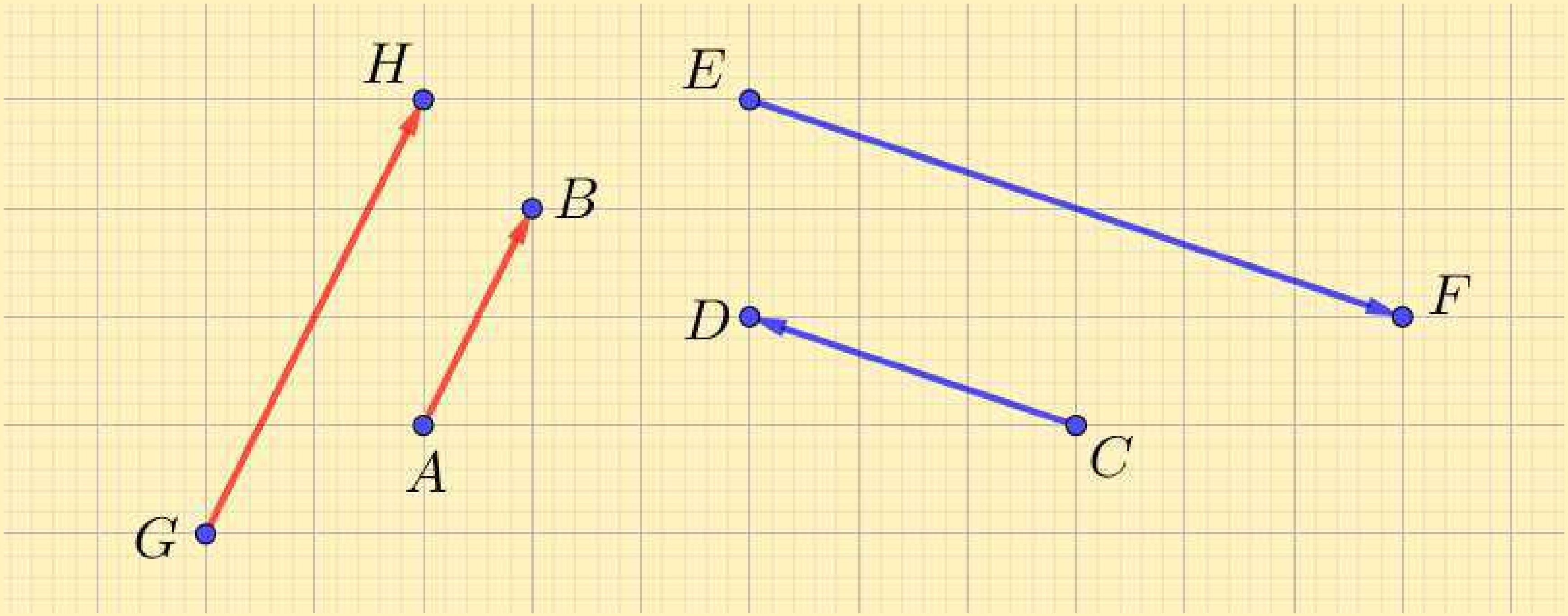
- **Sentido**: indicado por la flecha



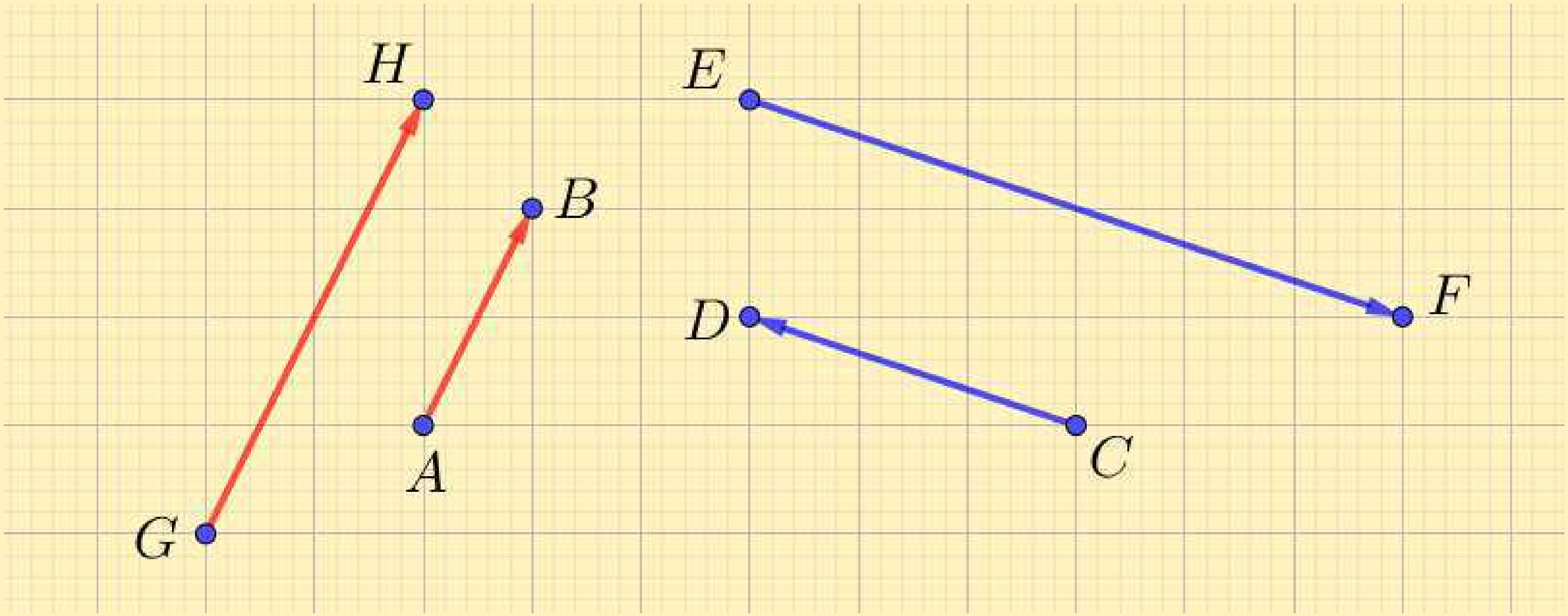
$\overrightarrow{AB}$ tiene sentido desde A hacia B

No definimos sentido para segmentos dirigidos de módulo 0

Segmentos Dirigidos



Segmentos Dirigidos

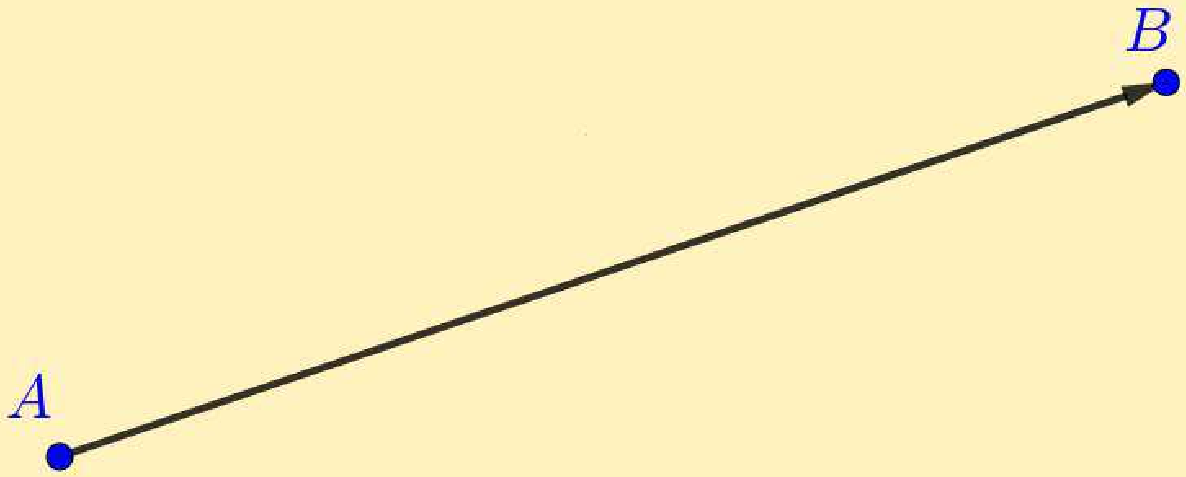


$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{GH}$ tienen el mismo sentido

$\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{EF}$ tienen sentidos opuestos

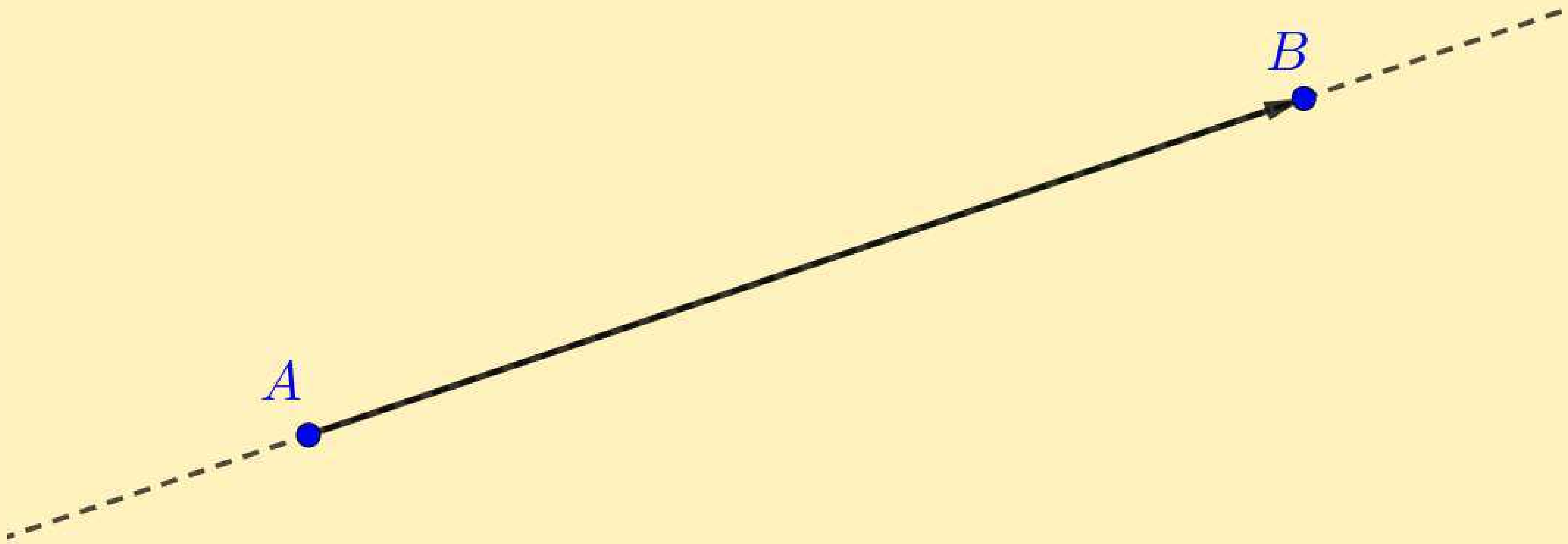
Segmentos Dirigidos

Resumiendo



Segmentos Dirigidos

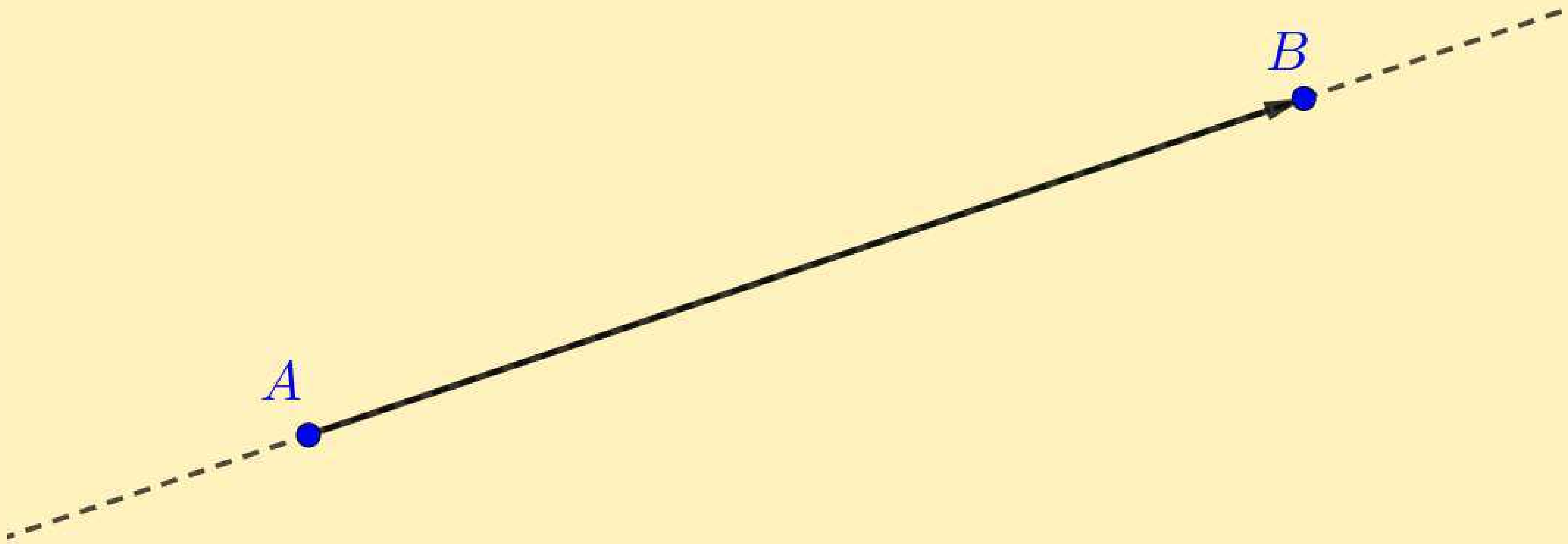
Resumiendo



Dirección de $\overrightarrow{AB}$: determinada por recta $\overleftrightarrow{AB}$

Segmentos Dirigidos

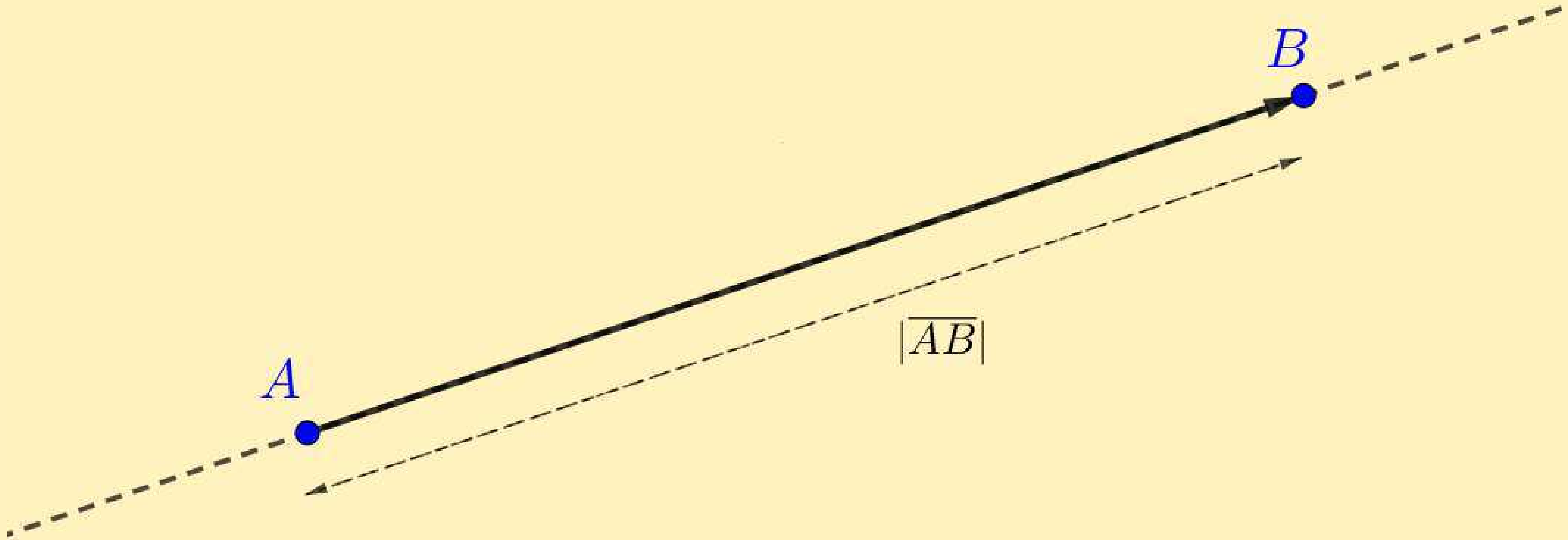
Resumiendo



Dirección de $\overrightarrow{AB}$: determinada por recta $\overleftrightarrow{AB}$
Sentido de $\overrightarrow{AB}$: desde A hacia B

Segmentos Dirigidos

Resumiendo



Dirección de $\overrightarrow{AB}$: determinada por recta $\overleftrightarrow{AB}$
Sentido de $\overrightarrow{AB}$: desde A hacia B
Módulo de $\overrightarrow{AB}$: $|\overline{AB}|$

Segmentos Dirigidos

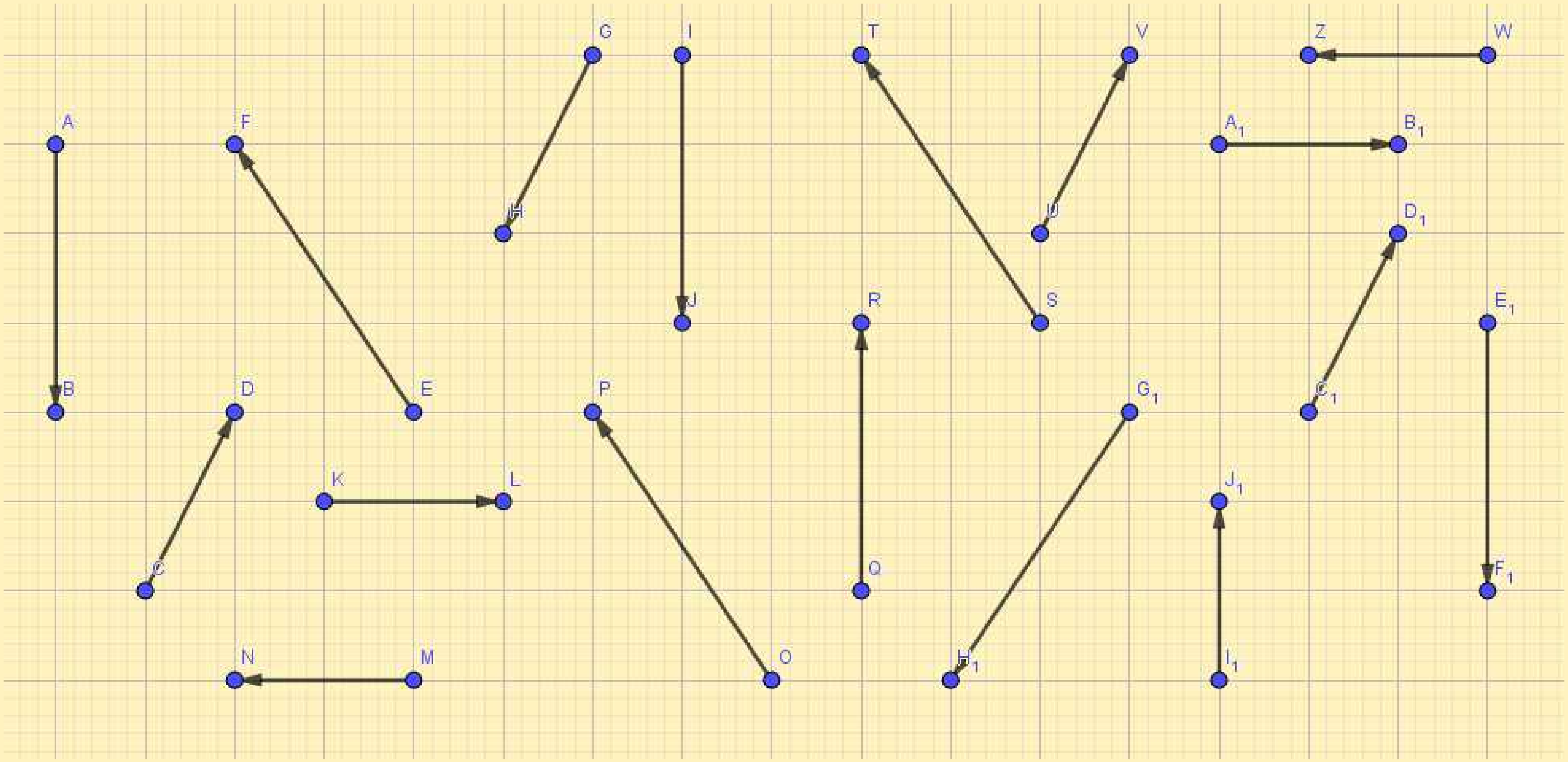
Dos segmentos dirigidos son **iguales** si

- ambos tienen módulo 0

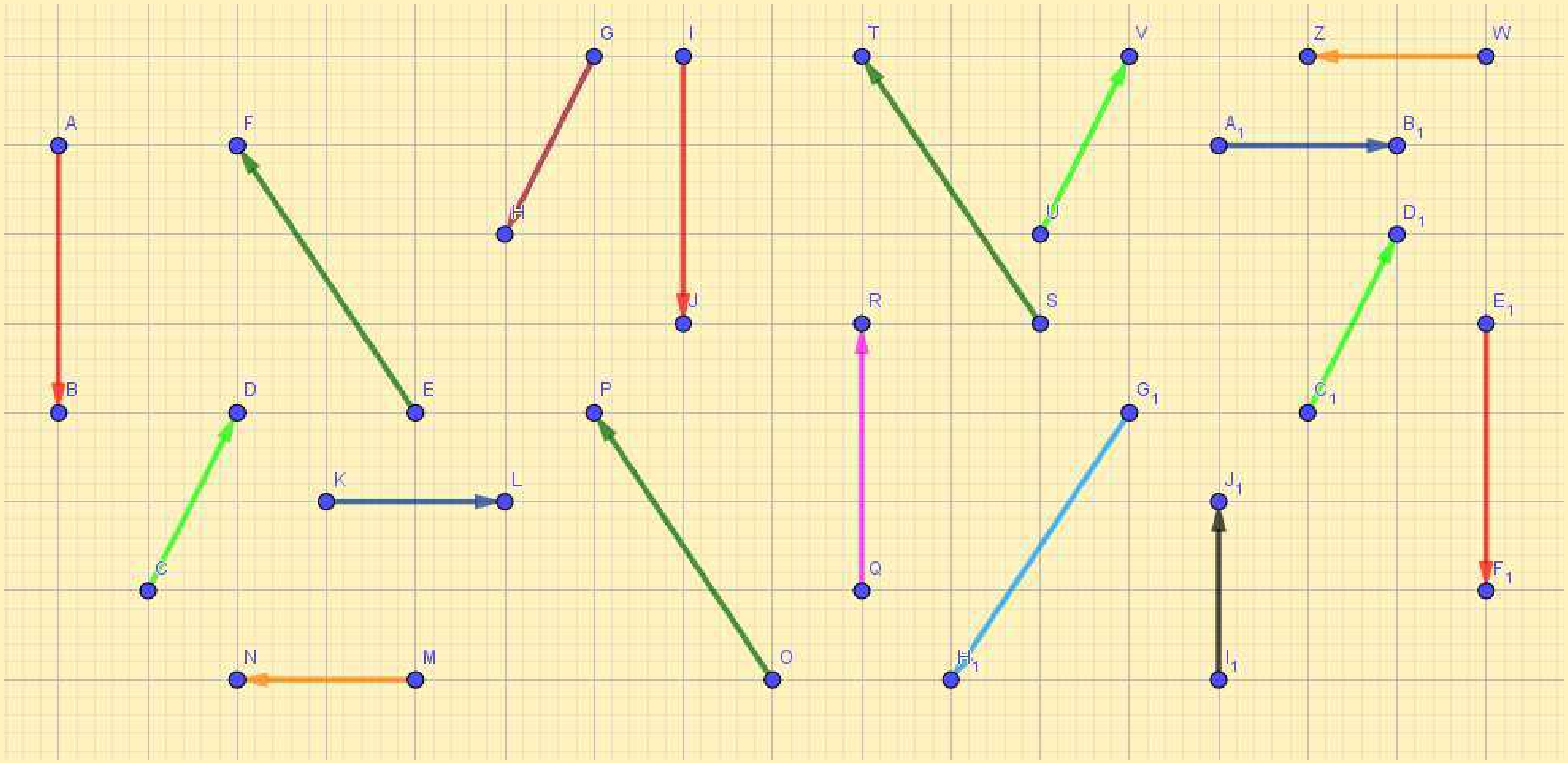
o

- tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo

Segmentos Dirigidos



Segmentos Dirigidos

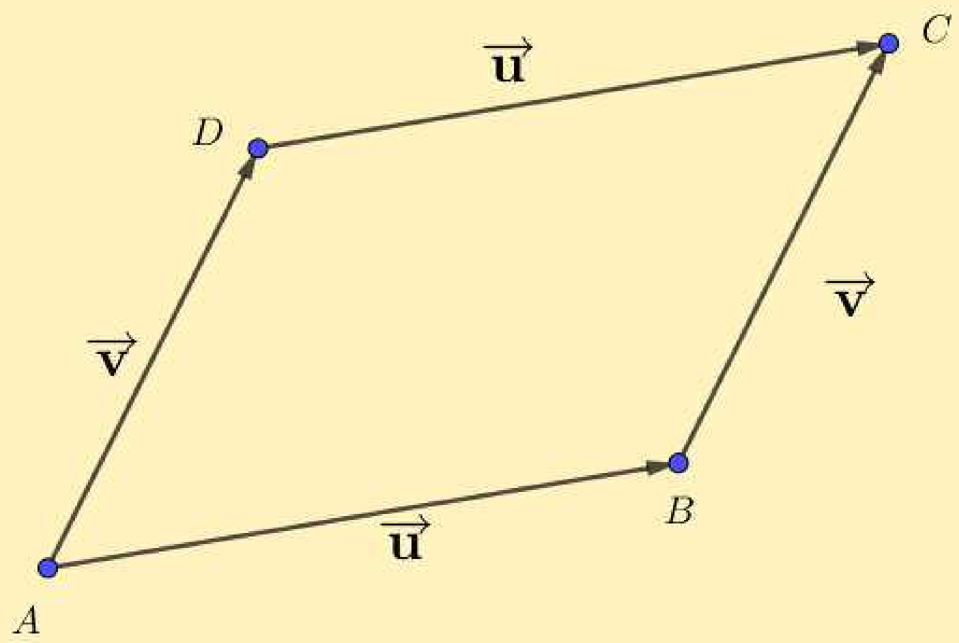


Vectores en el plano

Un **vector** es un segmento dirigido junto con la noción de igualdad recién introducida

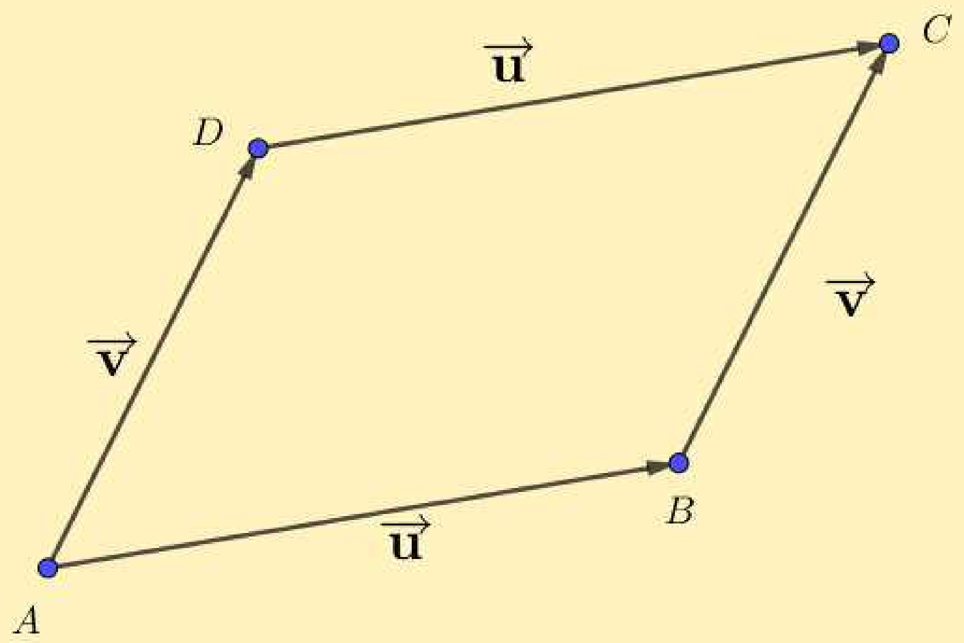
Vectores en el plano

Un **vector** es un segmento dirigido junto con la noción de igualdad recién introducida



Vectores en el plano

Un **vector** es un segmento dirigido junto con la noción de igualdad recién introducida



$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ representan el mismo vector $\vec{\mathbf{u}}$. Escribimos $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AB}$ o $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{DC}$

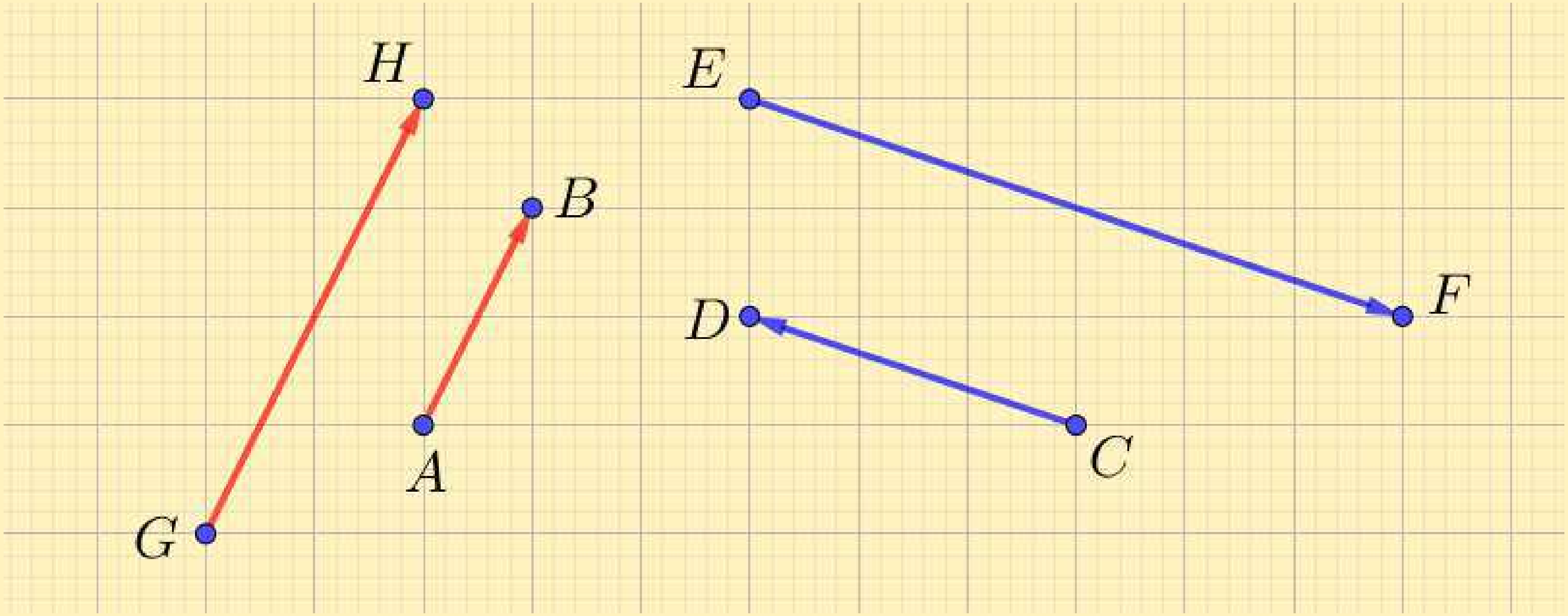
$\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ representan el mismo vector $\vec{\mathbf{v}}$ Escribimos $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{BC}$ o $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AD}$

Vectores en el plano

- Llamamos **vector nulo**, y lo denotamos $\overrightarrow{\mathrm{O}}$, al vector que está representado por cualquier segmento dirigido de módulo 0
- Todo vector no nulo está caracterizado por la **dirección**, el **sentido** y el **módulo**, que se definen como la dirección, el sentido y el módulo de cualquiera de los segmentos dirigidos que lo representan
- Dos vectores no nulos son **paralelos** o **colineales** cuando tienen la misma dirección. El vector nulo $\overrightarrow{\mathrm{O}}$ es paralelo a todo vector

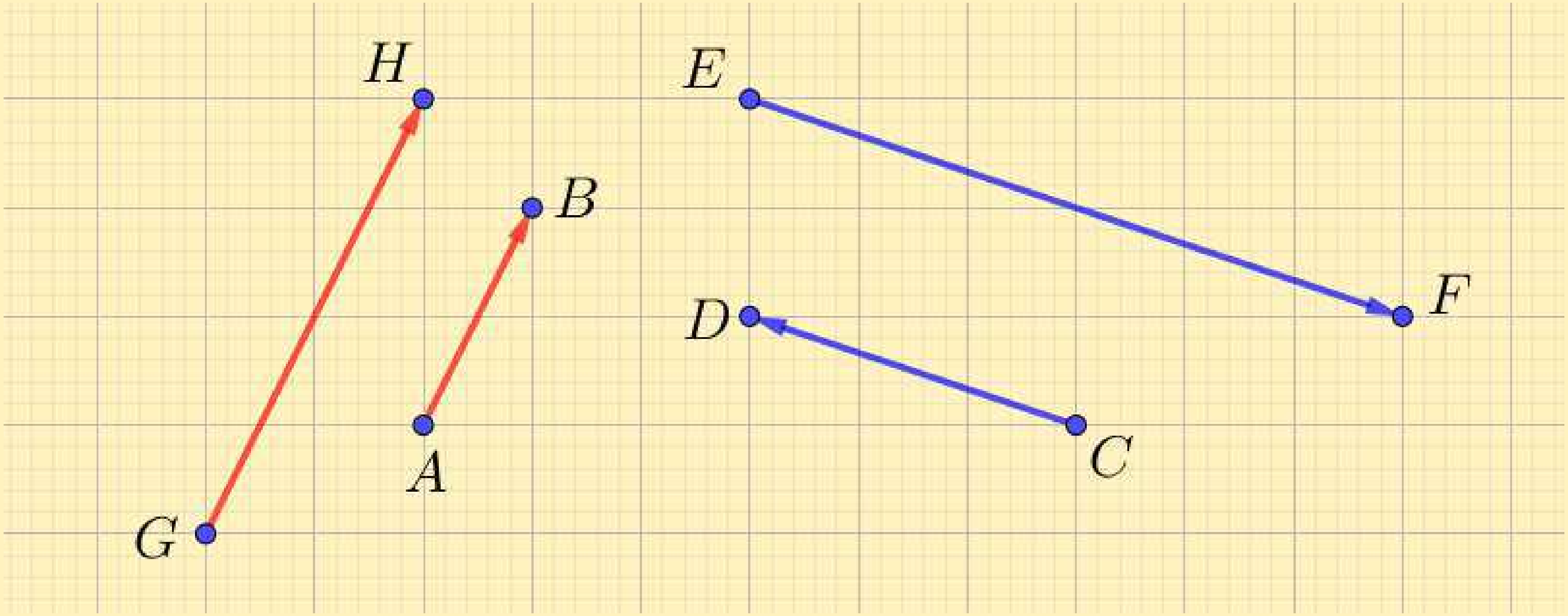
Vectores en el plano

Vectores paralelos



Vectores en el plano

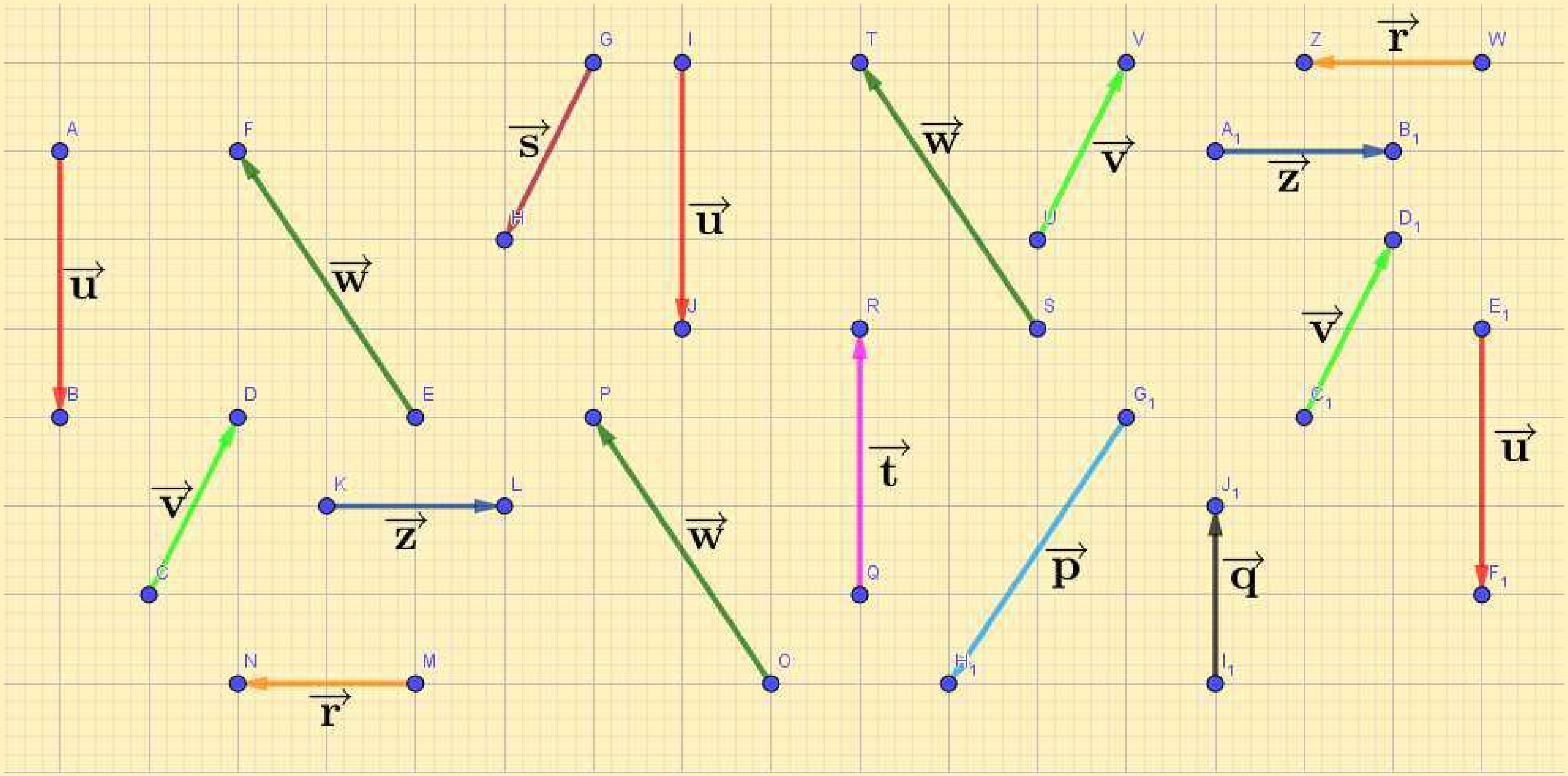
Vectores paralelos



$\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ son paralelos, $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ son paralelos, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ no son paralelos

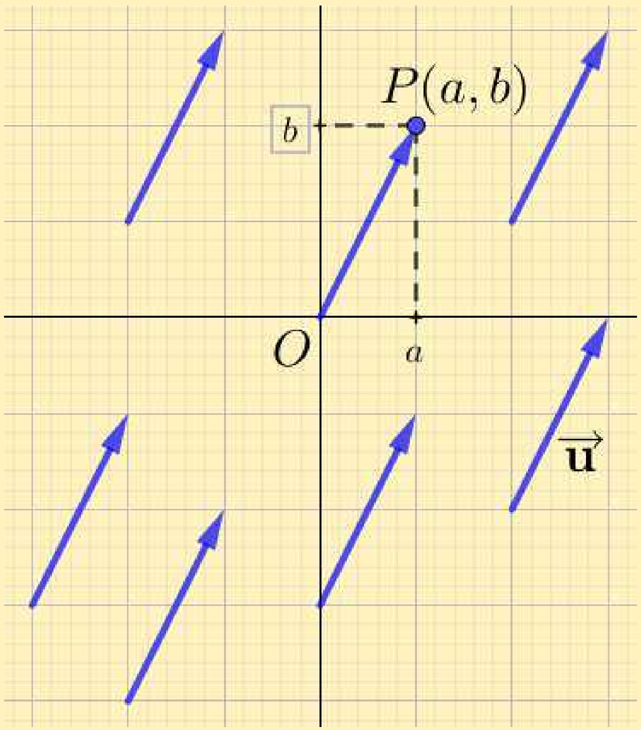
$$\overrightarrow{\mathbf{u}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{v}} \qquad \overrightarrow{\mathbf{w}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{z}} \qquad \overrightarrow{\mathbf{u}} \nparallel \overrightarrow{\mathbf{w}}$$

Vectores en el plano



Vectores en el plano

Representación geométrica



Vectores en el plano

Suma de vectores (geométrica)

Vectores en el plano

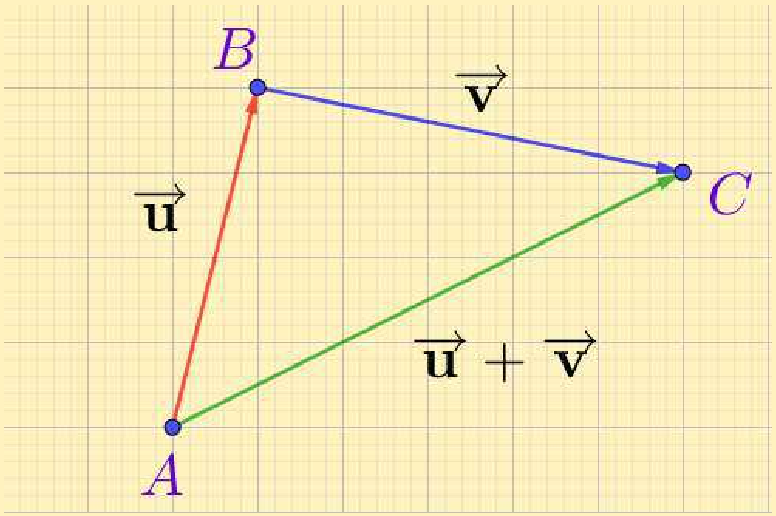
Suma de vectores (geométrica)

Supongamos que $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{BC}$. Entonces el vector **suma** de $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, que denotamos $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ es

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AC}$$

Vectores en el plano

Suma de vectores (geométrica)



Supongamos que $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{BC}$. Entonces el vector **suma** de $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, que denotamos $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ es

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AC}$$

Vectores en el plano

Multiplicación por escalares (geométrica)

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ un vector. Entonces $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$ es un vector que verifica

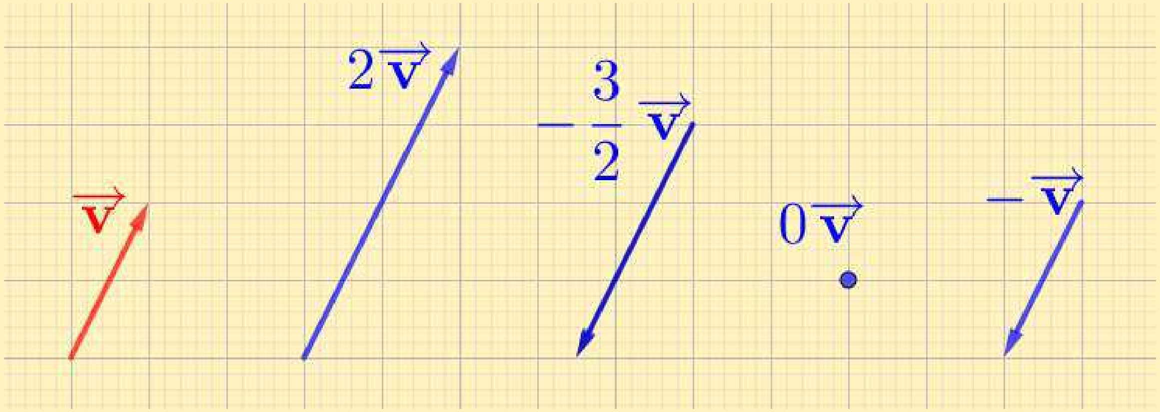
- $\left|\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}\right| = |\alpha| \left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|$
- Si $\alpha \neq 0$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{O}}$ entonces $\operatorname{dir}\left(\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \operatorname{dir}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)$
- Suponiendo $\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{O}}$, si $\alpha > 0$ entonces $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ tienen el mismo sentido, mientras que si $\alpha < 0$ entonces $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ tienen sentidos opuestos.

Vectores en el plano

Multiplicación por escalares (geométrica)

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ un vector. Entonces $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$ es un vector que verifica

- $\left|\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}\right| = |\alpha| \left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|$
- Si $\alpha \neq 0$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{O}}$ entonces dir $\left(\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) =$ dir $\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}\right)$
- Suponiendo $\overrightarrow{\mathbf{v}} \neq \overrightarrow{\mathbf{O}}$, si $\alpha > 0$ entonces $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ tienen el mismo sentido, mientras que si $\alpha < 0$ entonces $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ tienen sentidos opuestos.



Vectores en el plano

Vector opuesto y diferencia de vectores

- Dado un vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, llamamos **vector opuesto de** $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ al vector $-\overrightarrow{\mathbf{v}}$ definido por

$$-\overrightarrow{\mathbf{v}} = (-1) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

- Propiedad

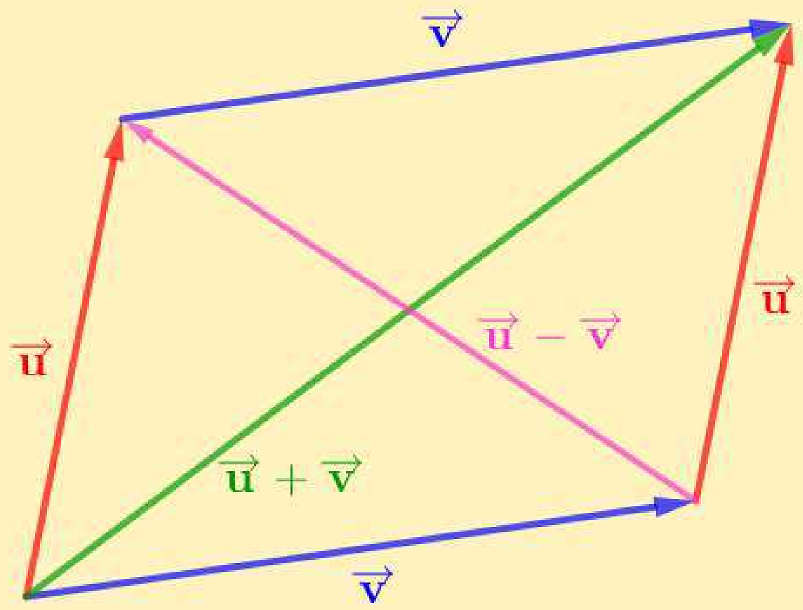
$$\overrightarrow{\mathbf{v}} + (-\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{O}}$$

- La diferencia $\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}$ de los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ se define como

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} + (-\overrightarrow{\mathbf{v}})$$

Vectores en el plano

Regla del paralelogramo



Vectores en el plano

Propiedades de la suma y el producto por escalares

Si $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ son tres vectores y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

- **Conmutativa**: $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{u}}$
- **Asociativa**: $\left(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) + \overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} + \left(\overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}}\right)$
- **Elemento neutro**: $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{O}} = \overrightarrow{\mathbf{O}} + \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}$
- **Opuestos**: $\overrightarrow{\mathbf{v}} + \left(-\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \left(-\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) + \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{O}}$
- **Distributivas**:

$$\alpha \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} + \alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = \alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} + \beta \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

- **Homogeneidad**: $\alpha \cdot \left(\beta \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = (\alpha\beta) \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}}$
- **Elemento unidad para el producto**: $1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{O}}$ si y solo si $\alpha = 0$ o $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{O}}$

Vectores en el plano

Condición de paralelismo

Dos vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, con $\overrightarrow{\mathbf{u}} \neq \overrightarrow{\mathbf{O}}$, son paralelos si y solo si existe $\alpha \neq 0$ tal que $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}}$

Vectores en el plano

Condición de paralelismo

Dos vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, con $\overrightarrow{\mathbf{u}} \neq \overrightarrow{\mathbf{O}}$, son paralelos si y solo si existe $\alpha \neq 0$ tal que $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}}$

<u>Demostración</u> (sketch)

$\Longleftarrow$) Por definición de multiplicación de un vector por un escalar

$\Longrightarrow$)

- Si $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{O}}$, tomar $\alpha = 0$
- Si $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ tienen el mismo sentido, tomar $\alpha = \frac{|\overrightarrow{\mathbf{v}}|}{|\overrightarrow{\mathbf{u}}|}$
- Si $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ tienen distintos sentidos, tomar $\alpha = -\frac{|\overrightarrow{\mathbf{v}}|}{|\overrightarrow{\mathbf{u}}|}$

Vectores en el plano

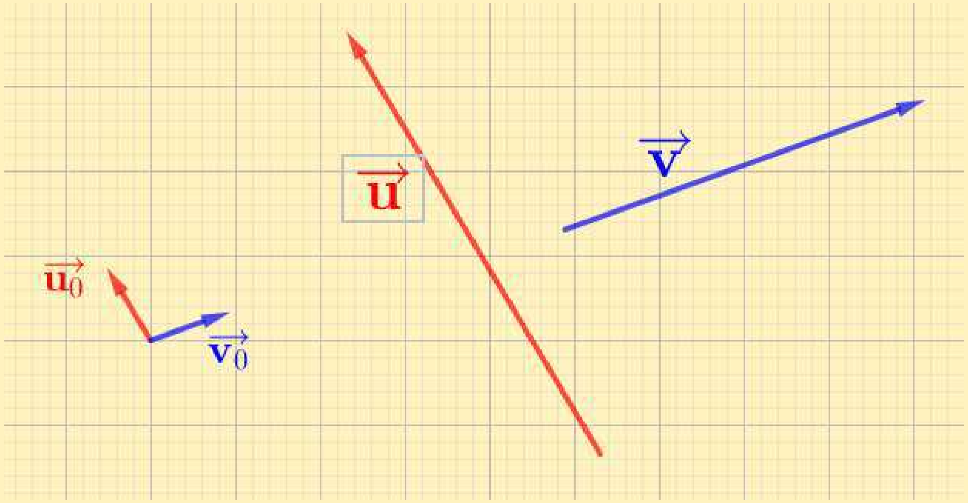
Dado un vector no nulo $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, se define el **versor** asociado $\overrightarrow{\mathbf{v}_0}$ como un vector de módulo 1 con misma dirección y mismo sentido que $\overrightarrow{\mathbf{v}}$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{v}}|}\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

Vectores en el plano

Dado un vector no nulo $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, se define el **versor** asociado $\overrightarrow{\mathbf{v}_0}$ como un vector de módulo 1 con misma dirección y mismo sentido que $\overrightarrow{\mathbf{v}}$

$$\overrightarrow{\mathbf{v}_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathbf{v}}|}\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

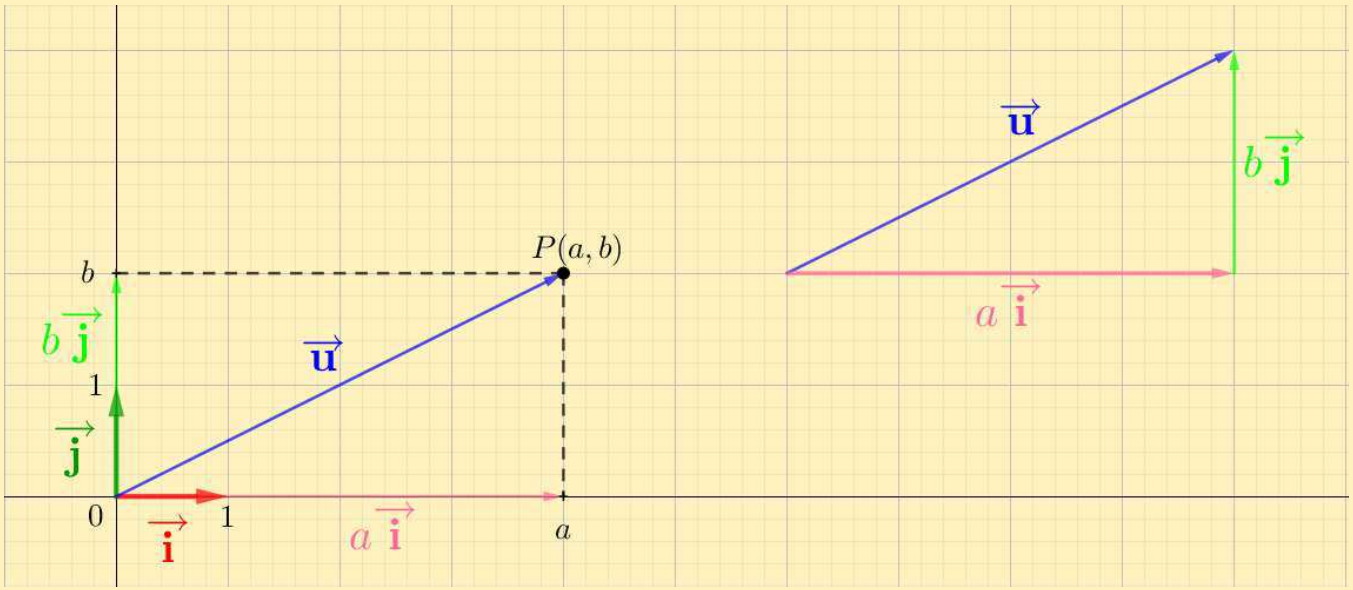


Versores Canónicos

Versores canónicos

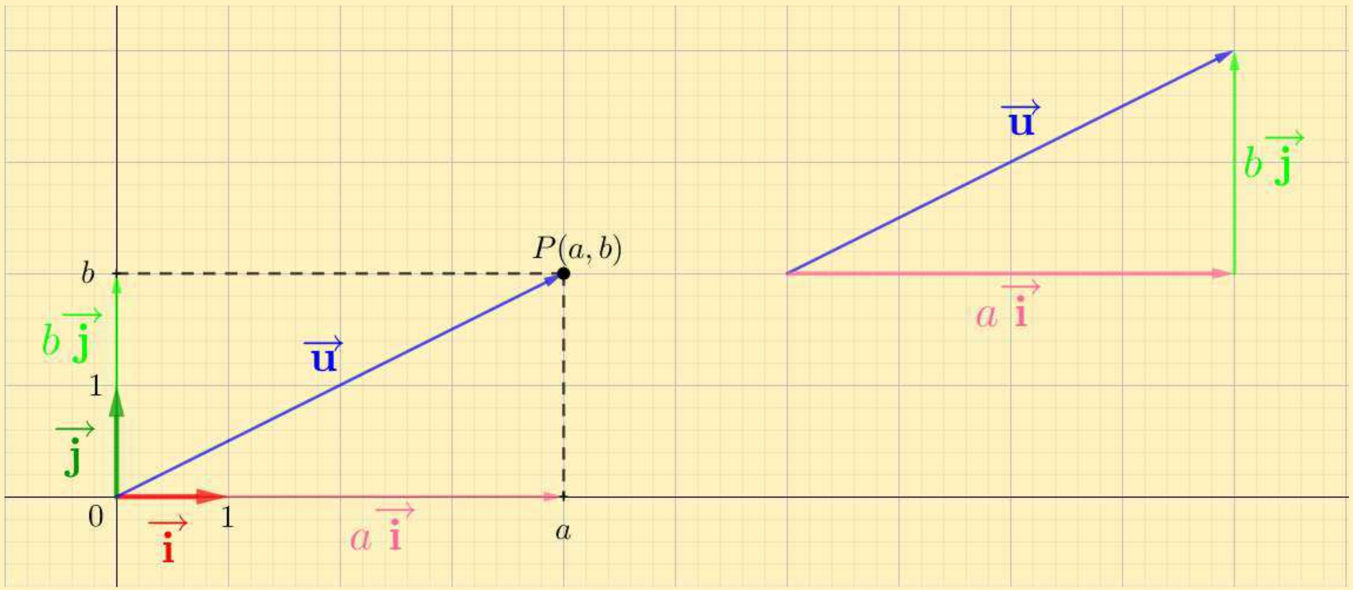
Versores Canónicos

Descomposición en componentes canónicas



Versores Canónicos

Descomposición en componentes canónicas



Si $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{OP}$ con $P(a,b)$, entonces

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = a\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + b\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$$

En este caso a y b son las **componentes** de $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y escribimos $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (a,b)$

Versores Canónicos

Algunos vectores importantes

- $\overrightarrow{\mathbf{O}} = (0,0)$
- $\overrightarrow{\mathbf{i}} = (1,0)$
- $\overrightarrow{\mathbf{j}} = (0,1)$

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Demostración (idea)

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Demostración (idea)

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad conmutativa de la suma

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Demostración (idea)

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad conmutativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}})$$

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Demostración (idea)

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad conmutativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}})$$

Propiedad asociativa de la suma

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Demostración (idea)

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad conmutativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}})$$

Propiedad asociativa de la suma

$$= u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + (u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}}$$

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Demostración (idea)

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad conmutativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}})$$

Propiedad asociativa de la suma

$$= u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + (u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}}$$

Propiedades conmutativa y asociativa de la suma

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Demostración (idea)

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad conmutativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}})$$

Propiedad asociativa de la suma

$$= u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + (u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}}$$

Propiedades conmutativa y asociativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}}) + (u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Demostración (idea)

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad conmutativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}})$$

Propiedad asociativa de la suma

$$= u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + (u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}}$$

Propiedades conmutativa y asociativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}}) + (u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad distributiva

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Demostración (idea)

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad conmutativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}})$$

Propiedad asociativa de la suma

$$= u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + (u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}}$$

Propiedades conmutativa y asociativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}}) + (u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad distributiva

$$= (u_1 + v_1) \overrightarrow{\mathbf{i}} + (u_2 + v_2) \overrightarrow{\mathbf{j}}$$

Operaciones con componentes

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, entonces

- $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- $\alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

Demostración (idea)

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad conmutativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + (v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}})$$

Propiedad asociativa de la suma

$$= u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + (u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}}) + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}}$$

Propiedades conmutativa y asociativa de la suma

$$= (u_1 \overrightarrow{\mathbf{i}} + v_1 \overrightarrow{\mathbf{i}}) + (u_2 \overrightarrow{\mathbf{j}} + v_2 \overrightarrow{\mathbf{j}})$$

Propiedad distributiva

$$= (u_1 + v_1) \overrightarrow{\mathbf{i}} + (u_2 + v_2) \overrightarrow{\mathbf{j}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Operaciones con componentes

Paralelismo de vectores por componentes

Los vectores en el plano **no nulos** $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ son paralelos si $u_1 = v_1 = 0$ o $u_2 = v_2 = 0$ o

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$$

Operaciones con componentes

Paralelismo de vectores por componentes

Los vectores en el plano **no nulos** $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ son paralelos si $u_1 = v_1 = 0$ o $u_2 = v_2 = 0$ o

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$$