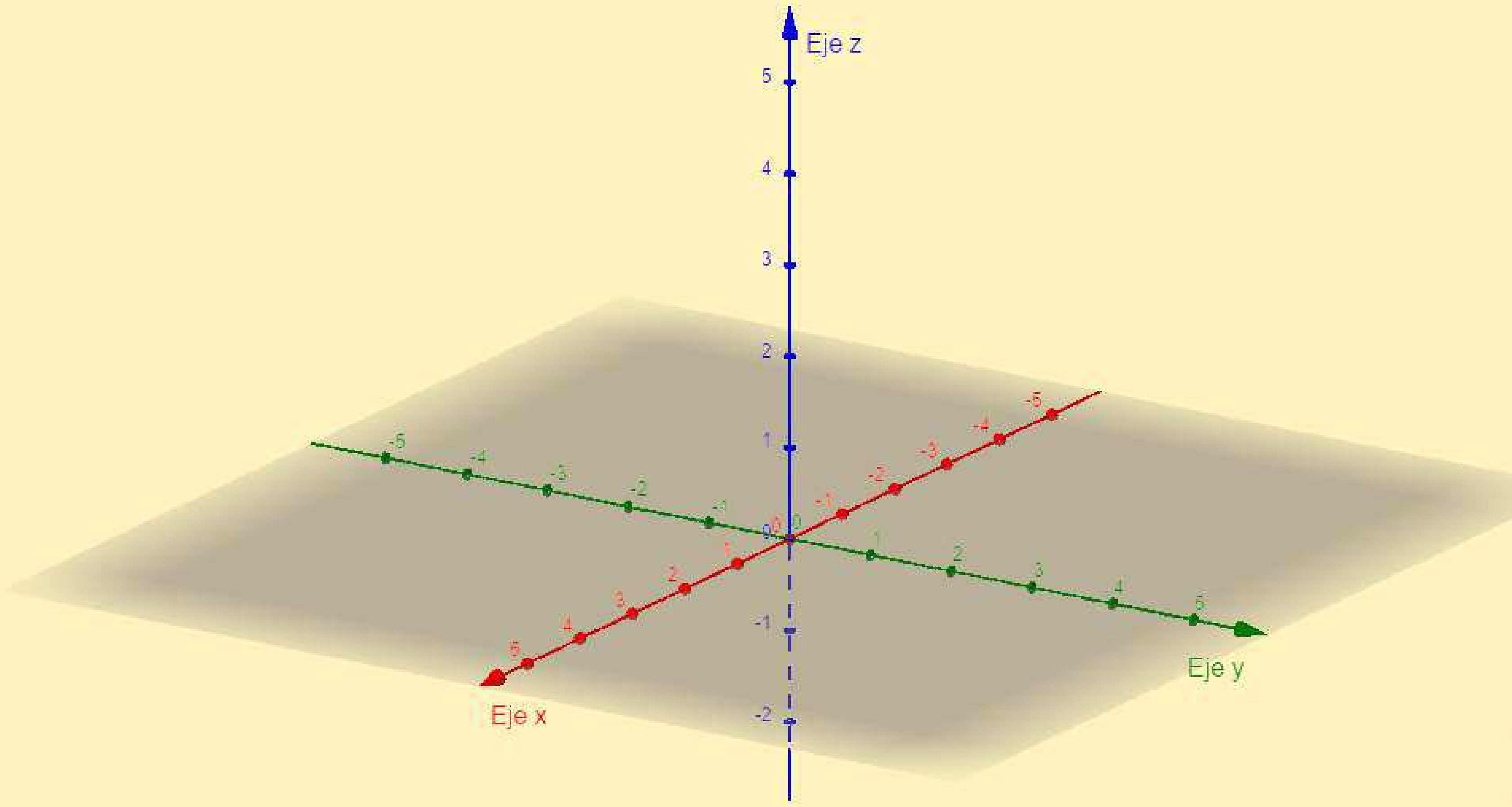
Vectores Parte II

https://fceia.unr.edu.ar/~ariel/

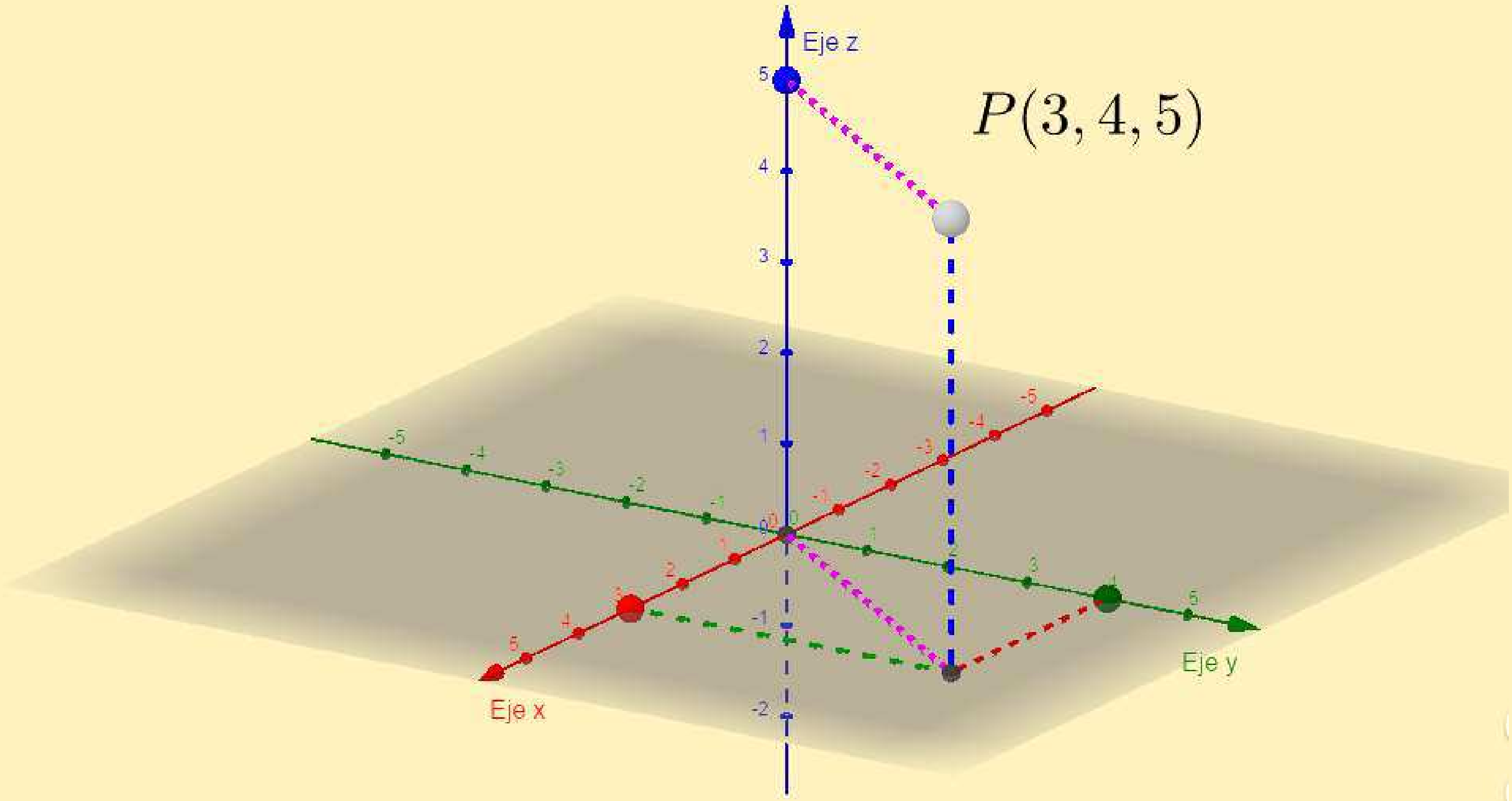
March 14, 2019

Outline

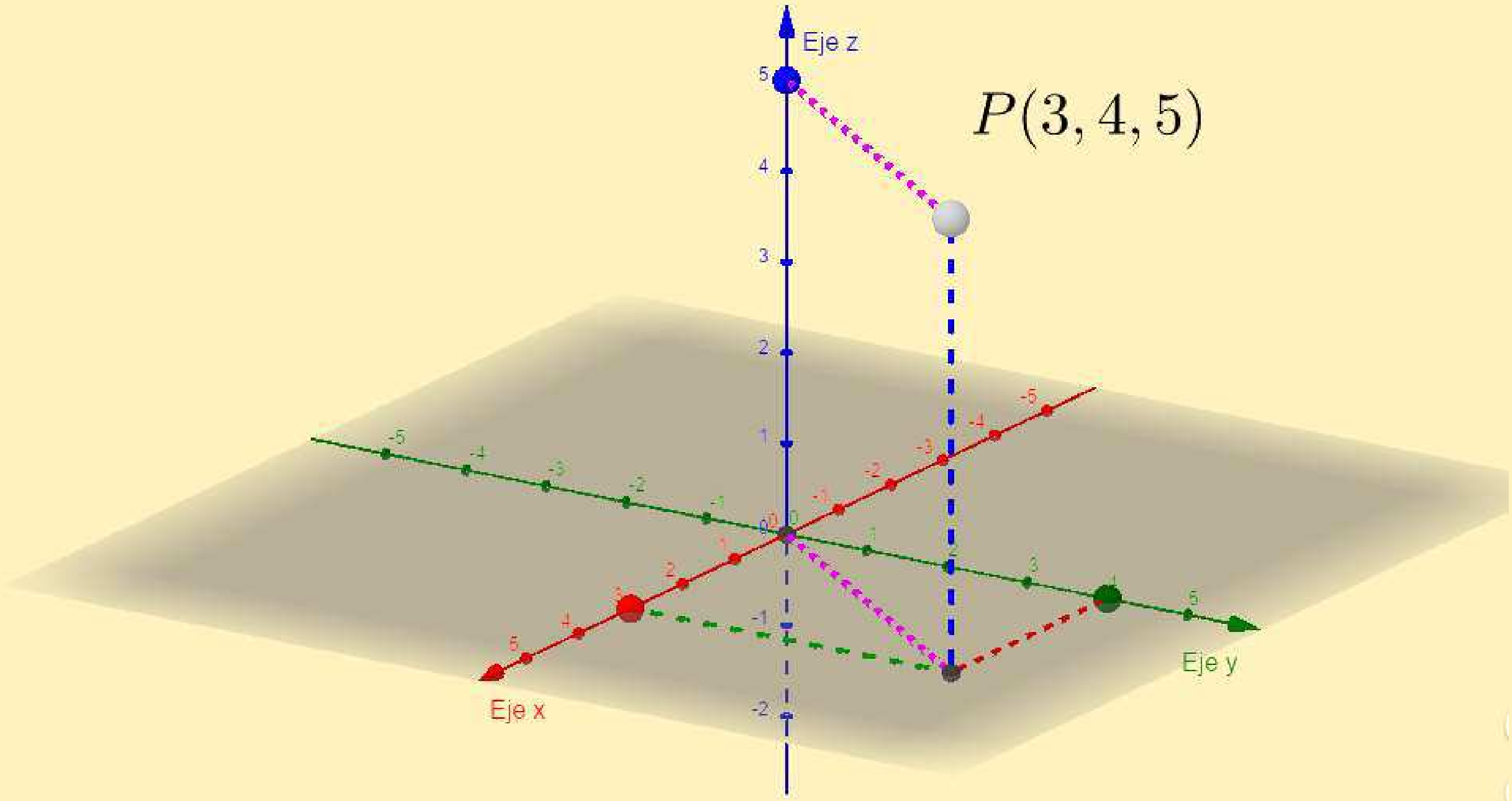
Representación geométrica en $\mathbb{R}^3$



Representación geométrica en $\mathbb{R}^3$



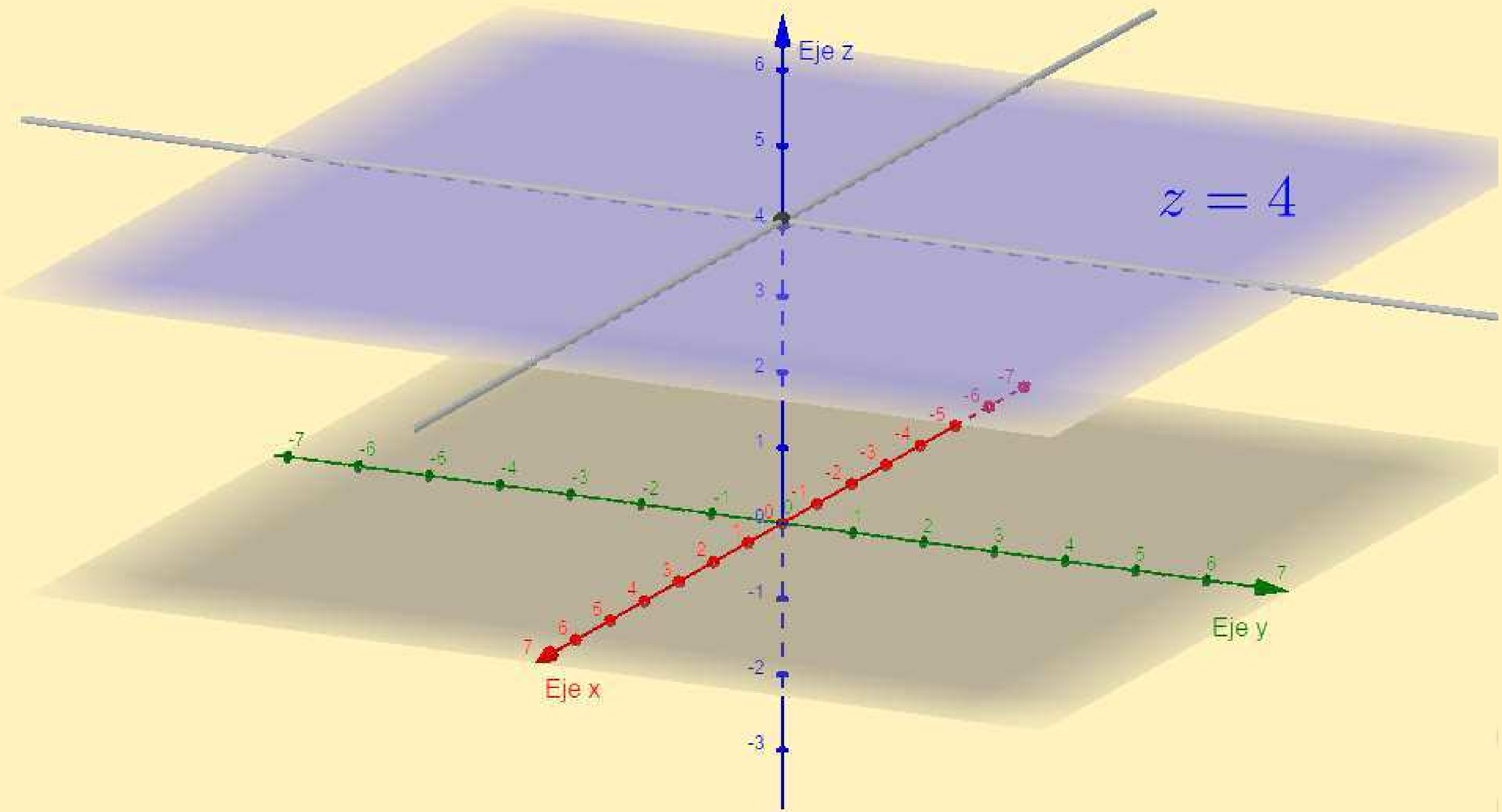
Representación geométrica en $\mathbb{R}^3$



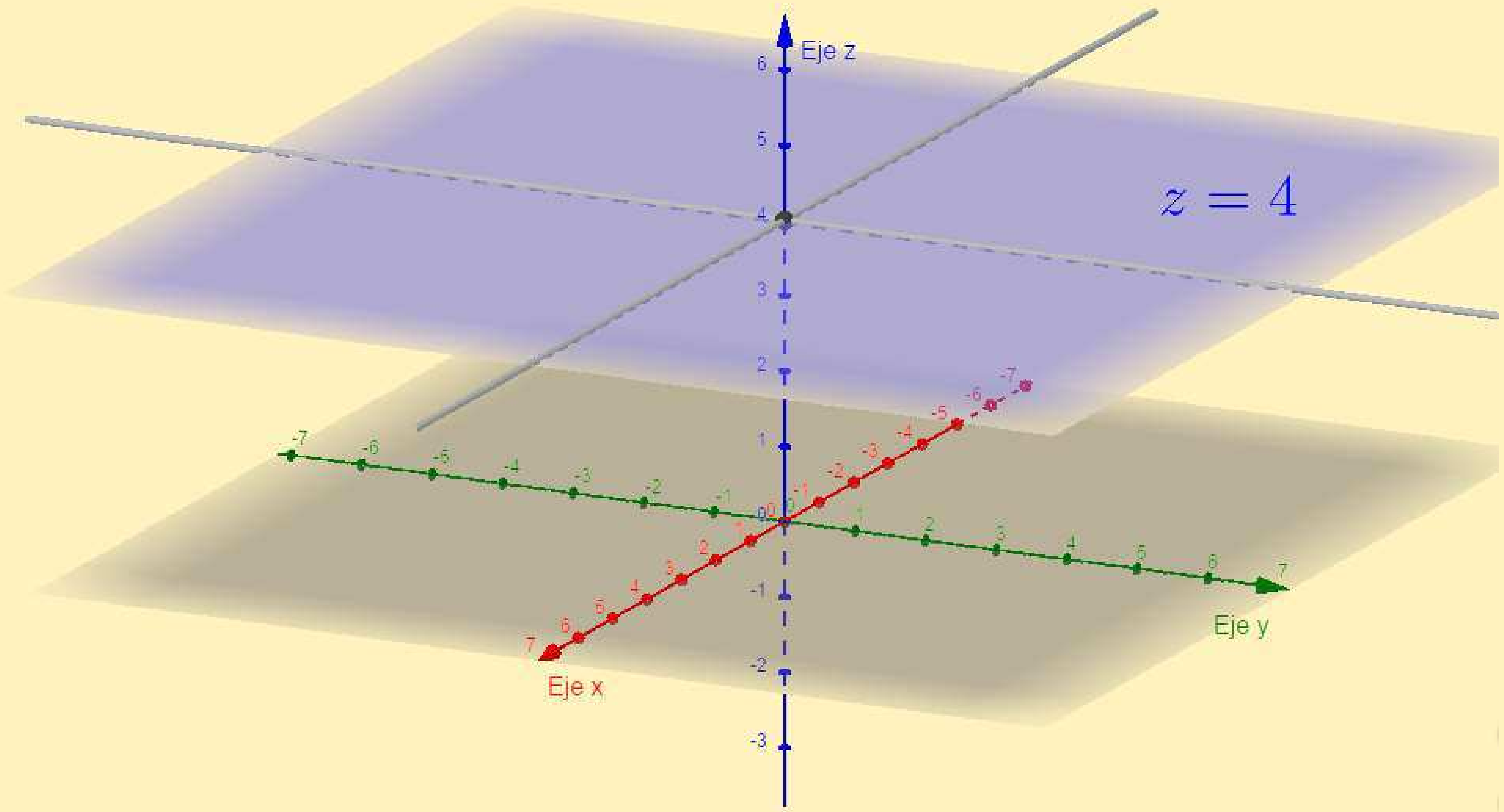
Un punto en el espacio está determinado por tres coordenadas

$$P(a,b,c)$$

Representación geométrica en $\mathbb{R}^3$



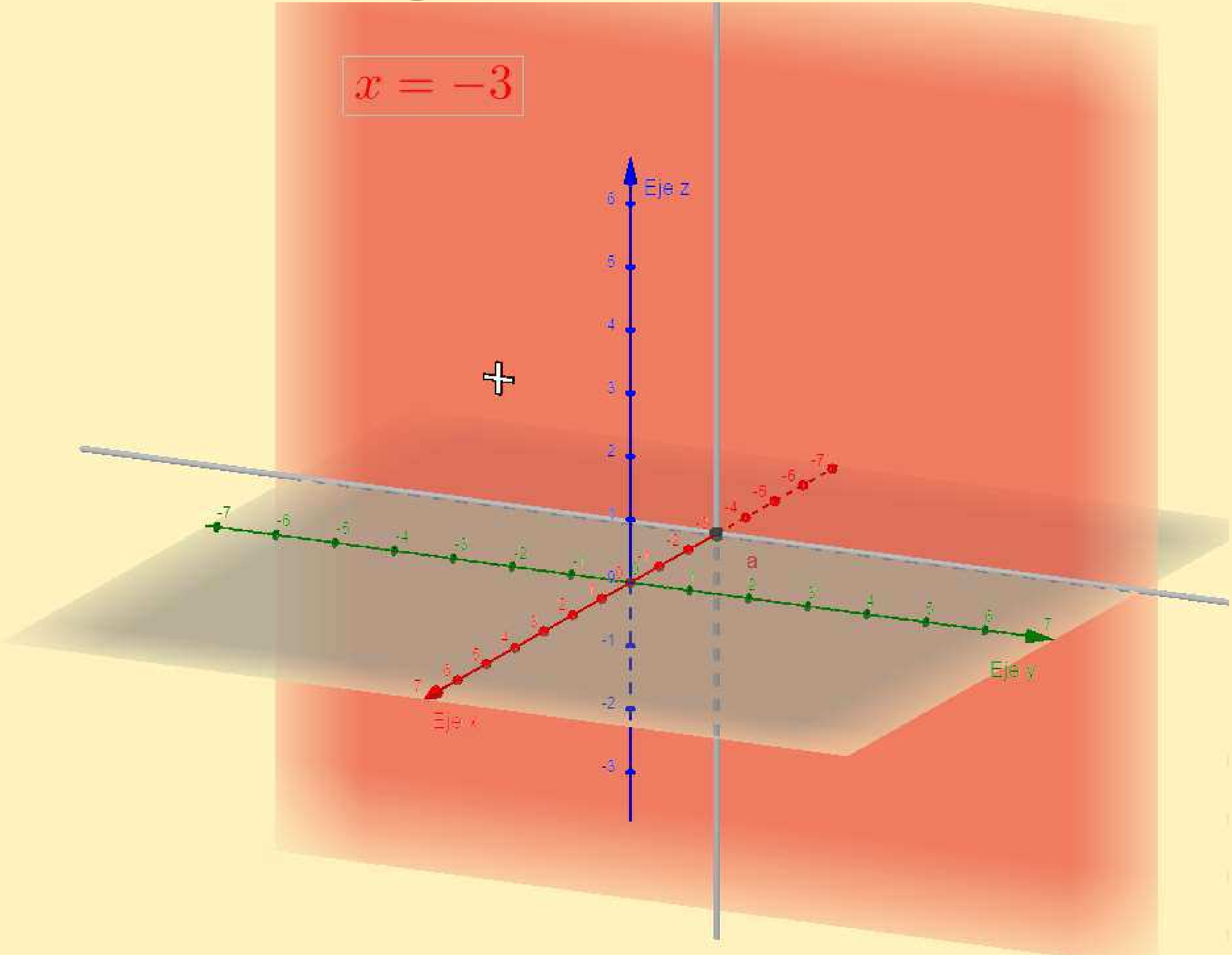
Representación geométrica en $\mathbb{R}^3$



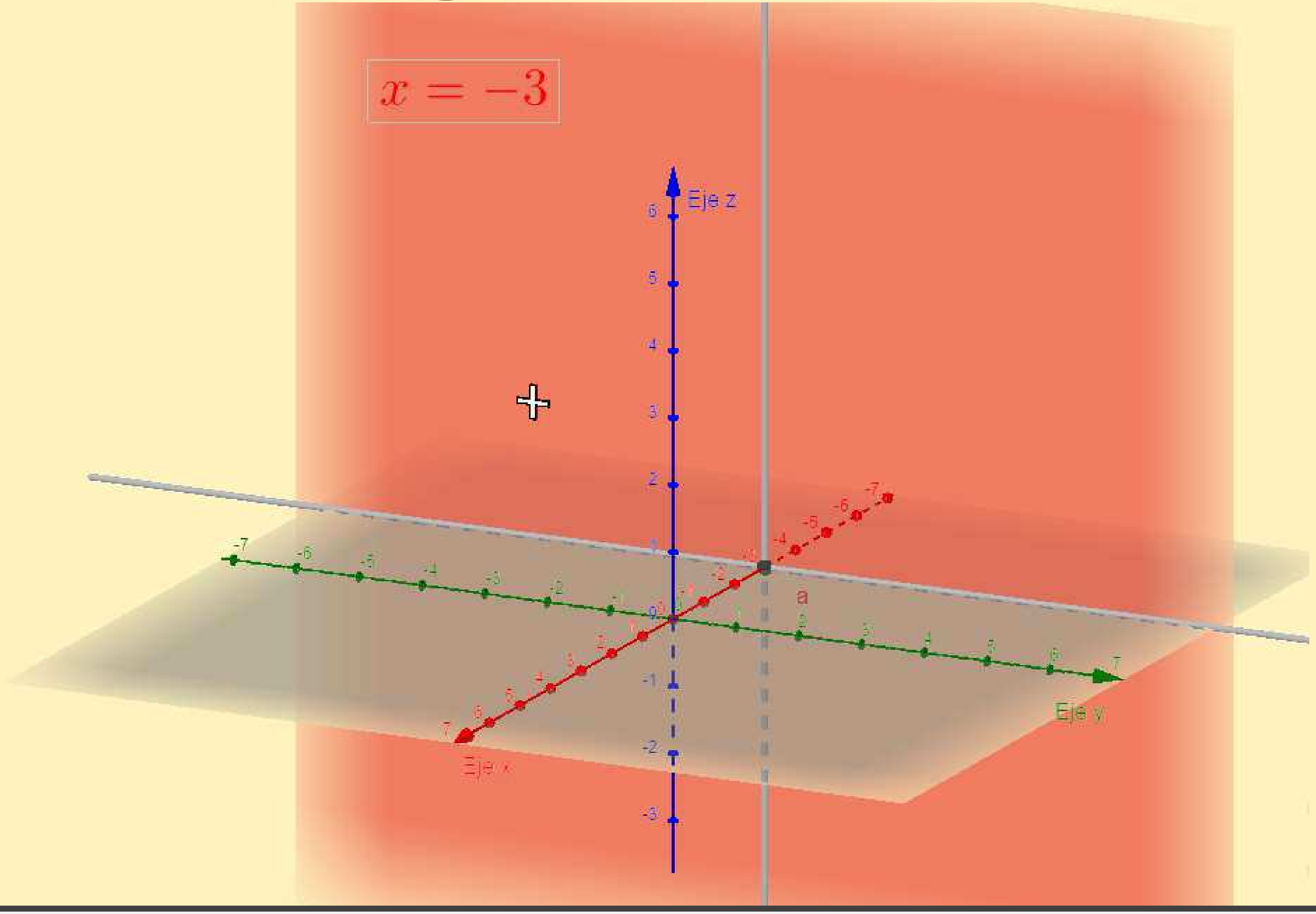
Plano horizontal $z = c$

$$\Pi_z = \{(x, y, z) : z = c\}$$

Representación geométrica en $\mathbb{R}^3$



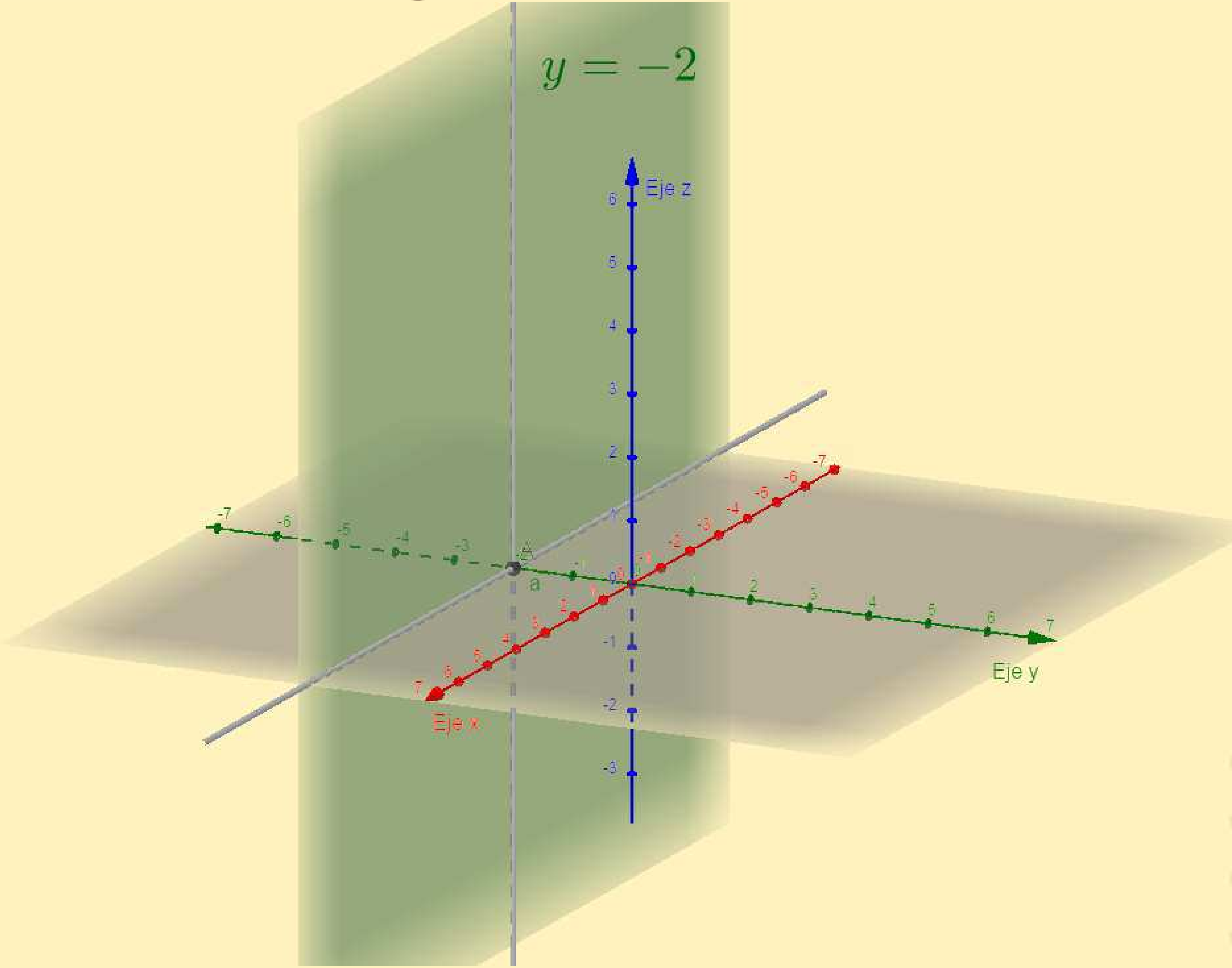
Representación geométrica en $\mathbb{R}^3$



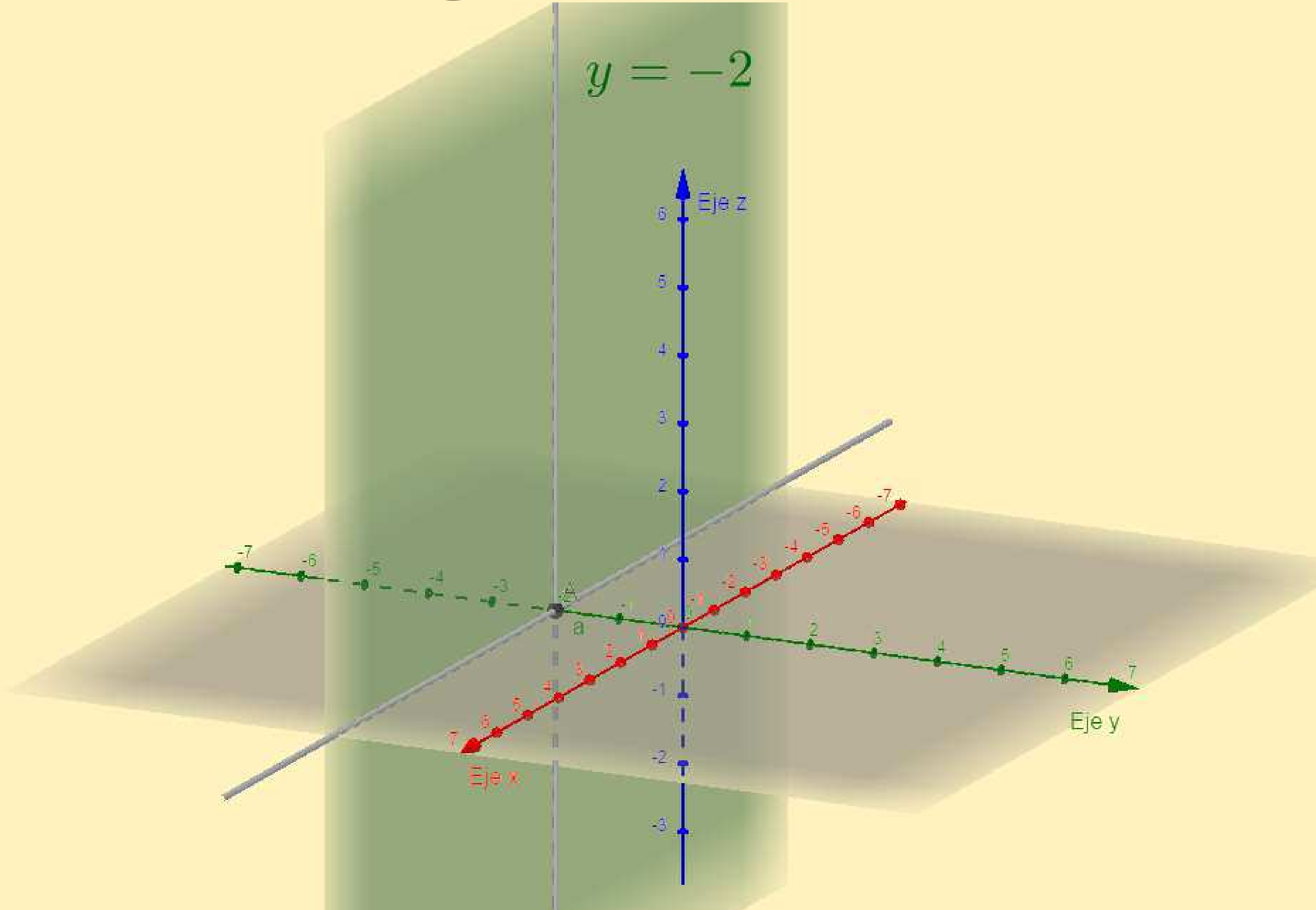
Plano vertical $x = a$

$$\Pi_x = \{(x, y, z) : x = a\}$$

Representación geométrica en $\mathbb{R}^3$



Representación geométrica en $\mathbb{R}^3$



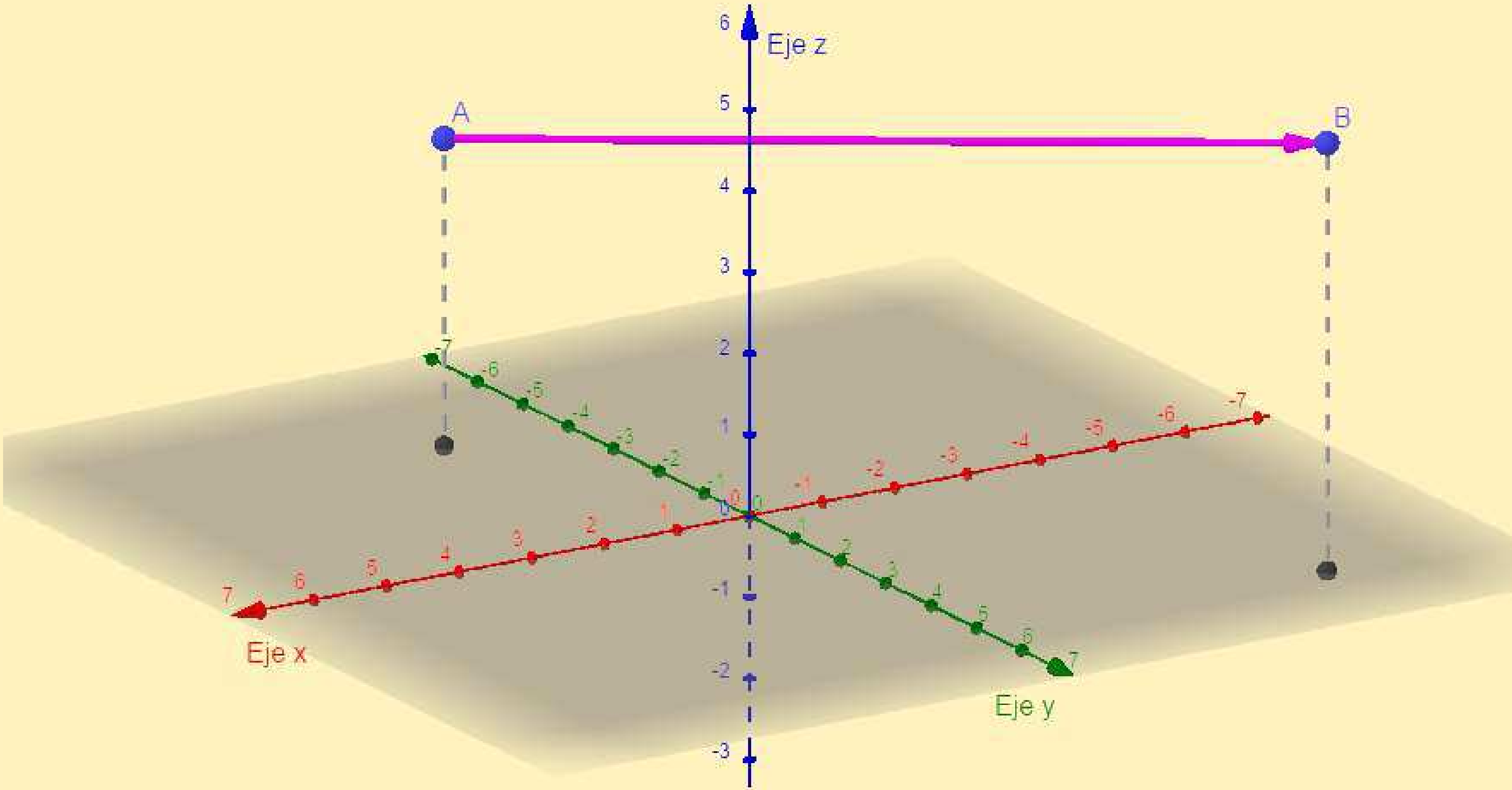
Plano vertical $y = b$

$$\Pi_y = \{(x, y, z) : y = b\}$$

Vectores en $\mathbb{R}^3$

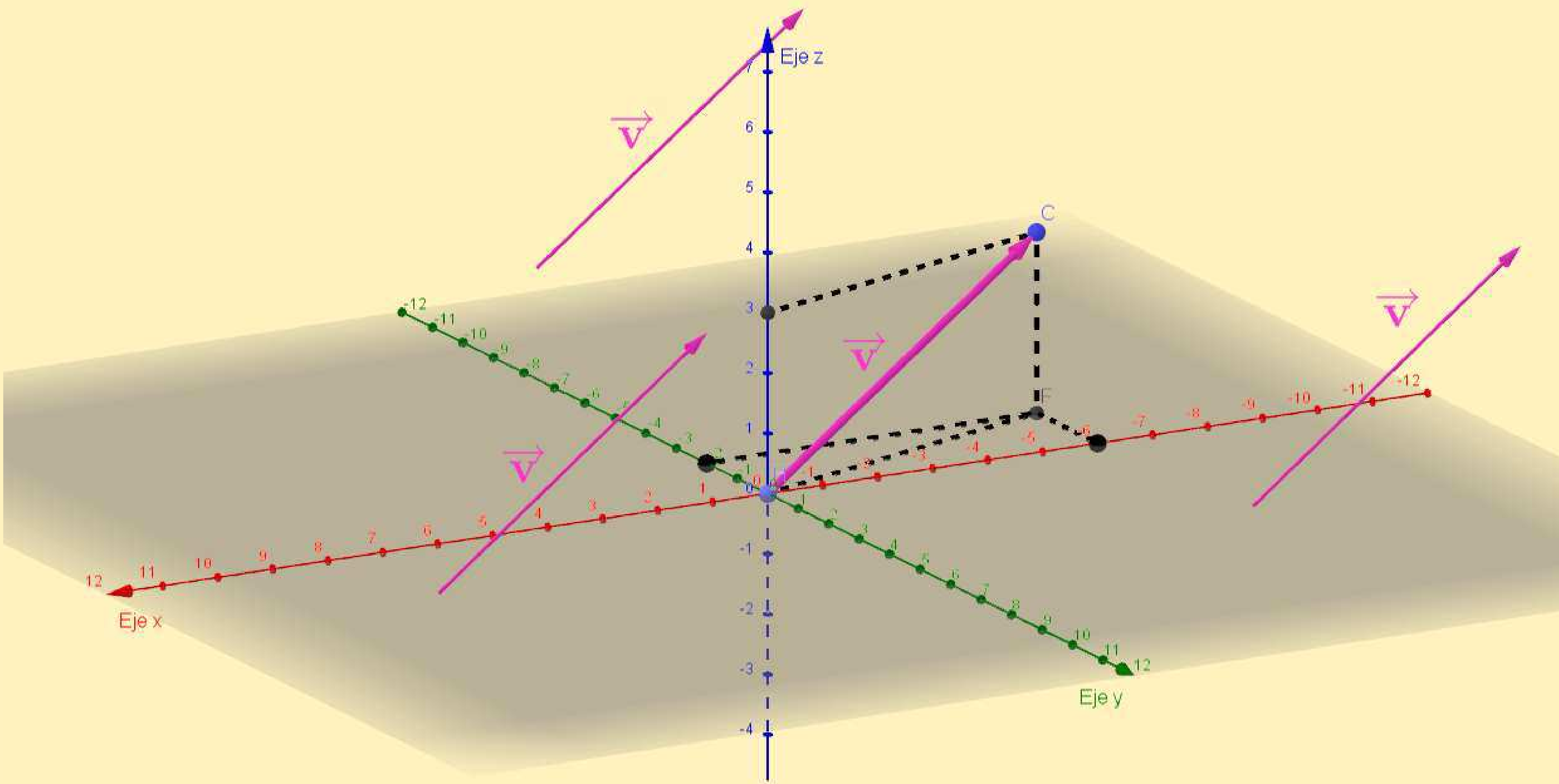
- En $\mathbb{R}^3$ definimos **segmento dirigido** como lo hicimos en el plano, es un segmento con un punto inicial y final
- Cada segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ en $\mathbb{R}^3$ está caracterizado por su **módulo** $|\overrightarrow{AB}|$, su **dirección** y **sentido**
- Dos segmentos dirigidos en $\mathbb{R}^3$ **son iguales** si coinciden en módulo, dirección y sentido

Vectores en $\mathbb{R}^3$



Como en el plano, un vector en $\mathbb{R}^3$ es un segmento dirigido junto con la noción de igualdad

Vectores en $\mathbb{R}^3$

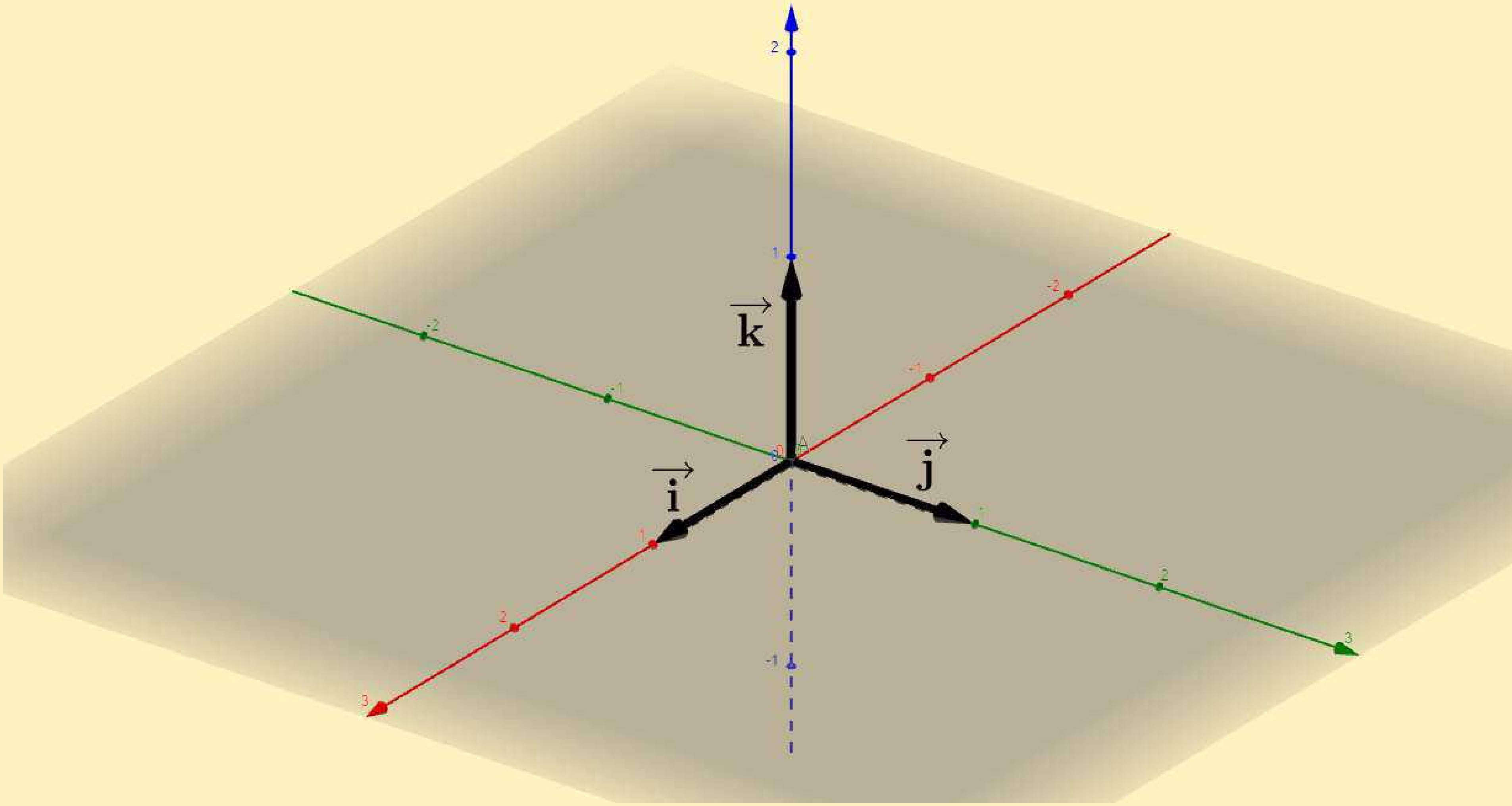


Vectores en $\mathbb{R}^3$

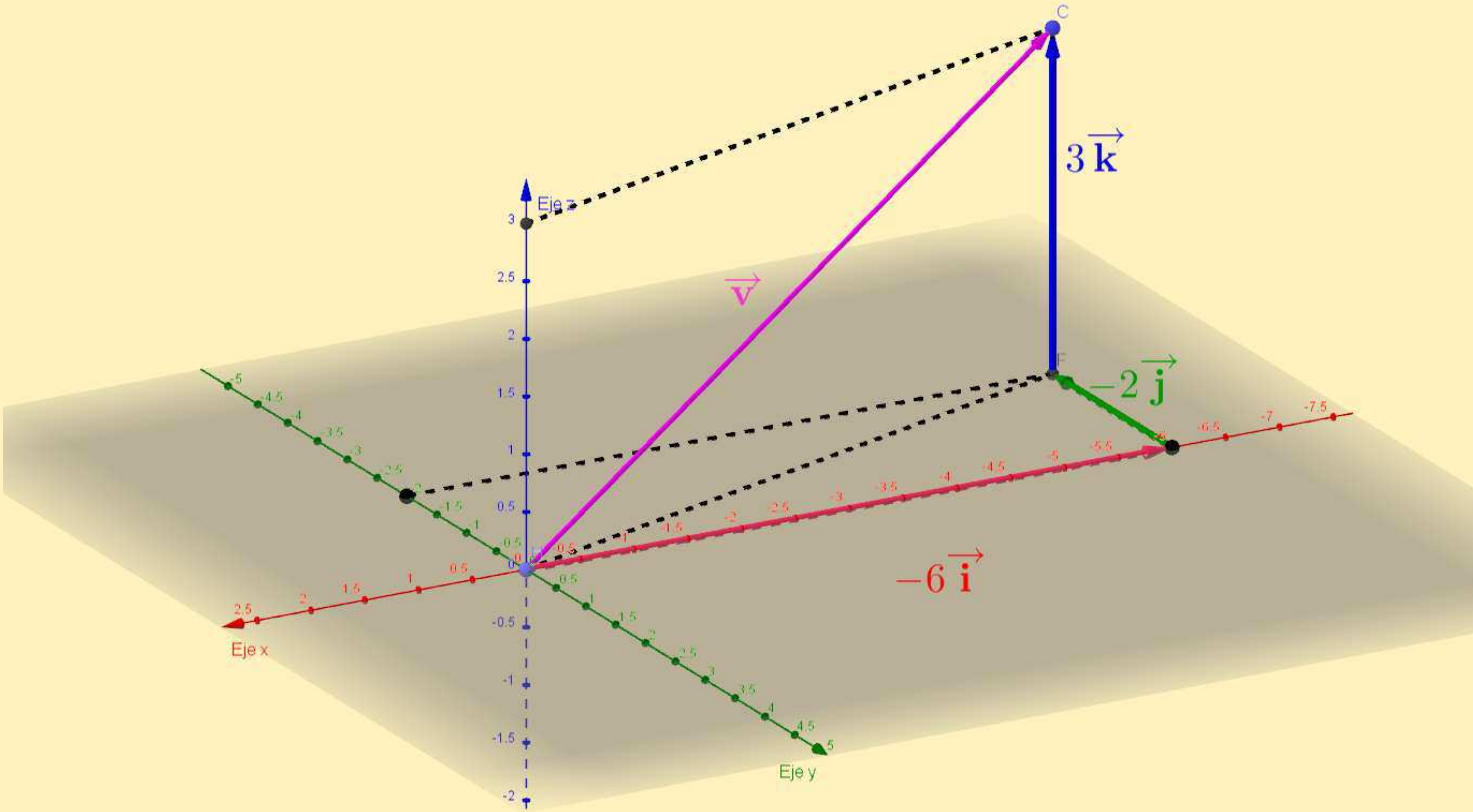
- La suma y la multiplicación por escalares para vectores en $\mathbb{R}^3$ se definen como en el caso de vectores en el plano y verifican las mismas propiedades: suma conmutativa, asociativa, existe elemento neutro $\vec{\mathbf{O}}$, existen opuestos, homogeneidad del producto por escalares, propiedades distributivas
- Vale la propiedad del paralelogramo: Las diagonales representan la suma y la diferencia de los vectores de sus lados

Descomposición canónica en $\mathbb{R}^3$

Base canónica



Descomposición canónica en $\mathbb{R}^3$



Todo vector se puede descomponer como

$$\vec{\mathbf{v}} = a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Operaciones por componentes

- Si
$$\vec{\mathbf{v}} = a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$
decimos que a, b y c son las componentes de $\vec{\mathbf{v}}$, y escribimos
$$\vec{\mathbf{v}} = (a, b, c)$$

Operaciones por componentes

- Si
$$\vec{\mathbf{v}} = a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$
decimos que a, b y c son las componentes de $\vec{\mathbf{v}}$, y escribimos
$$\vec{\mathbf{v}} = (a, b, c)$$

- Ejemplos
$$\vec{\mathbf{O}} = (0,0,0) \quad \vec{\mathbf{i}} = (1,0,0) \quad \vec{\mathbf{j}} = (0,1,0) \quad \vec{\mathbf{k}} = (0,0,1)$$

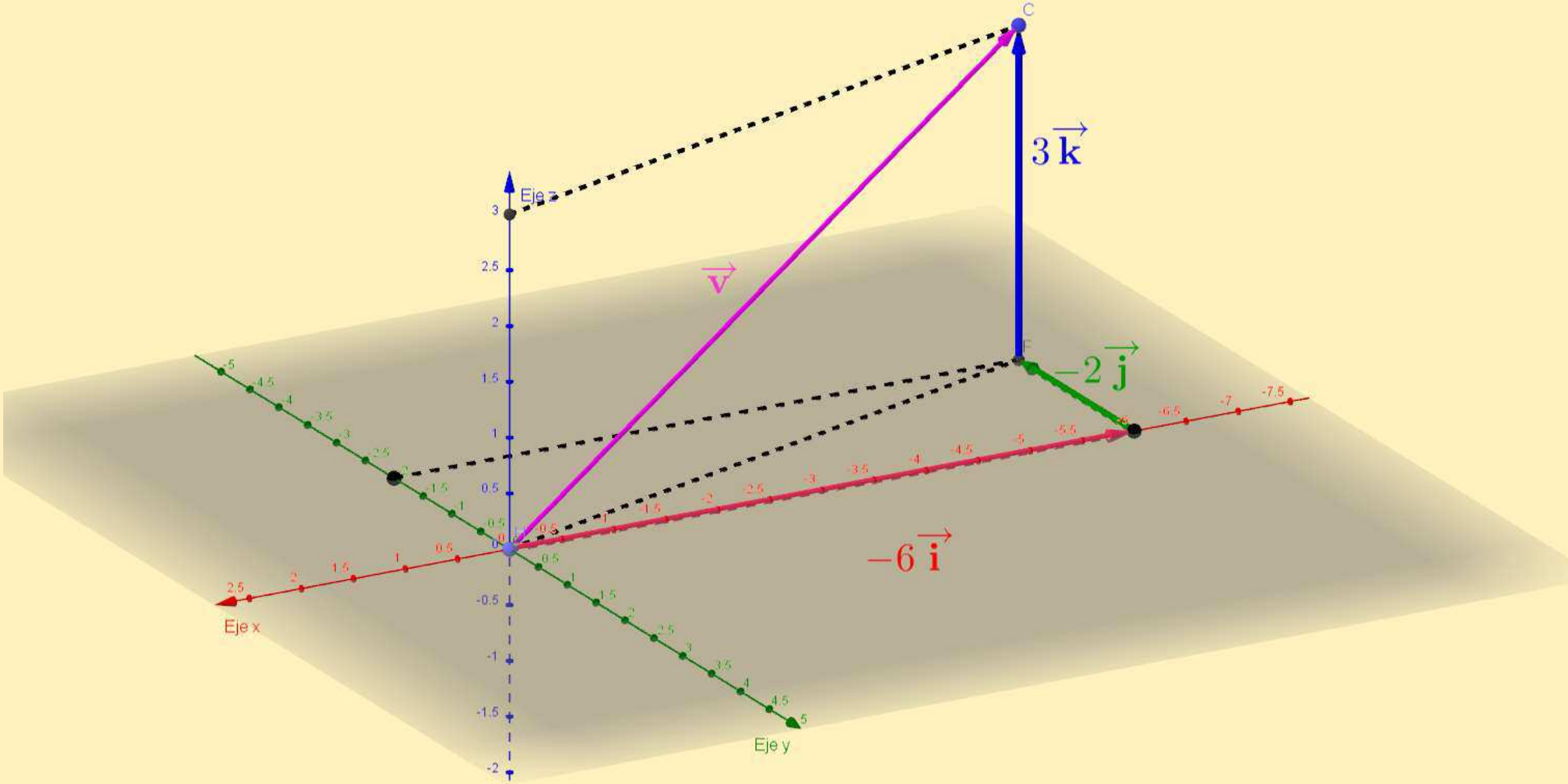
Operaciones por componentes

- Si
$$\vec{\mathbf{v}} = a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$
decimos que a, b y c son las componentes de $\vec{\mathbf{v}}$, y escribimos
$$\vec{\mathbf{v}} = (a, b, c)$$

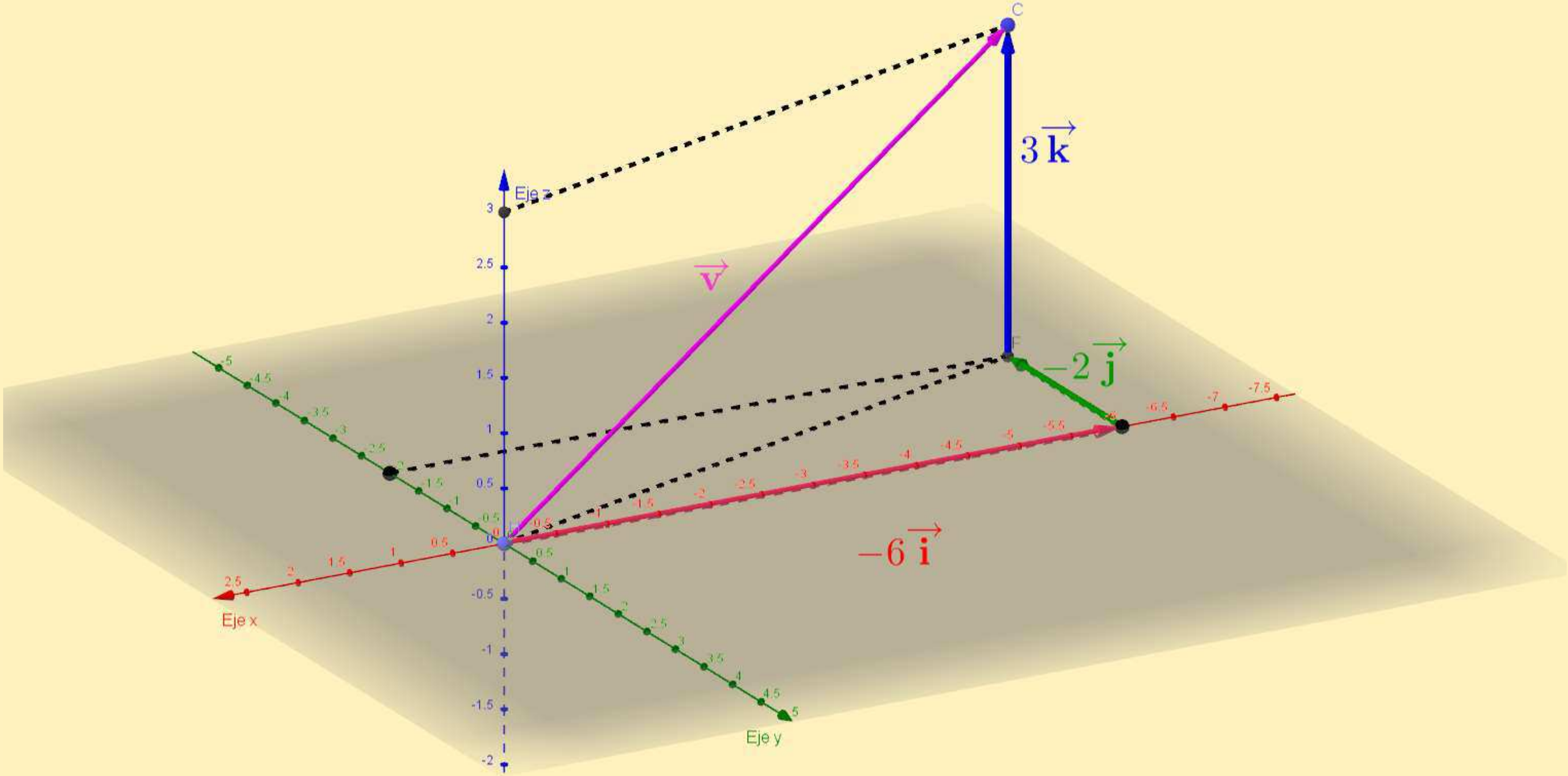
- Ejemplos
$$\vec{\mathbf{O}} = (0,0,0) \quad \vec{\mathbf{i}} = (1,0,0) \quad \vec{\mathbf{j}} = (0,1,0) \quad \vec{\mathbf{k}} = (0,0,1)$$

- Si $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces
$$\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$
$$\alpha \cdot \vec{\mathbf{v}} = (\alpha\, u_1, \alpha\, u_2, \alpha\, u_3)$$

Operaciones por componentes



Operaciones por componentes



Si $\vec{\mathbf{v}} = (a, b, c)$ entonces

$$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

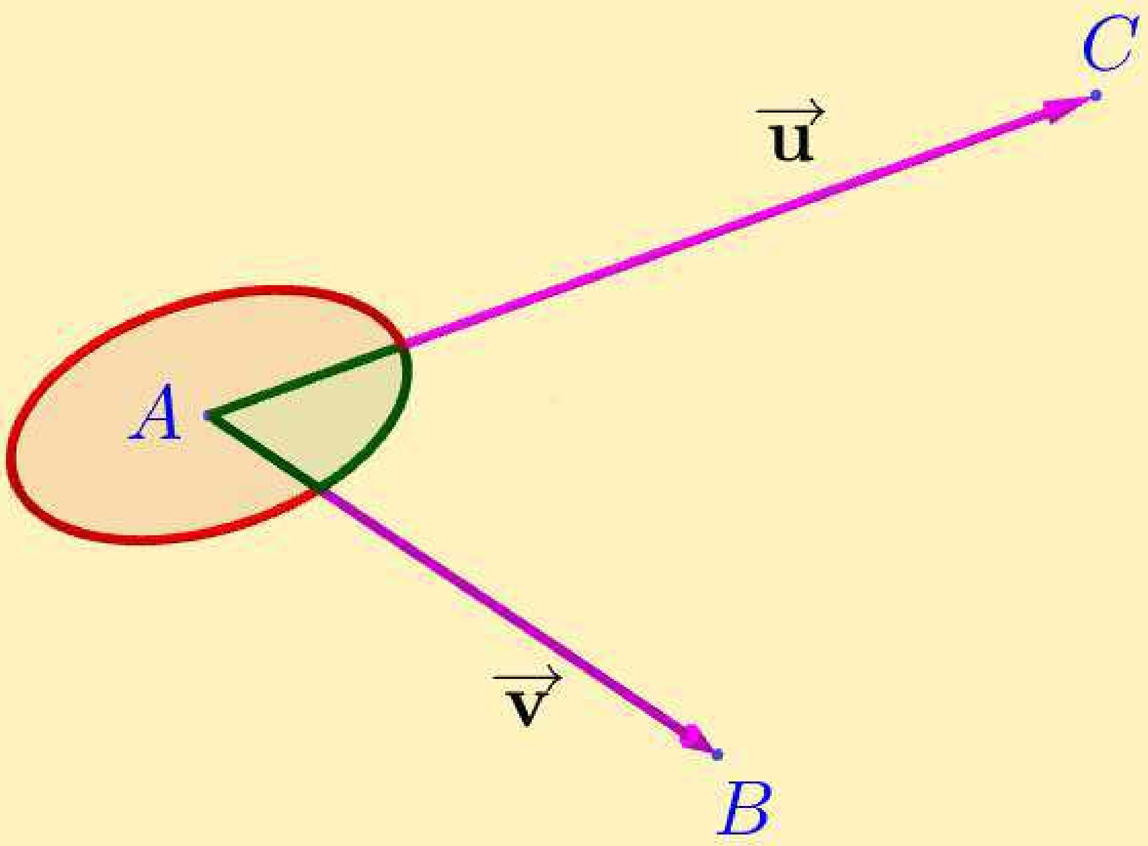
Operaciones por componentes

Los vectores no nulos $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ son **paralelos** si y solo si

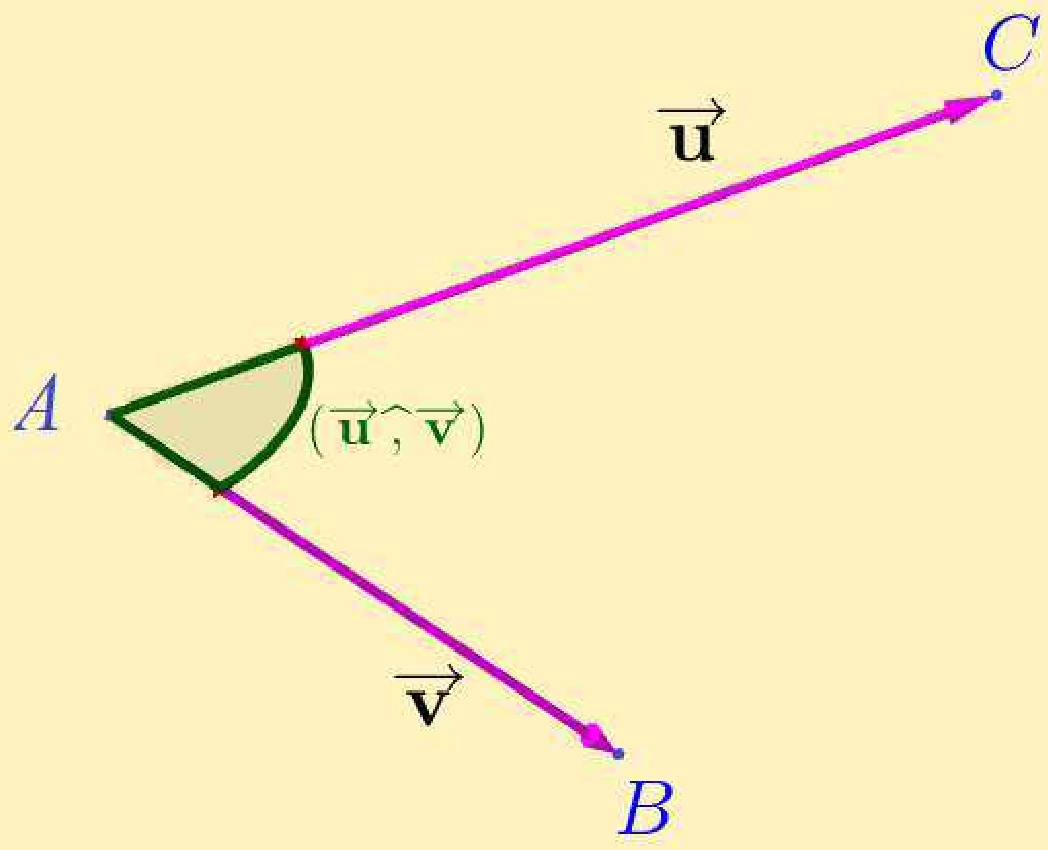
$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

(acá entendemos que si alguno de los denominadores es 0, el numerador también debe ser 0)

Ángulo entre vectores

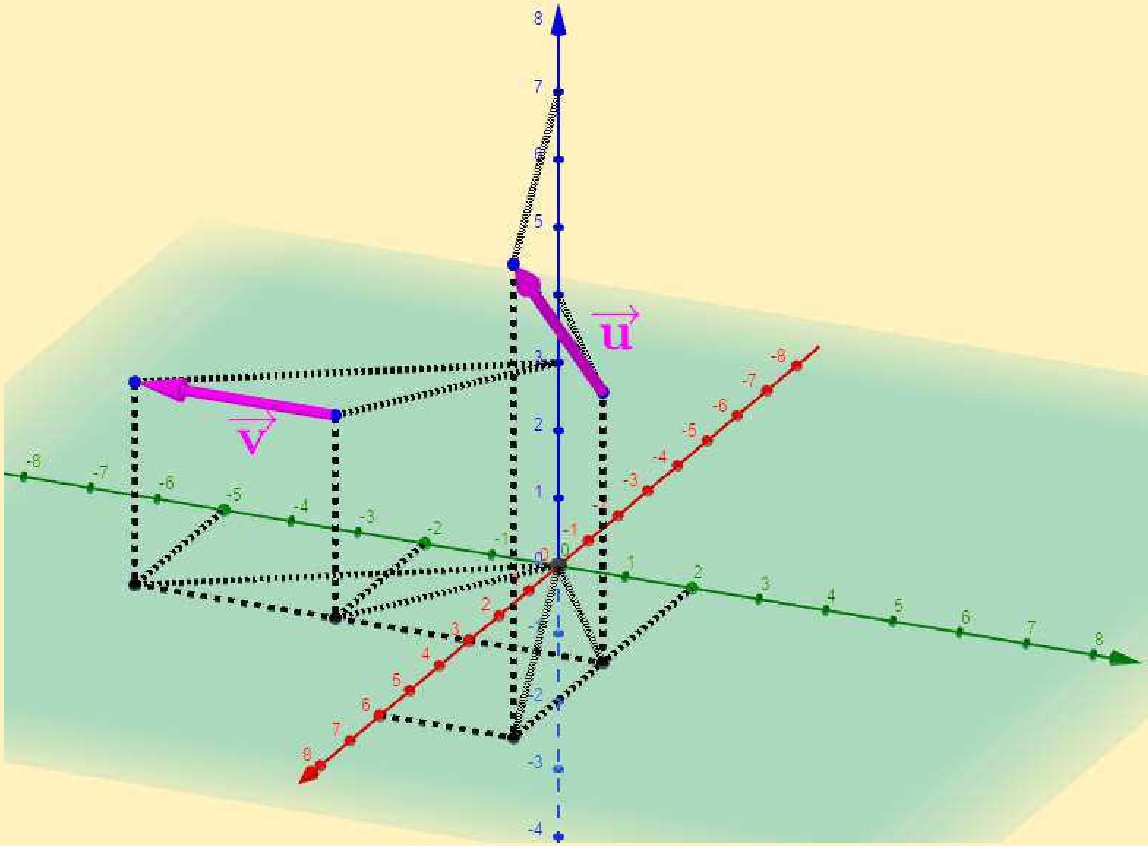


Ángulo entre vectores

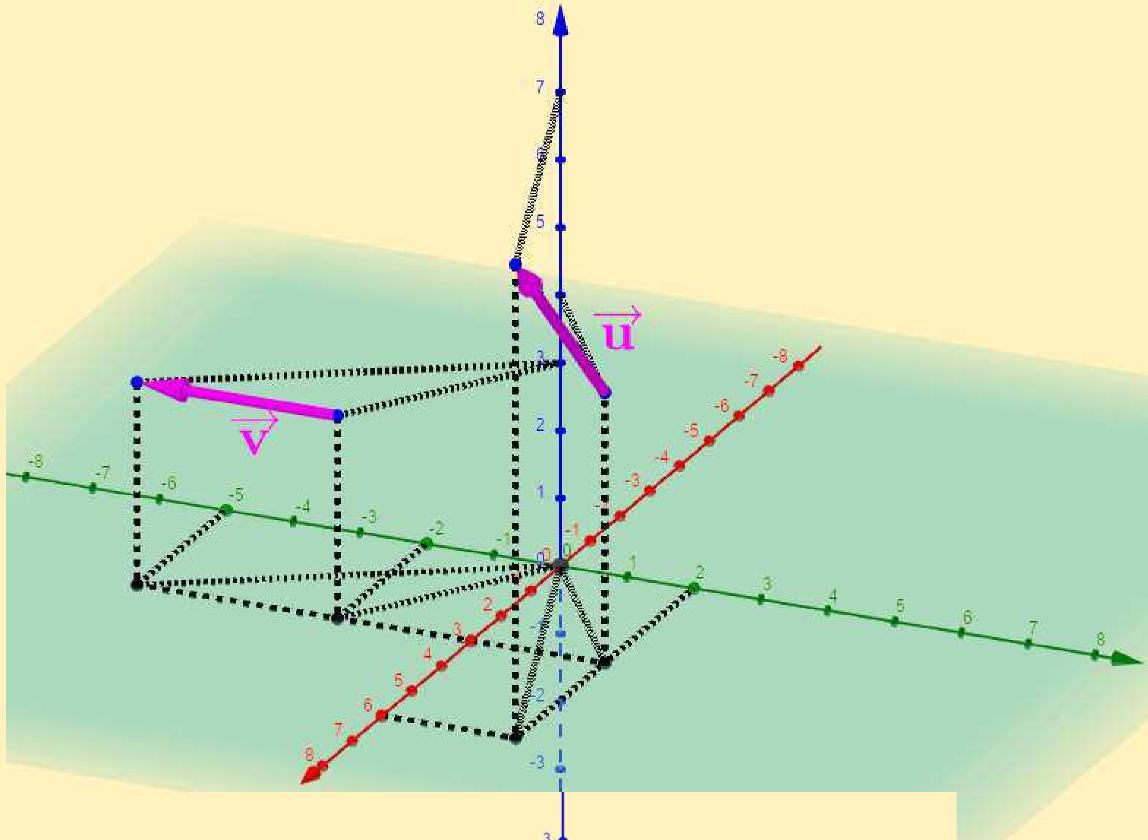


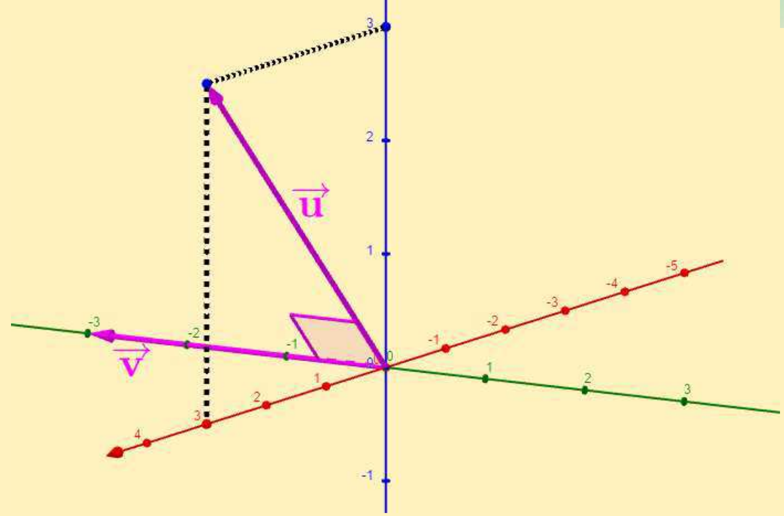
Llamamos **ángulo entre los vectores (no nulos)** $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AC}$ **y** $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB}$ al ángulo *convexo* $\widehat{BAC}$

Ángulo entre vectores



Ángulo entre vectores





Ángulo entre vectores

Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son no nulos, entonces

- $(\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}\vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{v}}\widehat{,}\vec{\mathbf{u}})$

Ángulo entre vectores

Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son no nulos, entonces

- $(\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}\vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{v}}\widehat{,}\vec{\mathbf{u}})$
- Si $\alpha > 0$ entonces $(\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}\alpha \vec{\cdot} \mathbf{v}) =$

Ángulo entre vectores

Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son no nulos, entonces

- $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}})$
- Si $\alpha > 0$ entonces $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\alpha \cdot \vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- $\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{v}}}\right) =$

Ángulo entre vectores

Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son no nulos, entonces

- $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}})$
- Si $\alpha > 0$ entonces $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\alpha\cdot\vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- $\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{v}}}\right) = \pi - (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$

Ángulo entre vectores

Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son no nulos, entonces

- $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}})$
- Si $\alpha > 0$ entonces $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\alpha \cdot \vec{\mathbf{v}}})$ $=$$(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- $\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{v}}}\right)$ $=$$\pi - (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- Si $\alpha < 0$ entonces $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\alpha \cdot \vec{\mathbf{v}}}) =$

Ángulo entre vectores

Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son no nulos, entonces

- $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}})$
- Si $\alpha > 0$ entonces $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\alpha\cdot\vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- $\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{v}}}\right) = \pi - (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- Si $\alpha < 0$ entonces $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\alpha\cdot\vec{\mathbf{v}}}) = \pi - (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$

Ángulo entre vectores

Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son no nulos, entonces

- $(\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}\vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{v}}\widehat{,}\vec{\mathbf{u}})$
- Si $\alpha > 0$ entonces $(\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}\alpha\cdot\vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}\vec{\mathbf{v}})$
- $\left(\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}-\vec{\mathbf{v}}\right) = \pi - (\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}\vec{\mathbf{v}})$
- Si $\alpha < 0$ entonces $(\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}\alpha\cdot\vec{\mathbf{v}}) = \pi - (\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}\vec{\mathbf{v}})$
- $\left(-\vec{\mathbf{u}}\widehat{,}-\vec{\mathbf{v}}\right) =$

Ángulo entre vectores

Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son no nulos, entonces

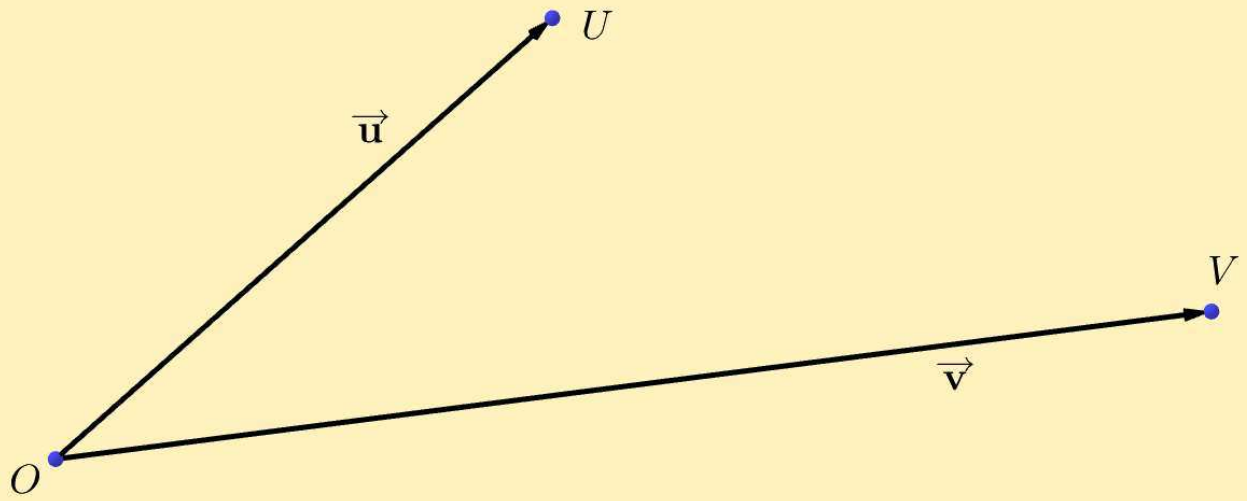
- $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}})$
- Si $\alpha > 0$ entonces $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\alpha\cdot\vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- $\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{v}}}\right) = \pi - (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- Si $\alpha < 0$ entonces $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\alpha\cdot\vec{\mathbf{v}}}) = \pi - (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- $\left(\widehat{-\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{v}}}\right) = (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$

Ángulo entre vectores

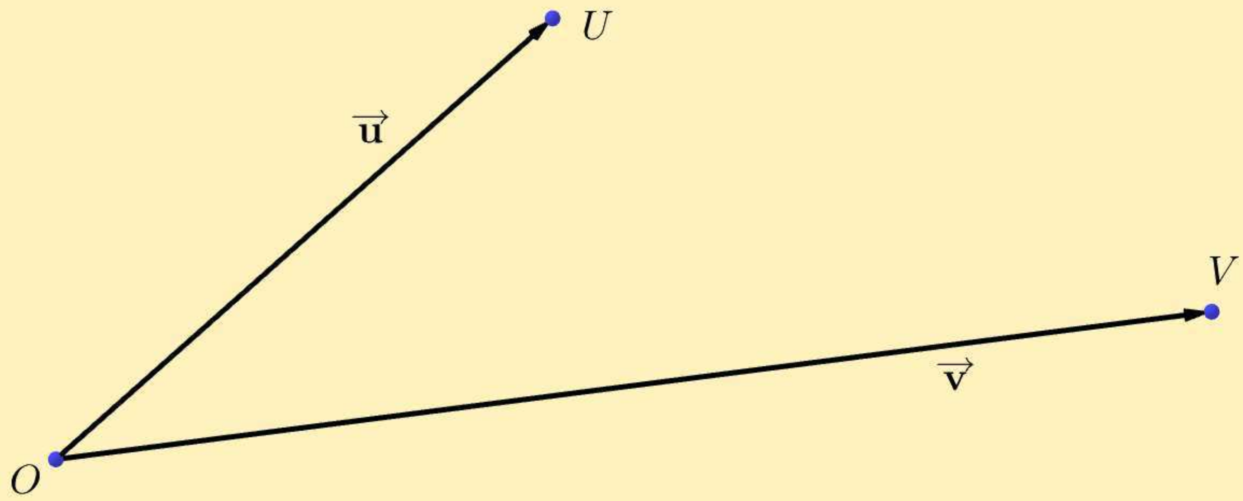
Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son no nulos, entonces

- $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}})$
- Si $\alpha > 0$ entonces $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\alpha\cdot\vec{\mathbf{v}}}) = (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- $\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{v}}}\right) = \pi - (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- Si $\alpha < 0$ entonces $(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\alpha\cdot\vec{\mathbf{v}}}) = \pi - (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$
- $\left(\widehat{-\vec{\mathbf{u}},-\vec{\mathbf{v}}}\right) = (\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$

Proyección ortogonal



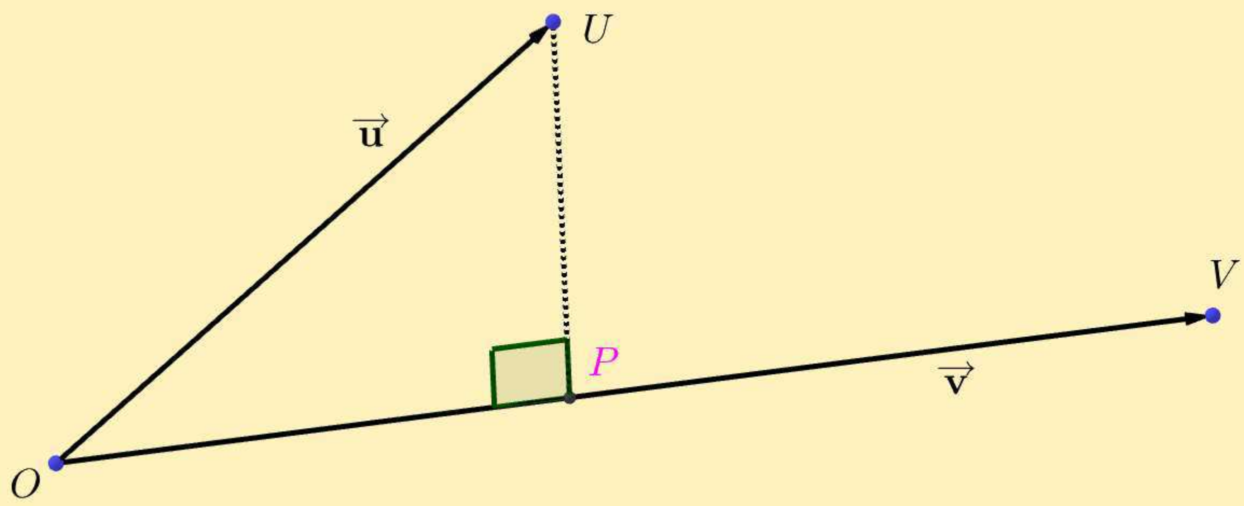
Proyección ortogonal



Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{OU}$ y $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{OV} \neq \vec{\mathbf{O}}$, la **proyección ortogonal de $\vec{\mathbf{u}}$ sobre $\vec{\mathbf{v}}$** es el vector $\overrightarrow{OP}$, con P siendo el punto de intersección entre la recta $\overleftrightarrow{OV}$ y una recta perpendicular a esta que pasa por U. escribimos

$$\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{OP}$$

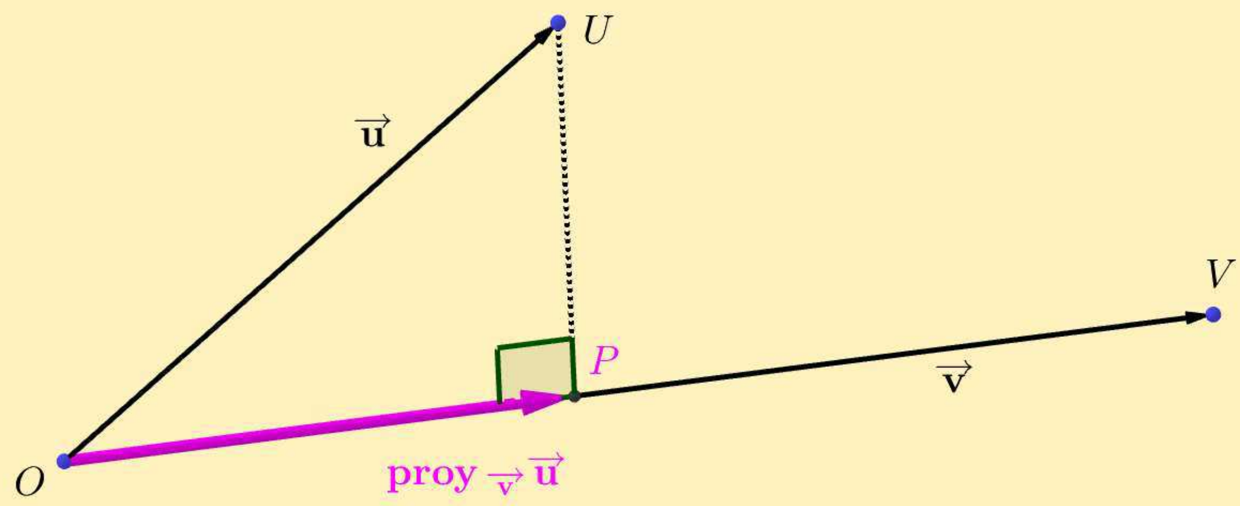
Proyección ortogonal



Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{OU}$ y $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{OV} \neq \vec{\mathbf{O}}$, la **proyección ortogonal de $\vec{\mathbf{u}}$ sobre $\vec{\mathbf{v}}$** es el vector $\overrightarrow{OP}$, con P siendo el punto de intersección entre la recta $\overleftrightarrow{OV}$ y una recta perpendicular a esta que pasa por U. escribimos

$$\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{OP}$$

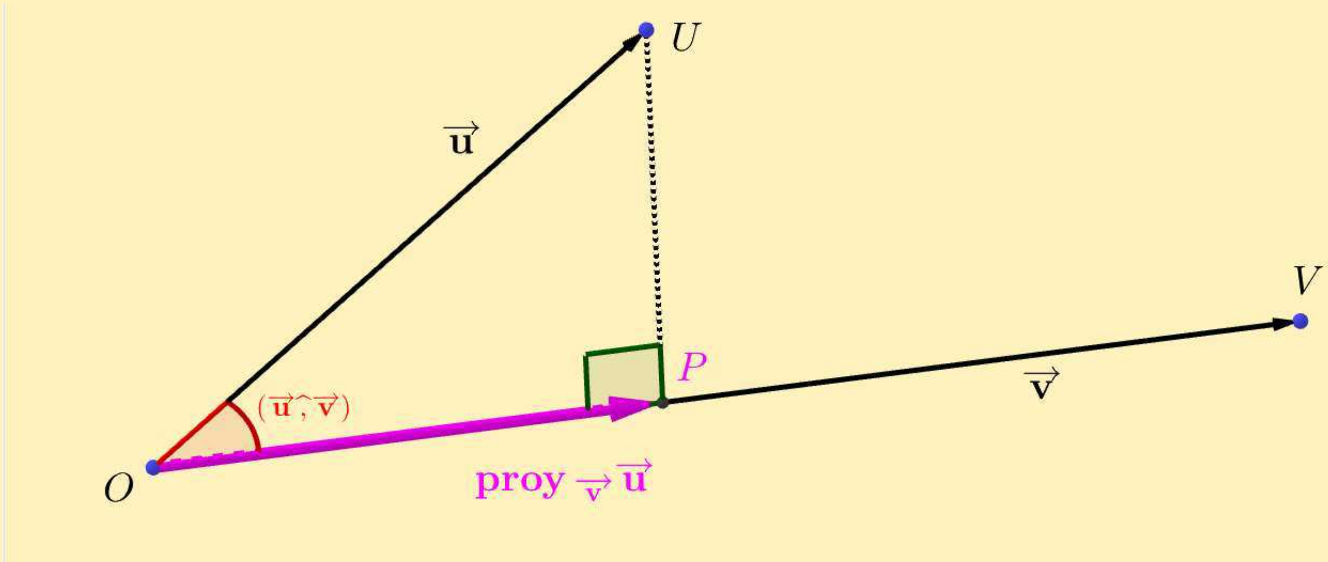
Proyección ortogonal



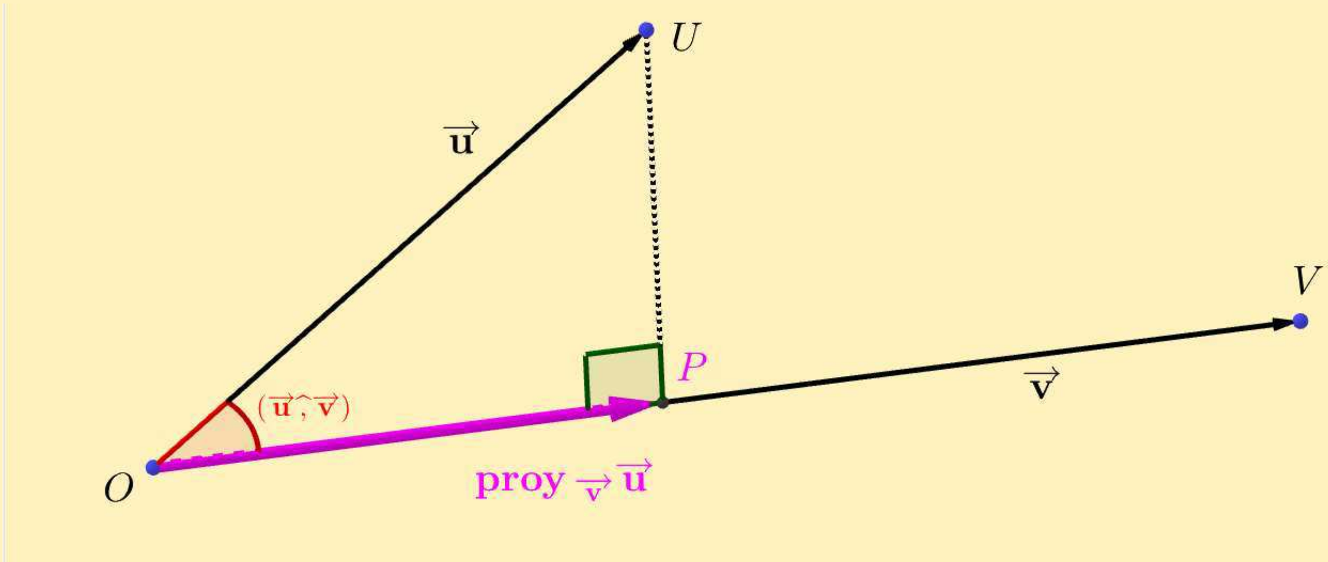
Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{OU}$ y $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{OV} \neq \vec{\mathbf{O}}$, la **proyección ortogonal de $\vec{\mathbf{u}}$ sobre $\vec{\mathbf{v}}$** es el vector $\overrightarrow{OP}$, con P siendo el punto de intersección entre la recta $\overleftrightarrow{OV}$ y una recta perpendicular a esta que pasa por U. escribimos

$$\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{OP}$$

Proyección ortogonal



Proyección ortogonal



El número

$$p = |u| \cos(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}})$$

es la **proyección escalar** de $\vec{\mathbf{u}}$ sobre $\vec{\mathbf{v}}$. Usando p podemos escribir

$$\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} = p\vec{\mathbf{v}}_0$$

Proyección ortogonal

- Si $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{O}}$, entonces $\mathbf{proy}_{\,\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$ para todo vector $\vec{\mathbf{u}}$

Proyección ortogonal

- Si $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{O}}$, entonces **proy** $_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$ para todo vector $\vec{\mathbf{u}}$
- ¿Para qué vectores $\vec{\mathbf{u}}$, se tiene **proy** $_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{O}}$?

Proyección ortogonal

- Si $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{O}}$, entonces $\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$ para todo vector $\vec{\mathbf{u}}$
- ¿Para qué vectores $\vec{\mathbf{u}}$, se tiene $\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{O}}$?
- ¿Cómo tienen que ser $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ para que $\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ tengan el mismo sentido?

Proyección ortogonal

- Si $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{O}}$, entonces $\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$ para todo vector $\vec{\mathbf{u}}$
- ¿Para qué vectores $\vec{\mathbf{u}}$, se tiene $\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{O}}$?
- ¿Cómo tienen que ser $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ para que $\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ tengan el mismo sentido?
- ¿Cómo tienen que ser $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ para que $\textbf{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ tengan sentidos opuestos?

Producto escalar

Definimos **producto escalar** de dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ como

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{O}} \text{ o } \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{O}} \\ |\vec{\mathbf{u}}|\,|\vec{\mathbf{v}}|\cos\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}\right) & \text{si } \vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{O}} \text{ y } \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{O}} \end{cases}$$

Producto escalar

Definimos **producto escalar** de dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ como

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{O}} \text{ o } \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{O}} \\ |\vec{\mathbf{u}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}\right) & \text{si } \vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{O}} \text{ y } \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{O}} \end{cases}$$

- ¿Cuándo $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} > 0$? ¿y cuándo < 0?
- ¿Cuándo es $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = 0$?

Producto escalar

Definimos **producto escalar** de dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ como

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{O}} \text{ o } \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{O}} \\ |\vec{\mathbf{u}}|\,|\vec{\mathbf{v}}|\cos\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}\right) & \text{si } \vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{O}} \text{ y } \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{O}} \end{cases}$$

- ¿Cuándo $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} > 0$? ¿y cuándo < 0?
- ¿Cuándo es $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = 0$?

Dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ no nulos son **perpendiculares** si y solo si

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = 0$$

Producto escalar

Definimos **producto escalar** de dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ como

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{O}} \text{ o } \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{O}} \\ |\vec{\mathbf{u}}|\,|\vec{\mathbf{v}}| \cos\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}\right) & \text{si } \vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{O}} \text{ y } \vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{O}} \end{cases}$$

- ¿Cuándo $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} > 0$? ¿y cuándo < 0?
- ¿Cuándo es $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = 0$?

Dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ no nulos son **perpendiculares** si y solo si

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = 0$$

- Dado $\vec{\mathbf{u}}$, ¿qué es $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{u}}$? ¿Cuándo es $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{u}} = 0$?

Producto escalar

Cualesquiera que sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y el escalar α, se verifica:

E-1 $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$. Propiedad conmutativa.

E-2 $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$. Propiedad distributiva.

E-3 $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v})$.

E-4 $\vec{u} \times \vec{u} \geq 0$, valiendo la igualdad si y sólo si $\vec{u} = \vec{0}$.

Producto escalar

Cualesquiera que sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y el escalar α, se verifica:

E-1 $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$. Propiedad conmutativa.

E-2 $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$. Propiedad distributiva.

E-3 $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v})$.

E-4 $\vec{u} \times \vec{u} \geq 0$, valiendo la igualdad si y sólo si $\vec{u} = \vec{0}$.

Además

- Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ no nulos, entonces $\vec{\mathbf{u}} \perp \vec{\mathbf{v}} \Longleftrightarrow \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = 0$
- Si $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{O}}$, entonces **proy** $_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} = (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}_0)\vec{\mathbf{v}}_0$
- La proyección escalar de $\vec{\mathbf{u}}$ sobre $\vec{\mathbf{v}}$ es $p = \frac{\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}|}$

Producto escalar

Producto escalar por componentes

Si $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Producto escalar

Producto escalar por componentes

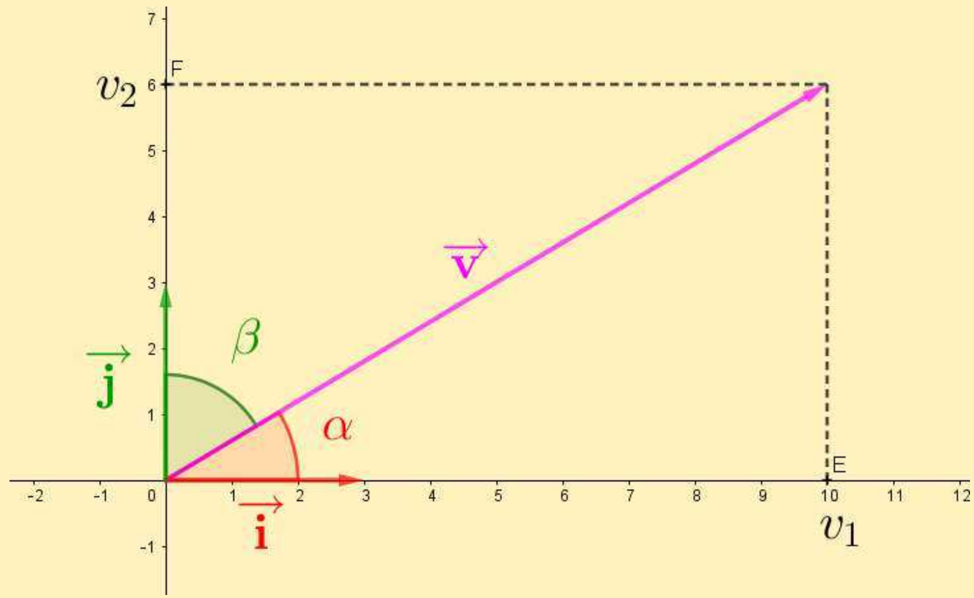
Si $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Como consecuencia, también es posible calcular el ángulo entre dos vectores por componentes, usando la fórmula

$$\cos\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}}\right) = \frac{\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}|\,|\vec{\mathbf{v}}|}$$

Cosenos directores



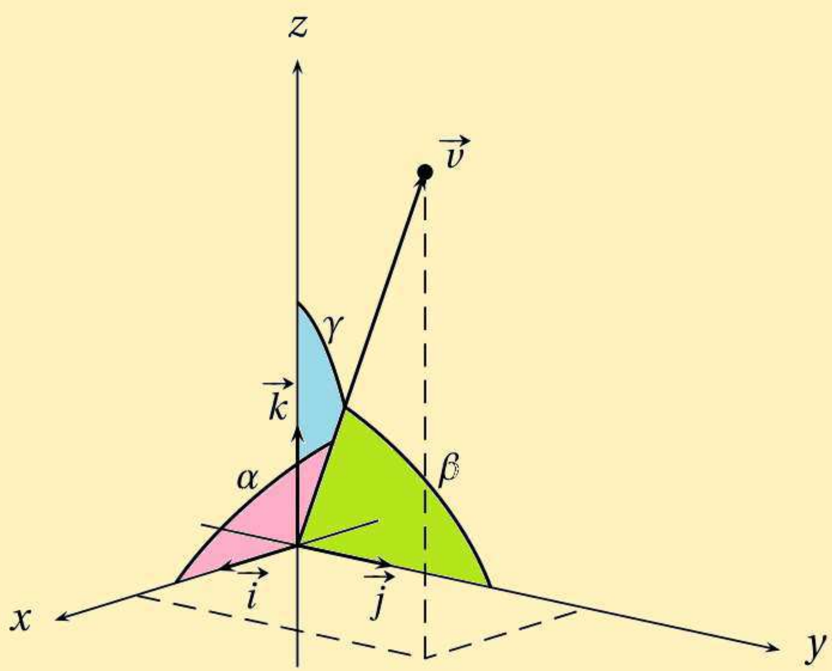
Ángulos directores de $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$: $\quad \alpha = \left(\widehat{\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{i}}}\right)$, $\quad \beta = \left(\widehat{\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{j}}}\right)$

Notemos que

$$\vec{\mathbf{v}}_0 = \left(\frac{v_1}{|\vec{\mathbf{v}}|}, \frac{v_2}{|\vec{\mathbf{v}}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta)$$

Decimos que $\cos\alpha$ y $\cos\beta$ son los **cosenos directores** de $\vec{\mathbf{v}}$

Cosenos directores



Ángulos directores de $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$

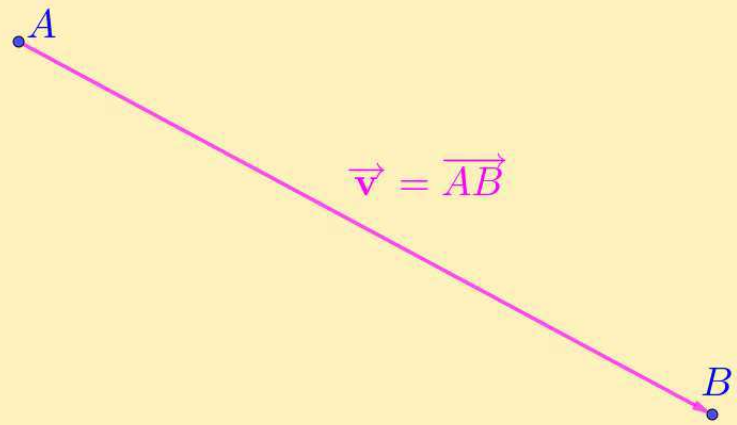
$$\alpha = \left(\widehat{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{i}}}\right), \qquad \beta = \left(\widehat{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{j}}}\right), \qquad \gamma = \left(\widehat{\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{k}}}\right)$$

Notemos que

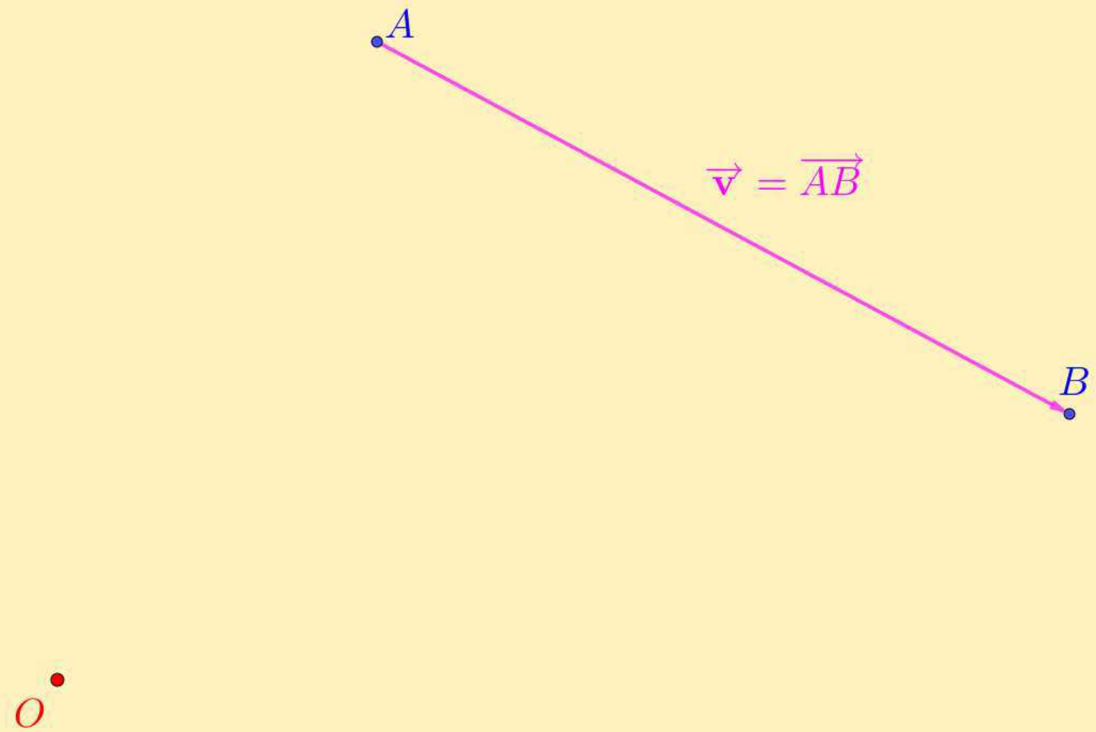
$$\vec{\mathbf{v}}_0 = \left(\frac{v_1}{|\vec{\mathbf{v}}|}, \frac{v_2}{|\vec{\mathbf{v}}|}, \frac{v_3}{|\vec{\mathbf{v}}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Decimos que $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los **cosenos directores** de $\vec{\mathbf{v}}$

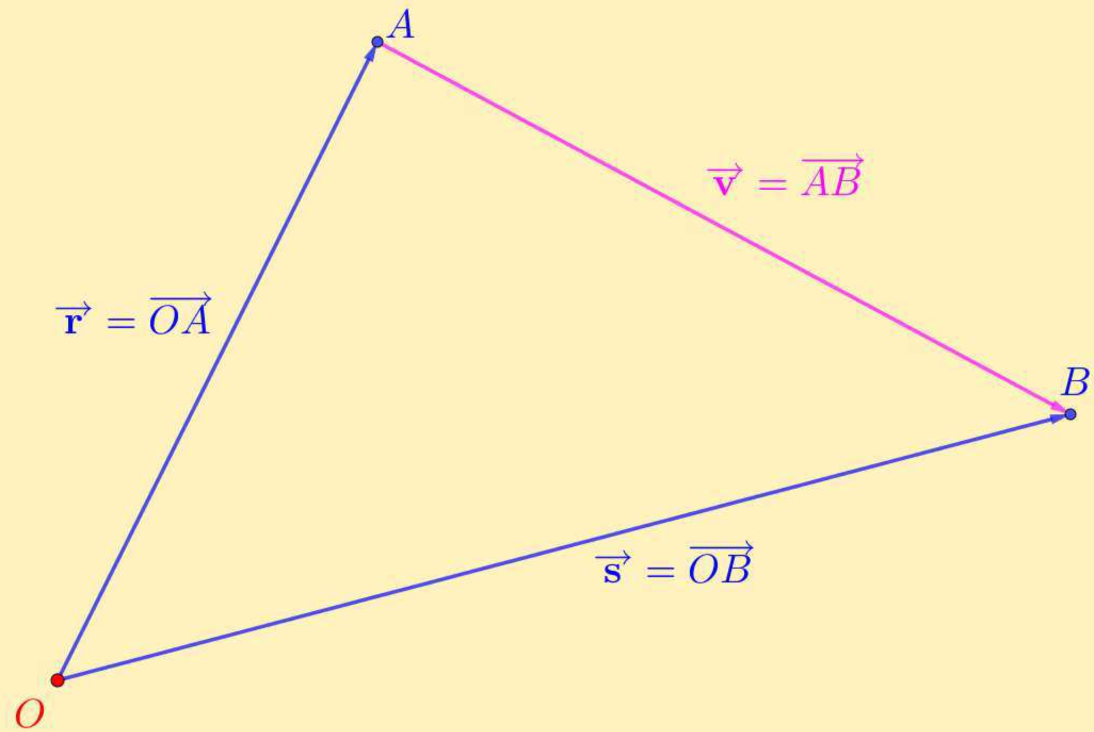
Problema: Determinar componentes de $\vec{\mathrm{v}}$



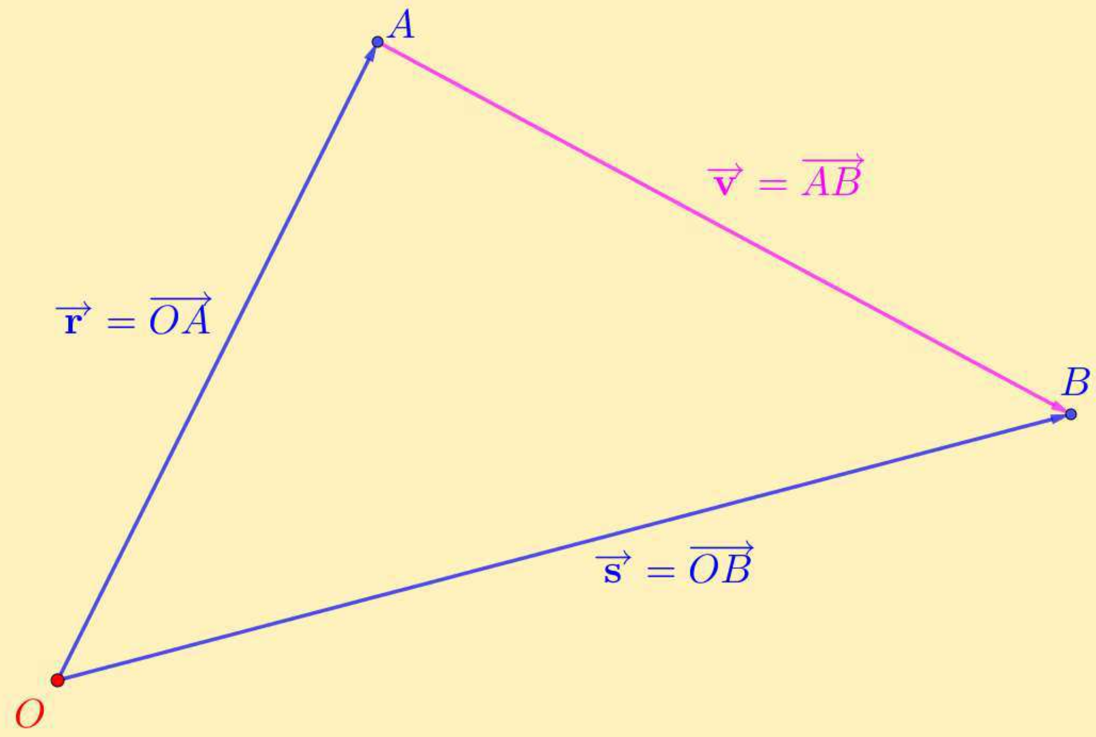
Problema: Determinar componentes de $\vec{\mathrm{v}}$



Problema: Determinar componentes de $\vec{\mathbf{v}}$



Problema: Determinar componentes de $\vec{\mathbf{v}}$



Si $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB}$, y O es un punto del plano o del espacio, entonces

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{s}} - \vec{\mathbf{r}}$$

con $\vec{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{\mathbf{s}} = \overrightarrow{OB}$.