UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS,

INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

TESIS DOCTORAL

Estudio de diversos problemas del cálculo variacional fraccionario

Autora: Lic. Melani Barrios

Directora: Dra. Gabriela Fernanda Reyero

Agosto de 2021





UNR Universidad Nacional de Rosario

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mi mamá, la persona que más admiro en mi vida, que me hizo ser quien soy y gracias a ella pude hacer una carrera universitaria.
También quiero dar las gracias a todas/os las/os que colaboraron conmigo en la elaboración de esta tesis y en la obtención de la beca de CONICET, que son Gabriela Reyero, Elina Mancinelli, Eduardo Santillan Marcus, Ariel Lombardi y Mabel Tidball. Pero especialmente quería darle las gracias a Pepa y Tito que siempre estuvieron ahí para mí cuando lo necesité, tanto para responder dudas como para el apoyo y la motivación necesarios.
Por último, y no menos importante quiero agradecer a todas/os las/os que me acompañaron en estos años de doctorado, brindándome aliento, apoyo y abrazos, en especial a mi familia (Fer, Noe, Nanu, Alex, Theito bebé, Mica, Pedro, Titón, Jony), a mis amigas/os (Graciela, Germen, Maurito, Daichulina, Ana, Emermosa, Ceci, Esponja, Smart, Sofía Sandia, Gretelunga, Magu, China) y a mi pareja Giuliano (por responder mis dudas de LaTeX y aguantar mi humor cuando las cosas no salían).
No sé si me olvido de alguien, para todas/os las/os demás que no mencioné agrego un

GRACIAS TOTALES

Resumen

En esta tesis se obtienen avances sobre el conocimiento del cálculo de variaciones fraccionario, tanto en lo referido al desarrollo teórico, como en la aplicación del mismo a problemas de manejo poblacional.

En primer lugar se establecen condiciones de optimalidad de problemas variacionales, tanto en su versión clásica (con derivadas de orden entero), como en su versión fraccionaria (con derivadas de orden real positivo). Esto es, se encuentran condiciones necesarias, llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange. Al existir diferentes definiciones de derivada fraccionaria, se obtienen diferentes tipos de ecuaciones de Euler-Lagrange para los problemas fraccionarios.

Luego, se presenta un análisis de una ecuación diferencial cúbica fraccionaria, que es una generalización de diferentes versiones de ecuaciones logísticas fraccionarias. El objetivo de esto, es comparar la evolución de cierto recurso renovable o población de cierta especie para diferentes valores fraccionarios de la derivada y observar como afecta a su crecimiento.

Cuando la ecuación logística es usada para describir la evolución natural de cierta especie, es lógico pensar en la explotación de este recurso. Por este motivo, a continuación se trata un problema de control fraccionario que modeliza la optimización de la ganancia obtenida mediante la explotación de dicho recurso natural, cuya dinámica está gobernada por una de las ecuaciones logísticas fraccionarias vistas. Se desarrollan diferentes técnicas de resolución, tanto para el caso clásico como para el caso fraccionario y se realiza una comparación entre ambos modelos implementando simulaciones numéricas.

Finalmente, se realiza una comparación de los diferentes métodos de optimalidad de ciertos problemas variacionales fraccionarios. Debido a la dificultad de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, se presenta un nuevo método numérico para la resolución de problemas variacionales fraccionarios que no necesita trabajar con la ecuaciones de Euler-Lagrange.

Índice general

Introducción **1**

1. Preliminares **7**
1.1. Funciones especiales 7
1.2. Cálculo fraccionario 10
1.2.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville 11
1.2.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville 13
1.2.3. Derivada fraccionaria de Caputo 18
1.2.4. Derivadas fraccionarias por izquierda y por derecha 21
1.3. Métodos numéricos fraccionarios 25
1.3.1. Método de Adams 25
1.3.2. Método L_1 26

2. Problemas variacionales **28**
2.1. Problemas variacionales clásicos 28
2.2. Problemas variacionales fraccionarios 29
2.3. Problemas variacionales mixtos 37
2.4. Conclusiones del Capítulo 43

3. Ecuaciones logísticas fraccionarias **44**
3.1. Ecuación cúbica fraccionaria 44
3.2. Existencia y unicidad de solución 46
3.2.1. Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones logísticas fraccionarias 50
3.3. Análisis de estabilidad de la ecuación cúbica fraccionaria 51
3.3.1. Caso general 51
3.3.2. Caso ecuación cúbica fraccionaria 52

3.3.3. Análisis de estabilidad aplicado a las ecuaciones logísticas fraccionarias . . . 54
3.4. Ejemplos . . . 55
3.5. Conclusiones del Capítulo . . . 60

4. Problema del manejo de cosecha de un recurso 62
4.1. Un problema de control optimal simple . . . 62
4.2. Modelo fraccionario . . . 67
4.2.1. Resolución mediante la ecuación de Euler-Lagrange C-RL . . . 68
4.2.2. Resolución mediante la ecuación de Euler-Lagrange C-C . . . 71
4.3. Ejemplo y comparación . . . 74
4.3.1. Comparación entre métodos C-RL y C-C . . . 74
4.3.2. Comparación entre soluciones fraccionarias C-C y la solución clásica 76
4.4. Conclusiones del Capítulo . . . 82

5. Comparación entre Ecuaciones de Euler-Lagrange 83
5.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . 83
5.2. Ejemplo 1 . . . 87
5.2.1. Caso clásico . . . 87
5.2.2. Caso fraccionario . . . 88
5.2.3. Comparación entre los métodos . . . 90
5.3. Ejemplo 2 . . . 93
5.3.1. Caso clásico . . . 93
5.3.2. Caso fraccionario . . . 93
5.3.3. Comparación entre los métodos . . . 98
5.4. Método numérico de tipo L_1 . . . 101
5.4.1. Ejemplo 1 . . . 106
5.4.2. Ejemplo 2 . . . 109
5.5. Conclusiones del Capítulo . . . 112

Conclusiones 114

Anexo 117

Bibliografía 138

Índice de figuras

3.1. Soluciones de las ecuaciones logísticas fraccionarias con cosecha para $E = 0$, E =0.05, E =0.2 y E =0.5. 57
3.2. Soluciones de las ecuaciones logísticas fraccionarias con cosecha para x_0 =0.1, x_0 =4, x_0 =8 y x_0 =12. 58
3.3. Soluciones de las ecuaciones logísticas fraccionarias con efecto Allee con cosecha para $E = 0$, E =0.5, $E = 1$ y E =1.5. 59
3.4. Soluciones de las ecuaciones logísticas fraccionarias con efecto Allee con cosecha para x_0 =0.1, $x_0 = 4$, $x_0 = 8$ y $x_0 = 12$. 60

4.1. Ejemplo del Teorema del Camino más Cercano 66
4.2. Poblaciones obtenidas mediante las ecuaciones C-RL y C-C. 75
4.3. Poblaciones obtenidas para los problemas clásico y fraccionario. 79
4.4. Cosechas obtenidas de los problemas clásico y fraccionario. 79
4.5. Poblaciones de las dinámicas de los problemas clásico y fraccionario sin considerar cosecha. 80
4.6. Poblaciones para los problemas clásico, y fraccionarios considerando distintas cosechas. 81

5.1. Convergencia de las soluciones y_{RL1} e y_{C1}. 91
5.2. Comparación de las soluciones y_{RL1} e y_{C1}. 91
5.3. Convergencia de las soluciones y_{RL2} e y_{C2}. 99
5.4. Comparación de las soluciones y_{RL2} e y_{C2}. 100
5.5. Solución y_{C2} para α =0.4. 101
5.6. Aproximación para el Ejemplo 1 con α =0.95. 107
5.7. Aproximación para el Ejemplo 1 con α =0.70. 108
5.8. Aproximación para el Ejemplo 1 con α =0.30. 108
5.9. Aproximación para el Ejemplo 2 con α =0.95. 110

5.10. Aproximación para el Ejemplo 2 con α =0.70. 110
5.11. Aproximación para el Ejemplo 2 con α =0.40. 111

Índice de tablas

3.1. Puntos de equilibrio 54

4.1. Ganancias obtenidas. 80

5.1. Valores obtenidos para las integrales evaluadas en y_{RL1} e y_{C1} del Ejemplo 1. 92
5.2. Valores obtenidos para las integrales evaluadas en y_{RL2} e y_{C2} del Ejemplo 2. 101

Siglas y abreviaturas

(AE) Punto de equilibrio localmente asintóticamente estable.
(E) Punto de equilibrio localmente estable.
(I) Punto de equilibrio localmente inestable.

C-C Ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria donde intervienen solo derivadas de Caputo.
C-RL Ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria donde intervienen derivadas de Caputo y Riemann-Liouville.

Introducción

El cálculo de variaciones se refiere a la búsqueda de extremos y, en este sentido, se puede considerar una rama de la optimización. Los problemas y técnicas en esta rama, sin embargo, difieren marcadamente de los relativos a los extremos de funciones de varias variables debido a la naturaleza del dominio de la cantidad a ser optimizada. El cálculo de variaciones se ocupa de la búsqueda de extremos de funcionales en lugar de funciones. Los funcionales son generalmente definidos por integrales definidas, los conjuntos de funciones a menudo se definen por las condiciones de borde y los requisitos de suavidad, que surgen en la formulación del problema, [47, 48].

El permanente interés en el cálculo de variaciones es, en parte, debido a sus aplicaciones. Los principios variacionales abundan en la física y, particularmente, en la mecánica. La aplicación de estos principios, por lo general, implican la búsqueda de funciones que minimizan integrales definidas y por lo tanto se utiliza el cálculo de variaciones para su modelización. Otros campos en los que el cálculo de variaciones también tiene aplicaciones son: el electromagnetismo, la economía, la planificación urbana, y una serie de otras áreas no tradicionales. De hecho, la teoría de control óptimo se basa principalmente en torno al cálculo de variaciones, [49].

Por otro lado, el cálculo fraccionario es una rama activa del Análisis Matemático que, en cierto sentido, es tan antiguo como el cálculo clásico: puede considerarse que sus orígenes fueron a finales del siglo XVII, tiempos en que Newton y Leibniz desarrollaron los fundamentos del cálculo diferencial e integral. En particular, Leibniz introdujo la notación $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ para denotar la derivada n-ésima de una función f. Cuando reportó esto en una carta a l'Hopital (aparentemente con la suposición implícita de que $n \in \mathbb{N}$), l'Hopital respondió: ¿Qué significa $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ si $n = 1/2$? Esta carta de l'Hopital escrita en 1695, hoy en día se acepta, comúnmente, como la primera aparición de lo que hoy llamamos una derivada fraccionaria, y el hecho de que l'Hopital preguntara específicamente por $n = 1/2$, es decir, una fracción (número racional), en realidad dio lugar al nombre de esta rama de la matemática. Este nombre ha permanecido en uso desde entonces, aunque ya se sabe bien

que no hay razón para restringirse al conjunto de números racionales. De hecho, cualquier número real, racional o irracional, funcionará de la misma manera.

Con estos cimientos se puede construir un nuevo edificio del cálculo, que, sin perder de vista el cálculo tradicional (al que no sustituye, sino que extiende), posee sus propios conceptos fraccionarios. Un ejemplo, entre otros muchos, es el de la ecuación diferencial fraccionaria. Como cualquier área matemática, el interés del cálculo fraccionario no se restringe al plano teórico, siendo este notable, sino también al de sus aplicaciones en otras áreas (electricidad, magnetismo, mecánica, dinámica de fluidos, medicina, etc, [5, 18, 29, 30, 32, 34]); que ha originado un gran crecimiento de su estudio en las últimas décadas. Esto se debe, fundamentalmente, a que las ecuaciones diferenciales fraccionarias establecen modelos muy superiores a los que utilizan ecuaciones diferenciales con derivadas enteras porque incorporan al modelo cuestiones de memoria o efectos posteriores que se desprecian en los modelos con derivada clásica [28].

Existen diferentes definiciones de derivada fraccionaria [25, 34, 44]. Las más usadas son las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y las derivadas fraccionarias de Caputo. Es importante remarcar que mientras las derivadas de Riemann-Liouvile [31, 32, 43] son históricamente el enfoque más estudiado para el cálculo fraccionario, las de Caputo [20, 21] son las más populares entre físicos y otros científicos, debido a que las ecuaciones diferenciales definidas en términos de ellas requieren condiciones iniciales y de contorno regulares.

A partir de toda esta teoría, un campo reciente, iniciado en 1997, es el cálculo variacional fraccionario, donde son considerados problemas variacionales clásicos, pero en presencia de derivadas o integrales fraccionarias. En los últimos años han sido desarrollados numerosos trabajos tendientes a extender la teoría del cálculo variacional y del control óptimo para poder ser aplicados a problemas de cálculo variacional y control óptimo fraccionarios. Con el objetivo de resolver estos problemas, existen varios teoremas que proporcionan condiciones de optimalidad. Entre ellos se encuentran las ecuaciones de Euler-Lagrange que involucran derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo [2, 4–7, 10, 37–39, 42], y otras ecuaciones de Euler-Lagrange que poseen únicamente derivadas de Caputo [8, 13, 14, 19, 33, 35].

En esta tesis se estudian problemas variacionales y de control en sentido clásico y fraccionario, mostrando diferentes condiciones de optimalidad, encontrando nuevas y realizando diferentes ejemplos comparativos.

Objetivos y resultados obtenidos

El objetivo general de esta tesis es aportar avances en el conocimiento del cálculo de variaciones fraccionario, tanto en lo referido al desarrollo teórico, como en la aplicación de los mismos a problemas de manejo poblacional.
En el Capítulo 1 de esta tesis se presentan resultados preliminares del análisis. Se definen algunas funciones especiales, los operadores de derivación fraccionaria, algunas propiedades del cálculo fraccionario y por último diversos métodos numéricos fraccionarios considerados en este trabajo.
En el Capítulo 2, se muestran los diferentes tipos de problemas variacionales que estudiaremos, en su versión clásica (con derivadas de orden entero), y en su versión fraccionaria (con derivadas de orden real positivo). Trabajaremos sobre condiciones de optimalidad de los mismos.
Con el objetivo de realizar un estudio sobre la evolución fraccionaria de cierto recurso, en el Capítulo 3, presentaremos un análisis de una ecuación diferencial cúbica fraccionaria, que es una generalización de diferentes versiones de ecuaciones logísticas fraccionarias. Una vez realizada la comparación entre los diferentes modelos logísticos fraccionarios, en el Capítulo 4, trataremos un problema de control fraccionario que modeliza la maximización de la ganancia obtenida mediante la explotación de dicho recurso natural cuya dinámica está gobernada por una de las ecuaciones logísticas fraccionarias vistas.
Por último, en el Capítulo 5, se extienden los resultados vistos en el Capítulo 2, realizando una comparación mediante los diferentes métodos de optimalidad de ciertos problemas variacionales fraccionarios.

Difusión de resultados

Esta tesis doctoral fue realizada durante el período Abril 2016–Mayo 2021 con una Beca Interna Doctoral otorgada por el CONICET. Además fue parcialmente financiada por los siguientes proyectos de investigación.

1. Proyecto de Investigación UNR - ING428 - *Optimización y Problemas de Equilibrio*, Directora: Dra. Elina Mancinelli y Co-directora: Dra. Gabriela Reyero. Período: 2015–2016.

2. Proyecto de Investigación UNR - ING506 - *Cálculo Variacional y Control Óptimo Fraccionario*, Directora: Dra. Gabriela Reyero y Co-director: Dr. Eduardo Santillan

Marcus. Período: 2016–2017.

3. Proyecto de Investigación UNR -ING568 - *Problemas de Control Óptimo Fraccionario*, Directora: Dra. Gabriela Reyero y Co–director: Dr. Ariel Luis Lombardi. Período: 2018–2019.

4. Proyecto de Investigación UNR - 80020190100005UR - *Ecuaciones diferenciales fraccionarias en modelos de evolución poblacional*, Directora: Dra. Gabriela Reyero y Co-director: Dr. Ariel Luis Lombardi. Período: 2020–2021.

Algunos de los resultados que dan lugar a esta tesis fueron publicados en revistas científicas y proceedings de congresos, y presentados en eventos científicos de carácter nacional e internacional.
Revistas internacionales con referato:

- M. Barrios, G. Reyero, An Euler-Lagrange Equation only Depending on Derivatives of Caputo for Fractional Variational Problems with Classical Derivatives, *Statistics, Optimization and Information Computing*, Vol. 8, June 2020, pp 590–601, DOI 10.19139/soic-2310-5070-865, (2020).

- M. Barrios, G. Reyero, M. Tidball, Harvest management problem in a fractional logistic equation, *Mathematica Pannonica*, ISSN(Online): 2786-0752, ISSN(Print): 0865-2090. Aceptado para su publicación el día 23 de julio del 2021, en prensa.

Estadía científica:

- *Aplicación de la noción de derivada fraccionaria en modelos de explotación de recursos naturales*; Institut Nationale de Recherche en Agronomie (INRA - SUPAGRO); del 12 de septiembre al 13 de octubre de 2019; Montpellier, Francia.

Proceedings de congresos:

- M. Barrios, G. Reyero, Ecuaciones de Euler-Lagrange para un Problema Isoperimétrico Fraccionario, *VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial - MACI*, ISSN:2314-3282, pp 328-331, (2017).

- M. Barrios, A. Lombardi, G. Reyero, Método numérico de tipo L1 para problemas variacionales fraccionarios, *XII Congreso Argentino de Mecánica Computacional - MECOM*, ISSN: 2591-3522, pp 1089-1098, (2018).

- M. Barrios, G. Reyero, M. Tidball, Estabilidad de una generalización de ecuaciones logísticas fraccionarias, *VII Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial - MACI* , ISSN:2314-3282, pp 105-108, (2019).

Preprints en ArXiv:

- M. Barrios, G. Reyero, M. Tidball, A fractional order cubic differential equation. Applications to natural resource management, *arXiv:2104.04092*, (2021).
- M. Barrios, G. Reyero, M. Tidball, Harvest management problem in a fractional logistic equation, *arXiv:2104.04082*, (2021).
- M. Barrios, G. Reyero, M. Tidball, Necessary conditions to a fractional variational problem, *arXiv:2104.04089*, (2021).

Eventos científicos:

- *Advances in some fractional variational problems with Caputo derivatives*; M. Barrios, D. Goos (expositor), G. Reyero; 13 EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization (internacional); del 8 a 10 de julio de 2015; Edimburgo, Escocia.
- *Análisis de Algunos Problemas Variacionales Fraccionarios*; M. Barrios (expositora), D. Goos, G. Reyero; LXIV Reunión Anual de Comunicaciones Científicas - UMA (nacional); del 18 a 21 de septiembre de 2015; Santa Fe, Argentina.
- *Problemas Variacionales con Derivadas Fraccionarias de Caputo*; M. Barrios (expositora), D. Goos, G. Reyero; IX Jornada de Ciencia y Tecnología 2015 (nacional); el 11 de noviembre de 2015; Rosario, Argentina.
- *Métodos de Resolución de Algunas Ecuaciones de Euler-Lagrange Fraccionarias*; M. Barrios (expositora), G. Reyero; V Latin American Workshop on Optimization and Control - LAWOC (internacional); del 5 a 7 de julio de 2016; Tandil, Argentina.
- *Ecuaciones de Euler-Lagrange Fraccionarias Utilizando solo Derivadas de Caputo*; M. Barrios (expositora), G. Reyero; LXV Reunión Anual de Comunicaciones Científicas - UMA (nacional); del 20 a 23 de septiembre de 2016; Bahía Blanca, Argentina.

- *Ecuaciones de Euler-Lagrange para un Problema Isoperimétrico Fraccionario*; M. Barrios (expositora), G. Reyero; VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial - MACI (nacional); del 2 al 5 de mayo de 2017; Comodoro Rivadavia, Argentina.

- *Análisis numérico de algunos problemas variacionales fraccionarios*; M. Barrios (expositora), G. Reyero; LXVI Reunión de Comunicaciones Científicas - RSME-UMA (internacional); del 11 a 15 de diciembre de 2017; Buenos Aires, Argentina.

- *Numerical Analysis of a Fractional Variational Problem*; M. Barrios (expositora), A. Lombardi, G. Reyero; Fractional and Other Nonlocal Models - FONM (internacional); del 28 a 31 de mayo de 2018; Bilbao, España.

- *Análisis dinámico de un modelo logístico con cosecha de orden fraccionario*; M. Barrios (expositora), M. Tidball, G. Reyero; 8° Biomat (nacional); del 24 a 29 de junio de 2018; La Falda, Argentina.

- *Una alternativa de modelización fraccionaria para problemas de extracción de un recurso renovable*; M. Barrios (expositora), M. Tidball, G. Reyero; LXVII Reunión de Comunicaciones Científicas - UMA (nacional); del 18 a 21 de septiembre de 2018; La Plata, Argentina.

- *Método numérico de tipo L1 para problemas variacionales fraccionarios*; M. Barrios (expositora), A. Lombardi, G. Reyero; XII Congreso Argentino de Mecánica Computacional - MECOM (nacional); del 6 a 9 de noviembre de 2018; Tucumán, Argentina.

- *Estabilidad de una generalización de ecuaciones logísticas fraccionarias*; M. Barrios (expositora), M. Tidball, G. Reyero; VII Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial - MACI (nacional); del 8 a 10 de mayo de 2019; Río Cuarto, Argentina.

- *Un problema de control óptimo fraccionario para la extracción de un recurso renovable*; M. Barrios (expositora), M. Tidball, G. Reyero; LXVII Reunión de Comunicaciones Científicas - VirtUMA (nacional); del 21 al 25 de septiembre de 2020; edición virtual.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos resultados preliminares de diferentes ramas del análisis que utilizamos en esta tesis. Definiremos algunas funciones especiales de uso frecuente en el análisis fraccionario, los operadores de derivación fraccionaria, algunas propiedades del cálculo fraccionario y por último diversos métodos numéricos fraccionarios considerados en este trabajo.

1.1. Funciones especiales

Primero veremos la definición de la función Gamma, que es fundamental para la definición de la integral y las derivadas fraccionarias. Más información sobre esta función puede encontrarse en [27], volumen I.

Definición 1 *Sea* $A = \{z \in \mathbb{C}/\mathcal{R}e(z) > 0\}$. *Definimos la función Gamma como*

$$\begin{array}{rccl} \Gamma & : & A & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \to & \Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt. \end{array}$$

Observación 1 *La función Gamma está definida sólo para los números complejos de parte real positiva. Sin embargo, es posible prolongar analíticamente la función Gamma al dominio* $\Omega = \mathbb{C} - \{z/z = -n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$. *Dicha prolongación viene dada por*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Teorema 1 *La función $\Gamma(z)$ definida originalmente en $\mathcal{R}e(z) > 0$, se prolonga analíticamente a una función que seguiremos llamando $\Gamma(z)$ sobre el dominio $\Omega = \mathbb{C} - \{z = -n, n \in \mathbb{N}_0\}$.*

Proposición 1 *La función Γ verifica las siguientes propiedades:*

a) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \forall z \in \Omega$.

b) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{sen(\pi z)} \quad \forall z \neq 0, \overset{+}{-} 1, \overset{+}{-} 2, ...$

c) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

d) Si $2z \neq 0, -1, -2, ...,$ *entonces* $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z)$.

e) Si $n \in \mathbb{N}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *entonces* $\dfrac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)$.

Observación 2 *Del ítem a) podemos decir que la función Gamma es una generalización del factorial.*
En el ítem d), si $z = n + \frac{1}{2}$, *tenemos* $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1) = \sqrt{\pi}2^{1-2\left(n+\frac{1}{2}\right)}\Gamma(2n+1)$ *y podemos concluir* $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$.

A continuación veremos la definición y algunas propiedades de la función de Mittag-Leffler, que estará presente en varias oportunidades a lo largo de esta tesis. Más información puede encontrarse en [27], volumen III.

Definición 2 *Dado $z \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(\alpha) > 0$ llamaremos función de Mittag-Leffler a la definida por*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Observación 3 *Inmediatamente podemos notar que*

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = exp(z)$$

es la función exponencial.

Definición 3 *Dado $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e(\alpha) > 0$ llamaremos función de Mittag-Leffler de dos parámetros a la definida por*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

Observación 4 *Es evidente que la función de Mittag-Leffler de un parámetro puede ser definida en términos de la función de Mittag-Leffler con dos parámetros como* $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$.

Observación 5 *Para ver la convergencia de esta serie en todo* $z \in \mathbb{C}$*, utilizaremos la siguiente relación*

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b}[1 + \frac{1}{2}z^{-1}(a-b)(a+b-1) + O(z^{-2})].$$

Para esta fórmula ver [27]. Considerando $z = \alpha k$, $a = \alpha+\beta$, $b = \beta$ *y aplicando el Criterio del Cociente en serie de potencias obtenemos*

$$\begin{aligned} R &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\Gamma(\alpha k+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|(\alpha k)^\alpha \left[1 + \frac{\alpha(\alpha+2\beta-1)}{2\alpha k} + O((\alpha k)^{-2})\right]\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} |\alpha^\alpha|\, k^{\mathcal{R}e(\alpha)} \left|\left[1 + \frac{\alpha(\alpha+2\beta-1)}{2\alpha k} + O((\alpha k)^{-2})\right]\right| = \lim_{k\to\infty} |\alpha^\alpha|\, k^{\mathcal{R}e(\alpha)} = +\infty \end{aligned}$$

ya que $\mathcal{R}e(\alpha) > 0$.

Observación 6 *Claramente, se cumple*

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)\, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Además valen los siguientes,

$$\begin{aligned} E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \\ E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \\ &\vdots \\ E_{1,m}(z) &= \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\}. \end{aligned}$$

Por este motivo, podemos considerar a la función de Mittag-Leffler como una generalización de la función exponencial.

Observación 7 *Las funciones* $\operatorname{senh}(z)$ *y* $\cosh(z)$ *también son casos particulares de la*

función de Mittag-Leffler. En efecto,

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = cosh(z),$$
$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{senh(z)}{z}.$$

Observación 8 *Otros casos particulares de la función de Mittag-Leffler son:*

- $E_{2,1}(-z^2) = \cos z$ *para* $z \in \mathbb{C}$.
- $E_{\frac{1}{2}}(\pm z^{\frac{1}{2}}) = e^z[1 + erf(\pm z)]$, *donde el valor principal de la raíz cuadrada de* z *se asume en el plano complejo cortado a lo largo del eje real negativo, y la función erf se define como* $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du$.

Teorema 2 *Sean* $\alpha, \beta > 0$ *y* $z \in \mathbb{C}$, *entonces* $E_{\alpha,\beta}(z) = zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$.

A continuación veremos la definición de la función Hipergeométrica de parámetros a, b y c. Más información sobre la misma puede encontrarse en [27], volumen I.

Definición 4 *Definimos la función Hipergeométrica de parámetros* a, b *y* c, *siendo* $c \neq 0, -1, -2, ...$, *como*

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}.$$

Observación 9 *La serie hipergeométrica converge absolutamente para todos los valores* $|z| < 1$. *Para* $|z| = 1$, *es absolutamente convergente si* $\mathcal{R}e(a + b - c) < 0$, *es condicionalmente convergente si* $z \neq 1$ *y* $0 \leq \mathcal{R}e(a + b - c) < 1$ *y es divergente si* $\mathcal{R}e(a + b - c) > 1$.

En la siguiente sección veremos una breve introducción al cálculo fraccionario.

1.2. Cálculo fraccionario

El Cálculo Fraccionario es una activa rama del Análisis Matemático que nace de una idea muy básica: de la misma forma que una función se puede derivar o integrar un número entero de veces, ¿podemos hallar su derivada de orden 1/2?¿Y su integral π-ésima? Surgen así operadores diferenciales e integrales de orden racional, real e incluso complejo. Con

estos cimientos se puede construir un nuevo edificio del Cálculo, que, sin perder de vista el Cálculo tradicional (al que no sustituye, sino que extiende), posee sus propios conceptos fraccionarios. Un ejemplo, entre otros muchos, es el de la ecuación diferencial fraccionaria. Como cualquier área matemática, el interés del Cálculo Fraccionario no se restringe al plano teórico, siendo este notable. Los campos de aplicación práctica se incrementan año tras año. En particular, los modelos de derivadas fraccionarias proporcionan mejores representaciones que los modelos tradicionales [5, 13, 28–30, 32, 34].
Existen diferentes formas de definir la derivada fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{R}$ de una función, entre las cuales se destacan las denominadas derivadas fraccionarias en el sentido de Riemann-Liouville y en el sentido de Caputo. Para definir esto, primero es necesario definir la integral fraccionaria de Riemann-Liouville. Para más información referirse a [25, 34, 44].

1.2.1. Integral fraccionaria de Riemann-Liouville

Definición 5 *Denotamos por ${}_aI_x$ al operador integral definido como*

$$ {}_aI_x[f(x)] = \int_a^x f(t)dt $$

para $a \leq x \leq b$ y f función integrable Riemann.
Cuando no sea necesario especificar la/s variable/s de la función f, simplemente escribiremos ${}_aI_x[f]$.

Lema 1 *Sea f una función integrable Riemann en $[a, b]$. Entonces, para $a \leq x \leq b$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos*

$$ {}_aI_x^n[f] = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{1.1} $$

Ahora nos preguntamos, ¿cómo podemos extender esto a $n = \alpha \in \mathbb{R}^+$? Teniendo en cuenta que la función Gamma vista en la Definición 1 como una generalización del factorial y el Lema 1, podemos definir la integral fraccionaria de la siguiente manera.

Definición 6 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$, definimos la integral de Riemann-Liouville ${}_aI_x^\alpha$ sobre funciones $L^1[a, b]$ como*

$$ {}_aI_x^\alpha[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \tag{1.2} $$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Para $\alpha = 0$, establecemos ${}_aI_x^0 = I$, el operador identidad.

Cuando no sea necesario especificar la/s variable/s de la función f, simplemente escribiremos ${}_aI_x^\alpha[f]$.

Observación 10 *Es evidente que la integral fraccionaria de Riemann-Liouville (1.2) coincide con la definición clásica (1.1) en el caso $\alpha = n \in \mathbb{N}$, excepto por el hecho de que hemos extendido el dominio de funciones integrables Riemann a funciones integrables Lebesgue.*
Más aún, en el caso $\alpha \geq 1$ es obvio que la integral ${}_aI_x^\alpha[f]$ existe para cada $x \in [a,b]$ puesto que el integrando es el producto de una función f integrable, y de $(x-t)^{\alpha-1}$ una función continua. En el caso $0 < \alpha < 1$, la situación es menos clara que en el caso anterior. Sin embargo el siguiente resultado justifica la buena definición del operador.

Teorema 3 *Sea $f \in L^1[a,b]$ y $\alpha > 0$. Entonces, la integral ${}_aI_x^\alpha[f]$ existe para casi todo $x \in [a,b]$. Más aún, la función ${}_aI_x^\alpha[f]$ en sí misma, también es un elemento de $L^1[a,b]$.*

Teorema 4 *Sean $\alpha, \beta \geq 0$ y $f \in L^1[a,b]$, entonces ${}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^\beta[f] = {}_aI_x^{\alpha+\beta}[f]$ para casi todo punto en $[a,b]$. Si adicionalmente $f \in C[a,b]$ o $\alpha+\beta \geq 1$, entonces la identidad se verifica para todo punto en $[a,b]$.*

Corolario 1 *Sean $\alpha, \beta \geq 0$ y $f \in L^1[a,b]$, entonces ${}_aI_x^\alpha\, {}_aI_x^\beta[f] = {}_aI_x^\beta\, {}_aI_x^\alpha[f]$.*

Ejemplo 1 *Sea $f(x) = (x-a)^\beta$ para algún $\beta > -1$ y $\alpha > 0$. Entonces*

$$ {}_aI_x^\alpha[f] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} $$

En efecto,

$$ {}_aI_x^\alpha[f] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (t-a)^\beta (x-t)^{\alpha-1}dt $$

Haciendo un cambio de variable, $s = \dfrac{t-a}{x-a}$ resulta, $ds = \dfrac{dt}{x-a}$ y así

$$ \begin{aligned} {}_aI_x^\alpha[f] &= \frac{(x-a)^\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^\beta (x-a)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}(x-a)ds \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^\beta (1-s)^{\alpha-1}ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}, \end{aligned} $$

como queríamos ver.

Teorema 5 *Sea $\alpha > 0$. Supongamos que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas en $[a, b]$ uniformemente convergente. Entonces,*

$$ {}_aI_x^{\alpha}\left[\lim_{k\to\infty} f_k\right] = \lim_{k\to\infty} {}_aI_x^{\alpha}[f_k]. $$

En particular, la sucesión de funciones $({}_aI_x^{\alpha}[f_k])_{k=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente.

Ejemplo 2 *Sea $f(x) = \exp(\lambda x)$ para algún $\lambda > 0$. Entonces para $\alpha > 0$, calculemos el valor de ${}_0I_x^{\alpha}[f]$.*
En el caso $\alpha \in \mathbb{N}$, tenemos obviamente que ${}_0I_x^{\alpha}[f] = \lambda^{-\alpha}\exp(\lambda x)$. Sin embargo, este caso no generaliza cuando $\alpha \notin \mathbb{N}$. Más bien, teniendo en cuenta la expansión en series de una función exponencial, Teorema 5 y el Ejemplo 1, tenemos

$$ \begin{aligned} {}_0I_x^{\alpha}[f] &= {}_0I_x^{\alpha}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)^k}{k!}\,{}_0I_x^{\alpha}[(x)^k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)}x^{k+\alpha} = \lambda^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} \end{aligned} $$

Y aquí, la serie del lado derecho no es $\exp(\lambda x)$.

A continuación presentaremos dos definiciones distintas de derivada fraccionaria.

1.2.2. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Definición 7 *Denotamos por D, al operador que lleva una función diferenciable en su derivada, es decir*

$$ Df(x) = f'(x). $$

Observación 11 *Notemos que por Teorema Fundamental del Cálculo vale,*

$$ D\,{}_aI_x[f] = f $$

lo que implica que,

$$ D^n\,{}_aI_x^n[f] = f. $$

Es consecuencia inmediata de la Observación 11 la siguiente relación.

Lema 2 *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$, y sea f una función con derivada n-ésima continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces,*

$$D^n f = D^m \, {}_a I_x^{m-n}[f] \tag{1.3}$$

Podemos utilizar el Lema 2 para motivar la definición de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville. Ahora supongamos que $n = \alpha \notin \mathbb{Z}$. Luego, aún podemos elegir $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m > n$. En vista de la teoría dada en la sección anterior, el lado derecho de la identidad sigue siendo significativo. Sin embargo, hay una diferencia mayor que en el caso clásico donde ambos números son enteros: descubrimos ahora que el operador obtenido en este camino depende de la elección del punto a. Por lo tanto, llegamos a la siguiente definición, si elegimos el valor del número entero m lo más pequeño posible.

Definición 8 *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. Definimos la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α como*

$$ {}_a^{RL} D_x^{\alpha}[f(x)] = D^n \, {}_a I_x^{n-\alpha}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) \, dt \tag{1.4}$$

Para $\alpha = 0$, establecemos ${}_a^{RL} D_x^0 = I$, el operador identidad.
Cuando no sea necesario especificar la/s variable/s de la función f, simplemente escribiremos ${}_a^{RL} D_x^{\alpha}[f]$.

Observación 12 *Nuevamente vemos que, como consecuencia del Lema 2, la Definición 8 del operador ${}_a^{RL} D_x^{\alpha}$ coincide con la definición clásica del operador diferencial D^n cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}$.*

Definición 9 *Denotaremos por $A^n[a, b]$ al conjunto de las funciones con derivada $n-1$-ésima absolutamente continua, es decir, funciones f para las cuales existe (casi todo punto) una función $g \in L^1[a, b]$ tal que*

$$D^{n-1} f(x) = D^{n-1} f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

En este caso llamaremos a g la derivada (generalizada) n-ésima de f, y simplemente escribiremos $g = D^n f$.

Observación 13 *Es claro de la definición anterior que una función $f \in A^n[a.b]$ posee (casi todo punto) derivada $D^n f \in L^1[a, b]$.*

Lema 3 *Sea $f \in A^1[a,b]$ y $0 < \alpha < 1$, entonces ${}_a^{RL}D_x^\alpha[f]$ existe para casi todo punto en [a,b]. Más aún, ${}_a^{RL}D_x^\alpha[f] \in L^p[a,b]$ para $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ y*

$$ {}_a^{RL}D_x^\alpha[f] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{-\alpha}dt\right). $$

Como consecuencia inmediata de esta definición, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 *Sea $f(x) = (x-a)^\beta$ para algún $\beta > -1$. Luego, con lo visto en el Ejemplo 1 obtenemos*

$$ {}_a^{RL}D_x^\alpha[f] = D^{\lceil\alpha\rceil}\,{}_aI_x^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}[f] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha+\beta+1)}D^{\lceil\alpha\rceil}[(x-a)^{\lceil\alpha\rceil-\alpha+\beta}]. $$

Específicamente, si $\alpha - \beta \in \mathbb{N}$, el lado derecho es la $\lceil\alpha\rceil$-ésima derivada clásica del polinomio de grado $\lceil\alpha\rceil - (\alpha-\beta) \in \{0,1,...,\lceil\alpha\rceil-1\}$, y entonces la expresión desaparece, es decir

$$ {}_a^{RL}D_x^\alpha[(x-a)^{\alpha-m}] = 0 \text{ para todo } \alpha > 0,\ m \in \{0,1,...,\lceil\alpha\rceil\}. $$

Ahora, si $\alpha - \beta \notin \mathbb{N}$,

$$ {}_a^{RL}D_x^\alpha[(x-a)^\beta] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}. $$

A continuación veremos algunos teoremas o propiedades sobre esta derivada fraccionaria.

Teorema 6 *Sea $\alpha \geq 0$, entonces para cada $f \in L^1[a,b]$,*

$$ {}_a^{RL}D_x^\alpha\,{}_aI_x^\alpha[f] = f. $$

Observación 14 *Observemos que la composición ${}_aI_x^\alpha\,{}_a^{RL}D_x^\alpha[f]$ no necesariamente es f. Más aún, si f es tal que ${}_aI_x^{n-\alpha}[f] \in A^n[a,b]$, entonces*

$$ {}_aI_x^\alpha\,{}_a^{RL}D_x^\alpha[f] = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}\lim_{z\to a+}D^{n-k-1}\,{}_aI_z^{n-\alpha}[f]. $$

Teorema 7 *Sean f_1 y f_2 dos funciones definidas en $[a,b]$ tales que ${}_a^{RL}D_x^\alpha[f_1]$ y ${}_a^{RL}D_x^\alpha[f_2]$ existen para casi todo punto. Más aún, sean c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, entonces, ${}_a^{RL}D_x^\alpha[c_1f_1 + c_2f_2]$ existe para casi todo punto, y*

$$ {}_a^{RL}D_x^\alpha[c_1f_1 + c_2f_2] = c_1\,{}_a^{RL}D_x^\alpha[f_1] + c_2\,{}_a^{RL}D_x^\alpha[f_2]. $$

Es decir el operador diferencial fraccionario de Riemann-Liouville es lineal.

Observación 15 *Del Ejemplo 3 y la linealidad del operador diferencial de Riemann-Liouville, para todo $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$, tenemos*

$$ {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}[K] = \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \neq 0. $$

Es decir, que a diferencia de la derivada clásica, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de constantes no nulas no es cero. Más aún, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 8 *Sea $\alpha > 0$, entonces la igualdad ${}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}[f] = 0$ es válida si y sólo si $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\,(x-a)^{\alpha-j}$, donde $c_j \in \mathbb{R}$ para todo $j = 1, ..., n$.*

Teorema 9 *Sea $\alpha > 0$. Supongamos que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas uniformemente convergente en [a,b], y que ${}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}[f_k]$ existe para todo k. También supongamos que $({}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}[f_k])_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a+\epsilon, b]$ para cada $\epsilon > 0$. Entonces, para cada $x \in (a, b]$, tenemos*

$$ \lim_{k\to\infty} {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}[f_k] = {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}\left[\lim_{k\to\infty} f_k\right]. $$

Teorema 10 *Sea $f \in C^m[a, b]$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces*

$$ \lim_{\alpha\to m^-} {}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}[f] = D^m f $$

en sentido puntual en $(a, b]$. La convergencia es uniforme en $[a, b]$ si adicionalmente $f(x) = O((x-a)^{m+\delta})$ para algún $\delta > 0$ cuando $x \to a^+$.

Por último veremos qué sucede con la Transformada de Laplace de la Derivada Fraccionaria de Riemann-Liouville. Recordemos que las Transformadas de Laplace son muy utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales, convirtiendo a éstas en ecuaciones algebraicas.

Observación 16 *Recordemos algunos conceptos básicos sobre la Transformada de Laplace.*
La función de variable compleja $F(s)$ definida por

$$ F(s) = L\{f(t), s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt $$

se llama Transformada de Laplace de la función $f(t)$. Para que la integral exista, $f(t)$ debe ser de tipo exponencial de orden δ es decir que deberán existir M y T constantes positivas tales que $e^{\delta t}|f(t)| \leq M$ para todo $t > T$.
Por lo general, denotaremos con letras mayúsculas a las Transformadas.
Por último recordaremos dos propiedades útiles.

i) La Transformada de Laplace de la convolución

$$L\{f(t) * g(t), s\} = F(s) \cdot G(s),$$

suponiendo que $F(s)$ y $G(s)$ existen.

ii) Fórmula de la Transformada de Laplace para la derivada n-ésima

$$L\{D^n f(t), s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1} f(0)$$

suponiendo que todo está bien definido y existe.

De esta última propiedad podemos observar que si la Transformada de Laplace es utilizada para resolver una ecuación diferencial de orden n, es necesario tener como datos a los valores $D^{n-k-1}f(0)$ para todo $k = 0, ..., n-1$, lo cual físicamente es lógico conocerlos puesto que son condiciones iniciales (posición inicial, velocidad, etc).

Observación 17 *En esta observación consideraremos $a = 0$.*

- *Transformada de Laplace de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville.*

  Por Definición 6 de la integral fraccionaria sabemos que

$$ {}_0I_x^\alpha[f] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt$$

  y esto lo podemos escribir como

$$ {}_0I_x^\alpha[f] = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f.$$

  Luego, por la observación anterior, propiedad i) , resulta

$$L\{ {}_0I_x^\alpha[f], s\} = s^{-\alpha} \cdot F(s). \tag{1.5}$$

- *Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.*

  Por Definición 8 de la derivada de Riemann-Liouville sabemos que

$$ {}_0^{RL}D_x^{\alpha}[f] = D^n\, {}_0I_x^{n-\alpha}[f]. $$

  Aplicando la observación anterior, propiedad ii) y la Transformada de Laplace de la integral de Riemann-Liouville (1.5), obtenemos

$$ L\{\, {}_0^{RL}D_x^{\alpha}[f], s\} = s^{\alpha}\cdot F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k\ {}_0^{RL}D_x^{\alpha-k-1}[f]\big|_{x=0}\,. $$

De esta última afirmación podemos decir que si la Transformada de Laplace es utilizada para resolver una ecuación diferencial fraccionaria de orden α, es necesario tener como datos a los valores ${}_0^{RL}D_x^{\alpha-k-1}[f]\big|_{x=0}$ para todo $k = 0, ..., n-1$, lo cual no tiene justificación física. Es decir que para plantear un problema diferencial fraccionario que utilice este tipo de derivada, sería necesario que en la formulación del problema las condiciones iniciales dadas sean sobre la derivada de Riemann-Liouville de la función en cero, lo cual no es muy intuitivo puesto que no son datos que se puedan obtener fácilmente. Este es uno de los motivos por los cuales nos vemos en la necesidad de trabajar con otro tipo de derivada fraccionaria.

1.2.3. Derivada fraccionaria de Caputo

Recordemos que lo que sirvió de inspiración para definir la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (1.4) era el Lema 2 que establecía que si $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$ y f una función con derivada n-ésima continua en el intervalo $[a, b]$ entonces $D^n f = D^m\, {}_aI_x^{m-n}[f]$, reemplazábamos n por $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y la integral clásica por la integral de Riemann-Liouville. Ahora nos preguntamos, ¿Qué sucede si realizamos la composición al revés?

Definición 10 *Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. Sea una función f tal que $D^n f \in L^1[a, b]$, definimos la derivada fraccionaria de Caputo de orden α de f como*

$$ {}_a^{C}D_x^{\alpha}[f(x)] = {}_aI_x^{n-\alpha}D^n[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt \tag{1.6} $$

Cuando no sea necesario especificar la/s variable/s de la función f, simplemente escribiremos ${}_a^{C}D_x^{\alpha}[f]$.

Observación 18 *Observemos que por Definición 6, la derivada fraccionaria de Caputo está bien definida. También notemos que para $\alpha = 0$ resulta ${}_a^C D_x^0 = I$, el operador identidad. Además, la Definición 10 del operador ${}_a^C D_x^\alpha$ coincide con la definición clásica del operador diferencial D^n cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 4 *Sea $f(x) = (x-a)^\beta$ para algún $\beta \geq 0$, entonces podemos distinguir los siguientes casos*

$$ {}_a^C D_x^\alpha[f] = \begin{cases} 0 & si \quad \beta \in \{0, 1, ..., n-1\} \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} & si \quad \beta \in \mathbb{N} \, y \, \beta \geq n \\ & o \, \beta \notin \mathbb{N} \, y \, \beta > n-1. \end{cases} $$

Notar las diferencias que tiene con el Ejemplo 3.

Observación 19 *Vimos en la Observación 15 que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante no es cero. En cambio, esto no ocurre con la derivada fraccionaria de Caputo. Del Ejemplo 4 y la linealidad del operador diferencial de Caputo, para todo $K \in \mathbb{R}$, claramente tenemos*

$$ {}_a^C D_x^\alpha[K] = 0. $$

Este comportamiento es similar al de la derivada clásica, esta es una de las ventajas de la derivada fraccionaria de Caputo por sobre la de Riemann-Lioville.

A continuación veamos cómo se relacionan ambas derivadas fraccionarias.

Teorema 11 *Sea $f \in A^n[a,b]$ entonces*

$$ {}_a^C D_x^\alpha[f] = {}_a^{RL} D_x^\alpha \left[f - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^j f(a)}{j!}(x-a)^j \right]. $$

Más aún,

$$ {}_a^C D_x^\alpha[f] = {}_a^{RL} D_x^\alpha[f] - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^j f(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(x-a)^{j-\alpha}. $$

Observación 20 *Del teorema anterior tenemos que si $0 < \alpha < 1$ y f es una función tal que ${}_a^C D_x^\alpha[f]$, ${}_a^{RL} D_x^\alpha[f]$ existen y si $f(a) = 0$ entonces ${}_a^C D_x^\alpha[f] = {}_a^{RL} D_x^\alpha[f]$.*
También podemos observar que valen teoremas análogos a Teorema 9 y Teorema 10, pero con la derivada fraccionaria de Caputo.

Teorema 12 *Sea $\alpha \geq 0$, entonces para $f \in C[a,b]$,*

$$ {}_a^C D_x^\alpha \, {}_a I_x^\alpha [f] = f. $$

Observación 21 *Observemos que, como en la Observación 14 sobre la derivada de Riemann-Liouville, la composición ${}_a I_x^\alpha \, {}_a^C D_x^\alpha [f]$ tampoco es necesariamente f. Más aún, si $f \in A^n[a,b]$ entonces*

$$ {}_a I_x^\alpha \, {}_a^C D_x^\alpha [f] = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{D^j f(a)}{j!} (x-a)^j. $$

Teorema 13 *Sean f_1 y f_2 dos funciones definidas en $[a,b]$ tales que ${}_a^C D_x^\alpha [f_1]$ y ${}_a^C D_x^\alpha [f_2]$ existen para casi todo punto. Más aún, sean c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, entonces, ${}_a^C D_x^\alpha [c_1 f_1 + c_2 f_2]$ existe para casi todo punto, y*

$$ {}_a^C D_x^\alpha [c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \, {}_a^C D_x^\alpha [f_1] + c_2 \, {}_a^C D_x^\alpha [f_2]. $$

Es decir el operador diferencial fraccionario de Caputo es lineal.

Consideremos ahora la función de Mittag-Leffler dada en la Definición 3. Recordemos que por Observación 3 tenemos que $E_1(z) = exp(z)$. Calculemos su derivada α-ésima.

Teorema 14 *Sea $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f(x) = E_\alpha(\lambda x^\alpha)$, $x \geq 0$, entonces*

$$ {}_0^C D^\alpha [f] = \lambda f(x) $$

Observación 22 *A partir del Teorema 14 podemos decir que la derivada fraccionaria de Caputo se comporta con respecto a la función de Mittag-Leffler del mismo modo que la derivada clásica se comporta con la función exponencial.*

Por último nos queda ver qué sucede con la Transformada de Laplace de la derivada de Caputo, ¿se solucionan los problemas vistos en la Observación 17?

Observación 23 *En esta observación consideraremos $a = 0$.*
Por Definición 10 de derivada fraccionaria de Caputo sabemos que

$$ {}_0^C D_x^\alpha [f] = {}_0 I_x^{n-\alpha} D^n [f]. $$

Entonces utilizando la Observación 16 propiedad ii) y la Transformada de Laplace de la integral de Riemann-Liouville vista en Observación 17, resulta

$$L\{{}_0^C D_x^\alpha[f], s\} = \frac{1}{s^{n-\alpha}} \cdot \left[s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{n-k-1} f(0) \right].$$

Aquí podemos observar que si la Transformada de Laplace es utilizada para resolver una ecuación diferencial fraccionaria de orden α, es necesario tener como datos a los valores $D^{n-k-1}f(0)$ para todo $k = 0, ..., n-1$. Es decir que para plantear un problema diferencial fraccionario que utilice la derivada de Caputo, sería necesario que en la formulación del problema las condiciones iniciales dadas sean sobre las derivadas clásicas de la función en cero, y no sobre las fraccionarias, lo cual son datos físicamente interpretables que se pueden obtener fácilmente. Por este motivo, consideramos que es más conveniente utilizar la derivada de Caputo y no la de Riemann-Liouville a la hora de definir problemas fraccionarios.

1.2.4. Derivadas fraccionarias por izquierda y por derecha

En esta sección veremos algunas definiciones y propiedades sobre las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo por izquierda y derecha. Para más detalles referirse a [34].

Definición 11 *Los operadores integrales de Riemann-Liouville por izquierda y derecha de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ están definidos, respectivamente, como*

$${}_aI_x^\alpha[f] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt$$

y

$${}_xI_b^\alpha[f] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Para $\alpha = 0$, establecemos ${}_aI_x^0 = {}_xI_b^0 = I$, el operador identidad.

Definición 12 *Los operadores diferenciales de Riemann-Liouville por izquierda y derecha de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ están definidos, respectivamente, como*

$${}_a^{RL}D_x^\alpha = D^n\, {}_aI_x^{n-\alpha}$$

y

$$ {}^{RL}_{x}D^{\alpha}_{b} = (-1)^n D^n \, {}_{x}I^{n-\alpha}_{b} $$

siendo $n = \lceil \alpha \rceil$, *esto es*

$$ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{x}[f] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t)\, dt $$

y

$$ {}^{RL}_{x}D^{\alpha}_{b}[f] = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-1-\alpha} f(t)\, dt. $$

Definición 13 *Los operadores diferenciales de Caputo por izquierda y derecha de orden* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *están definidos, respectivamente, como*

$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x} = {}_{a}I^{n-\alpha}_{x} D^n $$

y

$$ {}^{C}_{x}D^{\alpha}_{b} = {}_{x}I^{n-\alpha}_{b} (-1)^n D^n $$

siendo $n = \lceil \alpha \rceil$, *esto es*

$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}[f] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(t) dt $$

y

$$ {}^{C}_{x}D^{\alpha}_{b}[f] = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(t) dt. $$

Observación 24 *A partir de Definición 11, Definición 12 y Definición 13, podemos observar que los tres operadores presentan por izquierda una integral de* a *a* x *y por derecha una integral de* x *a* b. *Esto requiere que, cuando consideramos los operadores por izquierda, se conozca la información de la función* f *en el intervalo* $[a, x]$, *mientras que cuando consideramos los operadores por derecha se utilice la información de* f *en* $[x, b]$. *Es decir la derivada fraccionaria en* x *de una función* f *es un operador no local, dependiendo de los valores pasados de* f *(derivadas por izquierda) o de los valores futuros de* f *(derivadas por derecha). Esto se puede interpretar como que la derivada fraccionaria por izquierda de* $f(x)$ *se considera como un estado pasado del proceso* $f(x)$, *en el cual intervienen efectos de memoria, y que la derivada por derecha de* $f(x)$ *se interpreta como un estado futuro del proceso* $f(x)$, *en el cual intervienen efectos posteriores. Por esta razón, la derivada por derecha generalmente no se tiene en cuenta en las aplicaciones cuando el estado actual*

del proceso no depende de los resultados del desarrollo futuro.

Ahora veremos diferentes propiedades sobre las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y Caputo, por izquierda y derecha. Algunas ya las hemos visto, pero queremos enfatizarlas puesto que serán más utilizadas en esta tesis.

Observación 25 *Sea* $0 < \alpha < 1$. *Supongamos que* f *es una función tal que* ${}_a^{RL}D_x^{\alpha}[f]$, ${}_x^{RL}D_b^{\alpha}[f]$, ${}_a^{C}D_x^{\alpha}[f]$ *y* ${}_x^{C}D_b^{\alpha}[f]$ *existen, entonces*

$$ {}_a^{C}D_x^{\alpha}[f] = {}_a^{RL}D_x^{\alpha}[f] - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} $$

y

$$ {}_x^{C}D_b^{\alpha}[f] = {}_x^{RL}D_b^{\alpha}[f] - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}. $$

Luego si $f(a) = 0$,

$$ {}_a^{C}D_x^{\alpha}[f] = {}_a^{RL}D_x^{\alpha}[f] $$

y si $f(b) = 0$ *entonces*

$$ {}_x^{C}D_b^{\alpha}[f] = {}_x^{RL}D_b^{\alpha}[f]. $$

Ejemplo 5 *En Ejemplo 3 y Ejemplo 4, vimos que si* $\beta > -1$,

$$ {}_a^{RL}D_x^{\alpha}[(x-a)^{\beta}] = \begin{cases} 0 & si \quad \alpha - \beta \in \mathbb{N} \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} & si \quad \alpha - \beta \notin \mathbb{N}. \end{cases} $$

y para $\beta > 0$ *podíamos distinguir los siguientes casos*

$$ {}_a^{C}D_x^{\alpha}[(x-a)^{\beta}] = \begin{cases} 0 & si \quad \beta \in \{0, 1, ..., n-1\} \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} & si \quad \beta \in \mathbb{N} \, y \, \beta \geq n \\ & o \, \beta \notin \mathbb{N} \, y \, \beta > n-1. \end{cases} $$

Análogamente, se pueden obtener expresiones similares para el caso de derivadas por derecha:

$$ {}_x^{RL}D_b^{\alpha}[(b-x)^{\beta}] = \begin{cases} 0 & si \quad \alpha - \beta \in \mathbb{N} \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha} & si \quad \alpha - \beta \notin \mathbb{N}. \end{cases} $$

y para $\beta > 0$ distinguimos estos casos

$$ {}^{C}_{x}D^{\alpha}_{b}[(b-x)^{\beta}] = \begin{cases} 0 & si \quad \beta \in \{0,1,...,n-1\} \\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha} & si \quad \beta \in \mathbb{N}\, y\, \beta \geq n \\ & o\, \beta \notin \mathbb{N}\, y\, \beta > n-1. \end{cases} $$

Observación 26 *En la Observación 25 vimos bajo qué condición las derivadas fraccionarias coinciden. En esta observación veremos una importante diferencia entre ambas.*
Sea K una constante arbitraria, entonces

$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}[K] = 0 \ , \qquad {}^{C}_{x}D^{\alpha}_{b}[K] = 0 \ , $$

sin embargo

$$ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{x}[K] = \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \ , \qquad {}^{RL}_{x}D^{\alpha}_{b}[K] = \frac{K}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha} \ , $$

siendo para $0 < \alpha < 1$,

$$ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{x}[(x-a)^{\alpha-1}] = 0 \ , \qquad {}^{RL}_{x}D^{\alpha}_{b}[(b-x)^{\alpha-1}] = 0 \ . $$

En este sentido, la derivada fraccionaria de Caputo es similar a la derivada clásica. Por este motivo, en algunos casos, es más fácil resolver ecuaciones diferenciales que utilizan derivadas de Caputo en lugar de aquellas que usan derivada de Riemann-Liouville.

Teorema 15 *Sea $0 < \alpha < 1$ y $f \in L^1([a,b])$, entonces*

$$ {}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{x}\, {}_{a}I^{\alpha}_{x}[f] = f(x), \qquad {}^{RL}_{x}D^{\alpha}_{b}\, {}_{x}I^{\alpha}_{b}[f] = f(x) $$

y

$$ {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}\, {}_{a}I^{\alpha}_{x}[f] = f(x), \qquad {}^{C}_{x}D^{\alpha}_{b}\, {}_{a}I^{\alpha}_{x}[f] = f(x) $$

para casi todo punto.

Teorema 16 *Sea $0 < \alpha < 1$, $f \in C^1([a,b])$ y $g \in L^1([a,b])$. Entonces*

$$ \int_a^b g(x)\, {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}[f]\, dx = \int_a^b f(x)\, {}^{RL}_{x}D^{\alpha}_{b}[g]\, dx + \left[{}_{x}I^{1-\alpha}_{b}[g] f(x) \right] \Big|^{b}_{a} $$

y

$$\int_a^b g(x)\,{}_x^C D_b^\alpha[f]\,dx = \int_a^b f(x)\,{}_a^{RL} D_x^\alpha[g]\,dx - \left[\,{}_aI_x^{1-\alpha}[g]f(x)\right]\Big|_a^b \quad .$$

Más aún, si $f(a) = f(b) = 0$*, obtenemos*

$$\int_a^b g(x)\,{}_a^C D_x^\alpha[f]\,dx = \int_a^b f(x)\,{}_x^{RL} D_b^\alpha[g]\,dx$$

y

$$\int_a^b g(x)\,{}_x^C D_b^\alpha[f]\,dx = \int_a^b f(x)\,{}_a^{RL} D_x^\alpha[g]\,dx.$$

Este Teorema es conocido como Integración por Partes Fraccionario.

Dado que la resolución de manera exacta de ecuaciones diferenciales fraccionarias puede ser muy difícil, a continuación veremos algunos métodos numéricos que utilizaremos en la tesis.

1.3. Métodos numéricos fraccionarios

En esta sección veremos dos métodos numéricos que serán utilizados para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias. Para más detalles referirse a [9, 36].

1.3.1. Método de Adams

El método de Adams fraccionario es un método numérico para aproximar las soluciones de problemas de la forma

$$\begin{cases} {}_0^C D_x^\alpha[u] &= f(x,u(x)) & m-1<\alpha<m \\ u^{(j)}(0) &= u_0^j & j=0,1,...,m-1, \end{cases} \tag{1.7}$$

siendo $m \in \mathbb{N}$.
Para aproximar la solución de dicho problema vamos a utilizar el siguiente lema.

Lema 4 *Si la función* f *es continua, entonces, el problema a valores iniciales (1.7) es equivalente a la ecuación no lineal integral de Volterra de segundo tipo,*

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^j}{j!} u^{(j)}(0) + \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} f(s,u(s))\mathrm{ds} = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^j}{j!} u^{(j)}(0) + {}_0I_x^\alpha[f(x,u(x))], \end{aligned} \tag{1.8}$$

Gracias a este lema nos centraremos en aproximar ${}_0I_x^\alpha[f(x,u(x))]$.
El método de Adams fraccionario, que mostraremos a continuación, es de tipo predictor–corrector, es decir primero utilizamos el método de Euler como predictor, para luego usar el método de la Regla Trapezoidal fraccionaria como corrector.

Definición 14 *Consideremos una partición del intervalo* $[0,x]$ *como* $x_0 = 0 < x_1 < ... < x_{n+1} = x$ *siendo* $x_{j+1} - x_j = \Delta x$*, el método de Adams fraccionario consiste en el siguiente*

$$\begin{cases} u_{n+1}^P = & \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_{n+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + \sum_{j=0}^{n} b_{j,n+1} f(x_j, u_j) \\ u_{n+1} = & \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x_{n+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + \sum_{j=0}^{n} a_{j,n+1} f(x_j, u_j) + a_{n+1,n+1} f(x_{n+1}, u_{n+1}^P). \end{cases} \tag{1.9}$$

donde

$$b_{j,n+1} = \frac{\Delta x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha \right] \tag{1.10}$$

son los coeficientes que vienen dados por el método de Euler fraccionario y

$$a_{j,n+1} = \frac{\Delta x^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha & j = 0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} & 1 \le j \le n \\ 1 & j = n+1 \end{cases} \tag{1.11}$$

son los coeficientes que vienen dados por el método de la Regla Trapezoidal fraccionaria.

Observación 27 *El método de Adams fraccionario para* $\alpha = 1$ *se reduce al clásico método predictor–corrector*

$$\begin{cases} u_{n+1}^P = & u_n + \Delta x f(x_n, u_n) \\ u_{n+1} = & \frac{\Delta x}{2} \left(f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1}^P) \right), \end{cases} \tag{1.12}$$

donde se utilizan los métodos de Euler y Regla Trapezoidal en sentido clásico.

1.3.2. Método L_1

El siguiente algoritmo es un método eficiente para aproximar las derivadas fraccionarias de Caputo por izquierda y derecha de orden $0 < \alpha < 1$.

Definición 15 *Se considera un mallado sobre* $[a,b]$ *como* $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ *siendo* $x_{j+1} - x_j = \Delta x$*, el método* L_1 *para aproximar la derivada por izquierda de la función* f

en el punto x_i consiste en

$$ {}_{a}^{C}D_{x_i}^{\alpha}[f] = \sum_{j=0}^{i-1} b_{n-j-1}(f(x_{j+1}) - f(x_j)), \tag{1.13} $$

y para aproximar la derivada por derecha de la función f en el punto x_i es

$$ {}_{x_i}^{C}D_{b}^{\alpha}[f] = \sum_{j=i}^{n-1} (-b_{j-i})\,(f(x_{j+1}) - f(x_j)), \tag{1.14} $$

donde los coeficientes vienen dados por $b_j = \frac{\Delta x^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\,[(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}]$.

Observación 28 *Podemos reescribir la expresión (1.14) de la siguiente manera*

$$ {}_{x_i}^{C}D_{b}^{\alpha}[f] = b_0 f(x_i) + \sum_{j=i+1}^{n-1} (b_{j-i} - b_{j-i-1})\, f(x_j) - b_{n-i-1} f(x_n), \tag{1.15} $$

en efecto,

$$ \begin{aligned} {}_{x_i}^{C}D_{b}^{\alpha}[f] &= \sum_{j=i}^{n-1} (-b_{j-i})\,(f(x_{j+1}) - f(x_j)) \\ &= \sum_{j=i}^{n-1} (-b_{j-i}) f(x_{j+1}) + \sum_{j=i}^{n-1} b_{j-i} f(x_j) \\ &= \sum_{j=i+1}^{n} (-b_{i-i-1}) f(x_j) + \sum_{j=i}^{n-1} b_{j-i} f(x_j) \\ &= \sum_{j=i+1}^{n-1} (-b_{i-i-1}) f(x_j) - b_{n-i-1} f(x_n) + b_0 f(x_i) + \sum_{j=i+1}^{n-1} b_{j-i} f(x_j) \\ &= b_0 f(x_i) + \sum_{j=i+1}^{n-1} (b_{j-i} - b_{j-i-1})\, f(x_j) - b_{n-i-1} f(x_n). \end{aligned} $$

Además, de la Observación 25 resulta

$$ \begin{aligned} {}_{x_i}^{RL}D_{b}^{\alpha}[f] &= b_0 f(x_i) + \sum_{j=i+1}^{n-1} (b_{j-i} - b_{j-i-1})\, f(x_j) - b_{n-i-1} f(x_n) \\ &\quad + \tfrac{f(x_n)}{\Gamma(1-\alpha)} (x_n - x_i)^{-\alpha}, \end{aligned} \tag{1.16} $$

Esta expresión nos servirá más adelante.

Capítulo 2

Problemas variacionales

En este capítulo estudiaremos diferentes tipos de problemas variacionales, tanto en su versión clásica (con derivadas de orden entero), como en su versión fraccionaria (con derivadas de orden real positivo).

En las primeras secciones trabajaremos sobre condiciones de optimalidad en problemas variacionales clásicos con condiciones de borde.

En las siguientes secciones, analizaremos diferentes condiciones de optimalidad para problemas variacionales fraccionarios con lagrangianos que involucran derivadas fraccionarias y problemas variacionales fraccionarios mixtos con lagrangianos que involucran derivadas fraccionarias y clásicas, ambos con condiciones de borde.

Algunos de los temas tratados en este capítulo son resultados nuestros que hemos publicado en [12] y [13].

2.1. Problemas variacionales clásicos

En esta sección trabajaremos en la búsqueda de condiciones necesarias de optimalidad para problemas variacionales clásicos. Con clásicos nos referimos a problemas variacionales donde sus lagrangianos involucran sólo derivadas enteras y no fraccionarias.

El problema fundamental del cálculo de variaciones con el que vamos a trabajar consiste en hallar funciones $y \in {}_aE'_b$, tal que maximicen o minimicen el siguiente funcional

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y')\, dx \tag{2.1}$$

y que estén sujetas a las condiciones de borde $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$. Aquí tenemos

$$ {}_aE'_b = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} / y \in C^2([a,b])\} $$

y L función de Lagrange de clase $C^1([a,b]\times\mathbb{R}^2)$ tal que $\frac{\partial L}{\partial y'}$ posee derivada primera continua. A continuación veremos una condición necesaria para encontrar las funciones y que resuelven el problema (2.1). En [47] se demuestran los siguientes Lemas y Teorema.

Lema 5 *Sean c y d dos números reales tales que $c < d$. Entonces existe una función $\nu \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $\nu(x) > 0$ para todo $x \in (c,d)$ y $\nu(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - (c,d)$.*

Lema 6 *Supongamos que $\langle \eta, g\rangle := \int_a^b \eta(x)g(x)dx = 0$ para todo $\eta \in C^1([a,b])$ tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces $g = 0$ en $[a,b]$.*

Teorema 17 ***Ecuación de Euler-Lagrange***
Si $y \in {}_aE'_b$ es un mínimo o un máximo de J en (2.1) entonces y es una solución de la ecuación diferencial

$$ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \tag{2.2} $$

para todo $x \in [a,b]$.

Observación 29 *La ecuación (2.2) se denomina Ecuación de Euler-Lagrange.*

A continuación realizaremos una generalización de estos problemas en el cálculo fraccionario.

2.2. Problemas variacionales fraccionarios

En esta sección trabajaremos en la búsqueda de condiciones necesarias de optimalidad para problemas variacionales con lagrangianos que involucran derivadas fraccionarias.
El problema fundamental del cálculo de variaciones fraccionario con el que vamos a trabajar en esta sección consiste en hallar funciones $y \in {}_aE^{\alpha}_b$, tal que maximicen o minimicen el siguiente funcional

$$ J(y) = \int_a^b L(x, y, {}_a^C D_x^{\alpha}[y])\, dx \tag{2.3} $$

y que estén sujetas a las condiciones de borde $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$.

Consideremos $\alpha \in (0,1)$ y

$$ {}_aE_b^\alpha = \left\{ y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} / \ {}_a^C D_x^\alpha [y] \in C[a,b] \right\}, $$

L función de Lagrange de clase $C^1([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ y $\frac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y]}$ posee derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por derecha de orden α continua para $y \in {}_aE_b^\alpha$.
A continuación veremos condiciones necesarias para encontrar las funciones y que resuelven el problema (2.3). En [2] se demuestra el siguiente Teorema.

Teorema 18 ***Ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria***
Si y es un mínimo o un máximo de J en (2.3) sobre ${}_aE_b^\alpha$, entonces y es una solución de la ecuación diferencial fraccionaria

$$ \frac{\partial L}{\partial y} + {}_x^{RL} D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y]} \right] = 0 \tag{2.4} $$

para todo $x \in [a,b]$.

Demostración: Definimos el conjunto

$$ V = \left\{ \eta \in C^1([a,b]) \cap {}_aE_b^\alpha / \ \eta(a) = \eta(b) = 0 \right\}. $$

Dado $\epsilon \ll 1$, consideremos $\eta \in V$ y funciones de la forma $y + \epsilon\eta$.

Definimos la función j a valores reales, como

$$ j(\epsilon) = J(y + \epsilon\eta) = \int_a^b L(x, y + \epsilon\eta, {}_a^C D_x^\alpha [y + \epsilon\eta])\, dx. $$

Como y es mínimo o máximo de J, entonces en $\epsilon = 0$ hay un mínimo o máximo de j, luego debe ser $j'(0) = 0$.

Así, derivando j respecto de ϵ y evaluando en 0 tenemos

$$ \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\, \eta + \frac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y]}\, {}_a^C D_x^\alpha [\eta] \right) dx = 0. $$

Renombrando con $A = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}\, \eta\, dx$ y $B = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y]}\, {}_a^C D_x^\alpha [\eta]\, dx$, tenemos que $A + B = 0$.

Ahora integrando por partes a B, utilizando el Teorema de Integración por Partes Fraccionario (Teorema 16) y usando las condiciones $\eta(a) = \eta(b) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} B &= \int_a^b \eta \, {}_x^{RL}D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^\alpha[y]} \right] dx + {}_xI_b^{1-\alpha} \left[\frac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^\alpha[y]} \right] \eta(x) \Big|_a^b \\ &= \int_a^b \eta \, {}_x^{RL}D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^\alpha[y]} \right] dx. \end{aligned}$$

Así, como $A + B = 0$, sacando factor común η

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} + {}_x^{RL}D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^\alpha[y]} \right] \right) \eta \, dx = 0.$$

Luego, por Lema 6, obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial y} + {}_x^{RL}D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^\alpha[y]} \right] = 0,$$

como queríamos probar. □

Observación 30 *Aquí la ecuación (2.4) se denomina ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria. Hacemos notar que aunque el funcional (2.3) contiene sólo derivadas fraccionarias de Caputo, la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria también contiene derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, esto es una consecuencia de la utilización del Teorema de Integración por Partes Fraccionario (Teorema 16) en la demostración de la misma. Por este motivo simplificaremos el nombre de esta ecuación como ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria C-RL.*

Observación 31 *Como ya mencionamos antes, la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria C-RL (2.4) contiene ambas derivadas fraccionarias, las de Caputo y las de Riemann-Liouville, a pesar de que en el funcional (2.3) aparezcan sólo derivadas fraccionarias de Caputo. No obstante, es posible escribir la ecuación de Euler-Lagrange en términos de las derivadas fraccionarias de Caputo solamente.*
¿Con qué objetivo querríamos realizar esto? La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville jugó un papel determinante en el desarrollo del cuerpo teórico del cálculo fraccionario, y se utilizó con éxito en aplicaciones estrictamente matemáticas. Pero al tratar de realizar modelizaciones matemáticas de fenómenos físicos reales por medio de ecuaciones diferenciales fraccionarias, surgió el problema de las condiciones iniciales también de

orden fraccionario, como vimos en la Observación 17. Este tipo de condiciones no son físicamente interpretables y presentan un obstáculo considerable a la hora de hacer uso práctico del cálculo fraccionario. El operador diferencial de Caputo, en contraste con el de Riemann-Liouville, emplea como condiciones iniciales derivadas de orden entero, como vimos en la Observación 23, es decir, valores iniciales que son físicamente interpretables como en los modelos con derivadas enteras. La definición que sigue representó pues un notable avance práctico en el estudio de fenómenos físicos como los de tipo viscoelástico y otros. Además en muchos casos trabajar con la derivada de Caputo hace que los cálculos sean más sencillos, puesto que ésta, en algunos aspectos, es similar a la derivada clásica, como vimos en la Observación 26.

Una manera de hacer que en la ecuación de Euler-Lagrange intervengan sólo derivadas de Caputo es utilizando la relación entre ambas derivadas vista en la Observación 25.

Así, para $0 < \alpha < 1$*, la ecuación (2.4)*

$$\frac{\partial L}{\partial y} + {}_{x}^{RL}D_{b}^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}[y]}\right] = 0$$

puede ser reemplazada por

$$\frac{\partial L}{\partial y} \quad + \quad {}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}[y]}\right] + \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial L}{\partial\, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}[y]}\bigg|_{x=a} = 0. \tag{2.5}$$

Esta ecuación contiene términos de contorno que nos pueden dar singularidades en los puntos extremos, por esta razón, preferimos la ecuación (2.4) sobre la ecuación (2.5).

Sin embargo, si se presentan algunas hipótesis adicionales esta última puede simplificarse considerablemente. A continuación veremos esta reducción, el trabajo completo se encuentra en [35].

A continuación veremos diferentes propiedades que nos habilitarán a realizar un Teorema que simplifique la ecuación (2.5).

Observación 32 *Utilizando la Definición 11 de integral fraccionaria de Riemann-Lioville por derecha, podemos reescribir el problema (2.3) de otra manera.*

$$J(y) = \int_{a}^{b} L(x, y, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}[y])\, dx = \Gamma(\alpha)\, {}_{a}I_{b}^{\alpha}\left[(b-x)^{1-\alpha}L(x, y, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}[y])\right] \ . \tag{2.6}$$

Lema 7 *Sean $f \in L^1([a,b])$ y $0 < \alpha < 1$. Si existe $\epsilon \in (a,b]$ tal que*

$$|f(x)| \leq c(x-a)^{\gamma}$$

para todo $x \in [a,\epsilon]$ con $c > 0$ y $\gamma > -\alpha$ entonces

$$\lim_{x \to +a} {}_aI_x^{\alpha}[f](x) = 0. \tag{2.7}$$

Demostración: De la Definición 11 de integral fraccionaria de Riemann-Liouville, tenemos

$$\begin{aligned} |\Gamma(\alpha)\, {}_aI_x^{\alpha}[f](x)| &= \left| \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha}} du \right| \leq c \int_a^x \frac{(u-a)^{\gamma}}{(x-u)^{1-\alpha}} du \\ &= c \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} (x-a)^{\alpha+\gamma} \end{aligned}$$

para todo $x \in [a,\epsilon]$. Teniendo en cuenta que $\alpha + \gamma > 0$, sigue que

$$\left| \lim_{x \to +a} {}_aI_x^{\alpha}[f](x) \right| \leq c \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \lim_{x \to +a} (x-a)^{\alpha+\gamma} = 0.$$

□

Lema 8 ***El Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones Fraccionario de DuBois–Reymond***
Sean $0 < \alpha < 1$, g una función diferenciable en $[a,b]$ con $g(a) = g(b) = 0$, y $f \in L^1([a,b])$ tal que existe $\epsilon \in (a,b]$ con $|f(x)| \leq c(x-a)^{\gamma}$ para todo $x \in [a,\epsilon]$, donde $c > 0$ y $\gamma > -\alpha$ son constantes. Tenemos que, si ${}_aI_b^{\alpha}\left[f\, {}_a^C D_x^{\alpha}[g]\right] = 0$ entonces $f \equiv K$, donde K es una constante.

Demostración: Para cualquier constante K tenemos,

$$\begin{aligned} {}_aI_b^{\alpha}\left[(f-K)\, {}_a^C D_x^{\alpha}[g]\right] &= {}_aI_b^{\alpha}\left[f\, {}_a^C D_x^{\alpha}[g]\right] - K\, {}_aI_b^{\alpha}\left[{}_a^C D_x^{\alpha}[g]\right] \\ &\underbrace{=}_{hip} -K\, {}_aI_b^{\alpha}\left[{}_a^C D_x^{\alpha}[g]\right] \\ &\underbrace{=}_{Obs.21} -K(g(b)-g(a)) \\ &\underbrace{=}_{hip} 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ahora definimos

$$g(x) = {}_aI_x^\alpha \left[f - K\right]. \tag{2.9}$$

Podemos observar que por la Observación 13, la función g en (2.9) es diferenciable en $[a, b]$. Además, de (2.7) del Lema 7 tenemos que $g(a) = 0$, y eligiendo

$$K = \frac{1}{{}_aI_b^\alpha\left[1\right]}\,{}_aI_b^\alpha\left[f\right] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha}\,{}_aI_b^\alpha\left[f\right],$$

también tenemos que

$$\begin{aligned} g(b) &= {}_aI_b^\alpha\left[f-K\right] = {}_aI_b^\alpha\left[f\right] - K\,{}_aI_b^\alpha\left[1\right] \\ &= {}_aI_b^\alpha\left[f\right] - \frac{1}{\cancel{{}_aI_b^\alpha\left[1\right]}}\,{}_aI_b^\alpha\left[f\right]\cancel{{}_aI_b^\alpha\left[1\right]} = 0. \end{aligned}$$

Es decir que g cumple con las hipótesis y podemos utilizar (2.8). Entonces, reemplazando (2.9) en (2.8), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= {}_aI_b^\alpha\left[(f-K)\,{}_a^CD_x^\alpha[g]\right] \\ &= {}_aI_b^\alpha\left[(f-K)\,{}_a^CD_x^\alpha[\,{}_aI_x^\alpha\left[f-K\right]]\right] \\ &\underbrace{=}_{Teo.15} {}_aI_b^\alpha\left[(f-K)(f-K)\right] \\ &= {}_aI_b^\alpha\left[(f-K)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{(f(u)-K)^2}{(b-u)^{1-\alpha}}du. \end{aligned}$$

Como $b - x > 0$ para todo $x \in [a, b)$, podemos concluir que $f(x) = K$ para todo $x \in [a, b]$. □

Teorema 19 ***Ecuación de Euler-Lagrange Fraccionaria en Forma Integral*** *Sea J el funcional en (2.3), es decir*

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, {}_a^CD_x^\alpha[y])\,dx = \Gamma(\alpha)\,{}_aI_b^\alpha\left[(b-x)^{1-\alpha}L(x, y, {}_a^CD_x^\alpha[y])\right] \tag{2.10}$$

definido para las funciones $y \in {}_aE_b^\alpha$, y donde suponemos $L \in C^1([a, b)\times\mathbb{R}^2)$, diferenciable respecto a todos sus argumentos. Si y es un optimizador de J, entonces y satisface la siguiente ecuación integral de Euler-Lagrange fraccionaria

$${}_xI_b^\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial y}\right] + \frac{\partial L}{\partial\,{}_a^CD_x^\alpha[y]} = \frac{K}{(b-x)^{1-\alpha}} \tag{2.11}$$

para todo $x \in [a, b)$, donde K es una constante.

Demostración: Sea y^* un optimizador de J. Definimos la familia de funciones

$$y(x) = y^*(x) + \epsilon\eta(x) \tag{2.12}$$

donde ϵ es una constante y $\eta \in {}_aE_b^\alpha$ es una función arbitraria que satisface las condiciones de borde $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

De (2.12), $\eta(a) = \eta(b) = 0$, $y^*(a) = y_a$ e $y^*(b) = y_b$, tenemos que la función y es admisible, es decir, $y \in C^1([a, b])$, $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$.

De ahora en adelante, denotamos $L[y] = L(x, y, {}_a^C D_x^\alpha y)$.

Como y^* es un optimizador del funcional J, la derivada de Gateaux $\delta J[y^*]$ necesariamente será nula, es decir

$$\begin{aligned}\delta J[y^*] &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(\int_a^b L[y]dx - \int_a^b L[y^*]dx\right) \\ &= \int_a^b \left(\eta(x)\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} + {}_a^C D_x^\alpha[\eta]\frac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y^*]}\right) dx = 0\ .\end{aligned}$$

Definimos $A = \displaystyle\int_a^b \left(\eta(x)\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right) dx$ y $B = \displaystyle\int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha[\eta]\frac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y^*]}\right) dx$.
Usando el Teorema 15, la homogeneidad de las condiciones sobre η y el Teorema 16 de Integración por Partes Fraccionario,

$$\begin{aligned}A &= \int_a^b \left(\eta(x)\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right) dx \\ &= \int_a^b \left(\eta(x)\, {}_x^{RL} D_b^\alpha\left[{}_xI_b^\alpha\left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right]\right]\right) dx \\ &= \int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha[\eta]\, {}_xI_b^\alpha\left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right]\right) dx\ .\end{aligned}$$

Y así obtenemos,

$$A + B = \int_a^b {}_a^C D_x^\alpha[\eta]\left({}_xI_b^\alpha\left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right] + \frac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y^*]}\right) dx = 0.$$

Reescribiendo esto de otra forma, tenemos la siguiente expresión

$$\Gamma(\alpha)\, {}_aI_b^\alpha\left[{}_a^C D_x^\alpha[\eta]\left({}_xI_b^\alpha\left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right] + \frac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y^*]}\right)(b - x)^{1-\alpha}\right] = 0.$$

Definimos

$$f(x) = \left({}_xI_b^\alpha \left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right] + \frac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha [y^*]} \right) (b-x)^{1-\alpha}.$$

Como $L \in C^1([a,b) \times \mathbb{R}^2)$, tenemos que f es acotada en un entorno suficientemente pequeño de a y tomando $\gamma = 0 > -\alpha$, las hipótesis del Lema 8 se verifican, por lo tanto existe K constante tal que

$$\left({}_xI_b^\alpha \left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right] + \frac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha [y^*]} \right) (b-x)^{1-\alpha} = K$$

y obtenemos la ecuación deseada,

$${}_xI_b^\alpha \left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right] + \frac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha [y^*]} = \frac{K}{(b-x)^{1-\alpha}}.$$

□

Teorema 20 ***Ecuación de Euler-Lagrange Fraccionaria con sólo derivadas de Caputo***

Sea y un optimizador de J en (2.3) perteneciente a $C^1[a,b] \cap {}_aE_b^\alpha$, con $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, sujeto a las condiciones de borde $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, entonces y satisface la siguiente ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria en la que intervienen sólo las derivadas fraccionarias de Caputo

$$\frac{\partial L}{\partial y} + {}_x^C D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha [y]} \right] = 0 \ . \tag{2.13}$$

Demostración: Consideremos la ecuación (2.11),

$${}_xI_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial y} \right] + \frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha [y]} = \frac{K}{(b-x)^{1-\alpha}}. \tag{2.14}$$

Tomando límite cuando $x \to b^-$ en ambos miembros de la igualdad, el lado izquierdo, como $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ e $y \in C^1[a,b] \cap {}_aE_b^\alpha$, resulta que el primer sumando tiende a cero y el segundo sumando resulta un número real finito. Mientras que, el lado derecho diverge si $K \neq 0$. Por lo tanto podemos concluir que necesariamente $K = 0$.

Es decir que la ecuación (2.14) resulta

$${}_xI_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial y} \right] + \frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha [y]} = 0. \tag{2.15}$$

Por último, aplicamos derivada por derecha de Caputo a ambos miembros de la

igualdad

$$ {}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}\left[{}_{x}I_{b}^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial y}\right]+\frac{\partial L}{\partial\, {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}[y]}\right]={}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}\left[0\right], \tag{2.16} $$

y utilizando linealidad de la derivada de Caputo, el Teorema 15 y la Observación 19, obtenemos la condición (2.13). □

Observación 33 *Podemos observar que en la ecuación (2.13) aparecen sólo derivadas de Caputo, a diferencia de la ecuación obtenida anteriormente en (2.4). Notemos la importancia de que* $L \in C^2\left([a,b]\times\mathbb{R}^2\right)$*, sin esta hipótesis este resultado no sería válido.*
Como hemos remarcado en Observación 31, la ventaja de esta nueva formulación es que las derivadas de Caputo se consideran más apropiadas que las derivadas de Riemann-Liouville para modelizar problemas y hacen los cálculos más sencillos de resolver puesto que se comporta, en algunos casos, de manera similar a la derivada clásica, como vimos en la Observación 19.
Análogamente a la Observación 30, simplificaremos el nombre de la ecuación (2.13) como ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria C-C.

A continuación trataremos otro tipo de problemas variacionales.

2.3. Problemas variacionales mixtos

En esta sección trataremos una clase de problemas diferentes a los que veníamos trabajando. Estos consisten en problemas variacionales fraccionarios cuyo lagrangiano no sólo depende de las derivadas fraccionarias de Caputo, sino que también dependerá de la derivada de primer orden. Es decir, teniendo en cuenta que el orden fraccionario $\alpha \in (0,1)$, consideramos que el orden entero es el mayor orden de las derivadas que aparecen en lagrangiano. Este tipo de problemas los llamaremos problemas variacionales mixtos.
Pero, ¿por qué queremos estudiar este tipo de problemas? La principal ventaja de esta nueva formulación, con respecto al enfoque puramente fraccionario visto en la sección 2.2 del Capítulo 2, es que los resultados de los problemas variacionales clásicos ahora podrán ser obtenidos como casos particulares. Recordemos que la única posibilidad de obtener la derivada primera y' de una derivada fraccionaria ${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$, es tomando límite cuando α tiende a uno. Sin embargo, en algunos casos este límite no existe, como en los ejemplos dados en [45].
Como hicimos anteriormente, para este tipo de problemas veremos condiciones necesarias de optimalidad. Encontraremos nuevas ecuaciones de Euler-Lagrange tanto de C-RL como

de C-C. Para las primeras, seguiremos [41], mientras que las segundas son resultados nuestros que hemos publicado en [13].
Comencemos primero con el planteo del problema, éste consiste en hallar funciones $y \in {}_a^{\alpha}E'_b$, tal que maximicen o minimicen el siguiente funcional

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', {}_a^C D_x^{\alpha}[y])\, dx \tag{2.17}$$

y que estén sujetas a las condiciones de borde $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$.
Consideremos $\alpha \in (0, 1)$ y

$${}_a^{\alpha}E'_b = \{y : [a, b] \to \mathbb{R} / y \in C^1([a, b]),\ {}_a^C D_x^{\alpha}[y] \in C([a, b])\},$$

L función de Lagrange de clase $C^1([a, b] \times \mathbb{R}^3)$, $\frac{\partial L}{\partial y'}$ posee derivada primera continua y $\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}$ posee derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por derecha de orden α continua para $y \in {}_a^{\alpha}E'_b$.
A continuación veremos diferentes condiciones de optimalidad para las funciones y que resuelven el problema (2.17).

Teorema 21 ***Ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria para problemas mixtos*** *Si y es un mínimo o un máximo de J en (2.17) sobre ${}_a^{\alpha}E'_b$, entonces y es una solución de la ecuación diferencial fraccionaria*

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_x^{RL}D_b^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}\right] = 0 \tag{2.18}$$

para todo $x \in [a, b]$.

Demostración: Definimos el conjunto

$$V = \{\eta \in {}_a^{\alpha}E'_b / \ \eta(a) = \eta(b) = 0\}.$$

Dado $\epsilon \ll 1$, consideremos $\eta \in V$ y funciones de la forma $y + \epsilon\eta$.

Definimos la función j a valores reales, como

$$j(\epsilon) = J(y + \epsilon\eta) = \int_a^b L(x, y + \epsilon\eta, (y + \epsilon\eta)', {}_a^C D_x^{\alpha}[y + \epsilon\eta])\, dx$$

Como y es mínimo o máximo de J, entonces en $\epsilon = 0$ hay un mínimo o máximo de j, luego debe ser $j'(0) = 0$.

Así, derivando j respecto de ϵ y evaluando en 0 tenemos

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\,\eta + \frac{\partial L}{\partial y'}\,\eta' + \frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\, {}_a^C D_x^\alpha[\eta] \right) dx = 0.$$

Renombrando con

$$A = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}\,\eta\,dx,\ B = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}\,\eta'\,dx \ \text{ y } \ C = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\, {}_a^C D_x^\alpha[\eta]\,dx,$$

tenemos que $A + B + C = 0$.

Ahora integrando por partes a B, en sentido clásico, y a C, en sentido fraccionario utilizando el Teorema 16, y usando las condiciones $\eta(a) = \eta(b) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} B &= -\int_a^b \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) dx + \frac{\partial L}{\partial y'}\eta(x)\,\Big|_a^b \\ &= -\int_a^b \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_a^b \eta\, {}_x^{RL} D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\right] dx + {}_xI_b^{1-\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\right]\eta(x)\,\Big|_a^b \\ &= \int_a^b \eta\, {}_x^{RL} D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\right] dx. \end{aligned}$$

Así, como $A + B + C = 0$, sacando factor común η

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_x^{RL} D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\right] \right) \eta\,dx = 0.$$

Luego, utilizando el Lema 6, obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_x^{RL} D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\right] = 0,$$

como queríamos probar. □

A continuación, siguiendo con las mismas ideas de la sección 2.2 del Capítulo 2, llegaremos a la deducción de una ecuación de Euler-Lagrange C-C para el problema variacional mixto (2.17).

Observación 34 *Como en la Observación 32, utilizando la Definición 11 de integral fraccionaria de Riemann-Lioville por derecha, podemos reescribir el problema (2.17) como,*

$$J(y) = \int_a^b L\left(x, y, y', {}_a^C D_x^\alpha[y]\right) dx = \Gamma(\alpha)\, {}_aI_b^\alpha \left[(b-x)^{1-\alpha} L\left(x, y, y', {}_a^C D_x^\alpha[y]\right)\right] \ . \quad (2.19)$$

Teorema 22 ***Ecuación de Euler-Lagrange Fraccionaria en Forma Integral para problemas variacionales mixtos***
Sea J el funcional en (2.17), es decir

$$J(y) = \int_a^b L\left(x, y, y', {}_a^C D_x^\alpha[y]\right) dx = \Gamma(\alpha)\, {}_aI_b^\alpha \left[(b-x)^{1-\alpha} L\left(x, y, y', {}_a^C D_x^\alpha[y]\right)\right] \ , \quad (2.20)$$

definido para las funciones $y \in {}_a^\alpha E_b'$, y donde suponemos $L \in C^1([a,b)\times\mathbb{R}^3)$, diferenciable respecto a todos sus argumentos y $\frac{\partial L}{\partial y'}$ posee derivada primera continua. Si y es un optimizador de J, entonces y satisface la siguiente ecuación integral de Euler-Lagrange fraccionaria

$${}_xI_b^\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial y}\right] - {}_xI_b^\alpha\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right] + \frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]} = \frac{K}{(b-x)^{1-\alpha}} \quad (2.21)$$

para todo $x \in [a,b)$, donde K es una constante.

Demostración: Sea y^* un optimizador de J. Definimos la familia de funciones

$$y(x) = y^*(x) + \epsilon\eta(x) \quad (2.22)$$

donde ϵ es una constante y $\eta \in {}_a^\alpha E_b'$ es una función arbitraria que satisface las condiciones de borde $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

De (2.22), $\eta(a) = \eta(b) = 0$, $y^*(a) = y_a$ e $y^*(b) = y_b$, tenemos que la función y es admisible, es decir, $y \in C^1([a,b])$, $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$.

De ahora en adelante, denotamos $L[y] = L(x, y, y', {}_a^C D_x^\alpha y)$.

Como y^* es un optimizador del funcional J, la derivada de Gateaux $\delta J[y^*]$ necesariamente será nula, es decir

$$\begin{aligned}\delta J[y^*] &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\int_a^b L[y]dx - \int_a^b L[y^*]dx\right)\\ &= \int_a^b \left(\eta(x)\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} + \eta'(x)\frac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'} + {}_a^C D_x^\alpha[\eta]\frac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y^*]}\right) dx = 0\ .\end{aligned}$$

Definimos

$$A = \int_a^b \left(\eta(x)\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right) dx,\ B = \int_a^b \left(\eta'(x)\frac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'}\right) dx,$$
$$\text{y } C = \int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha[\eta]\frac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y^*]}\right) dx\ .$$

Usando el Teorema 15, la homogeneidad de las condiciones sobre η y el Teorema 16 de Integración por Partes Fraccionario,

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \left(\eta(x)\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right) dx = \\ &= \int_a^b \left(\eta(x)\, {}_x^{RL} D_b^\alpha \left[{}_x I_b^\alpha \left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right]\right]\right) dx = \\ &= \int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha[\eta]\, {}_x I_b^\alpha \left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right]\right) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_a^b \left(\eta'(x)\frac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'}\right) dx = \\ &= \eta(x)\tfrac{\partial L[y^*]}{\partial y'^*}\Big|_a^b - \int_a^b \left(\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'}\right)\right) dx \\ &= -\int_a^b \left(\eta(x)\, {}_x^{RL} D_b^\alpha \left[{}_x I_b^\alpha \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'}\right)\right]\right]\right) dx = \\ &= -\int_a^b \left({}_a^C D_x^\alpha[\eta]\, {}_x I_b^\alpha \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'}\right)\right]\right) dx\ . \end{aligned}$$

Y así obtenemos,

$$A + B + C = \int_a^b {}_a^C D_x^\alpha[\eta]\left({}_x I_b^\alpha\left[\tfrac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right] - {}_x I_b^\alpha\left[\tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'}\right)\right] + \tfrac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y^*]}\right) dx = 0.$$

Reescribiendo esto de otra forma, tenemos la siguiente expresión

$$\Gamma(\alpha)\, {}_a I_b^\alpha\left[{}_a^C D_x^\alpha[\eta]\left({}_x I_b^\alpha\left[\tfrac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right] - {}_x I_b^\alpha\left[\tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'}\right)\right] + \tfrac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y^*]}\right)(b-x)^{1-\alpha}\right] = 0.$$

Definimos

$$f(x) = \left({}_x I_b^\alpha\left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*}\right] - {}_x I_b^\alpha\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'}\right)\right] + \frac{\partial L[y^*]}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y^*]}\right)(b-x)^{1-\alpha}.$$

Como $L \in C^1([a,b) \times \mathbb{R}^3)$ y $\frac{\partial L}{\partial y'}$ posee derivada primera continua, tenemos que f es acotada en un entorno suficientemente pequeño de a y tomando $\gamma = 0 > -\alpha$, las hipótesis del Lema 8 se verifican, por lo tanto existe K constante tal que

$$\left({}_xI_b^\alpha \left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right] - {}_xI_b^\alpha \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'} \right) \right] + \frac{\partial L[y^*]}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y^*]} \right) (b-x)^{1-\alpha} = K$$

y obtenemos la ecuación deseada,

$${}_xI_b^\alpha \left[\frac{\partial L[y^*]}{\partial y^*} \right] - {}_xI_b^\alpha \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L[y^*]}{\partial (y^*)'} \right) \right] + \frac{\partial L[y^*]}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y^*]} = \frac{K}{(b-x)^{1-\alpha}}.$$

□

Teorema 23 ***Ecuación de Euler-Lagrange Fraccionaria con sólo derivadas de Caputo para problemas variacionales mixtos***
Sea y un optimizador de J en (2.17) perteneciente a ${}_a^\alpha E_b'$, con $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^3)$, sujeto a las condiciones de borde $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, entonces y satisface la siguiente ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria que intervienen sólo las derivadas fraccionarias de Caputo

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) + {}_x^C D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y]} \right] = 0 \ . \tag{2.23}$$

Demostración: Análoga a la demostración del Teorema 20 en la sección 2.2 del Capítulo 2.

□

Observación 35 *Como dijimos al principio de esta sección, pudimos encontrar dos condiciones necesarias de optimalidad: una ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria C-RL, que es la ecuación (2.18), y una ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria C-C, que es la ecuación (2.23). Podemos observar que en ambos casos se pueden obtener a la ecuación de Euler-Lagrange (2.2) del problema variacional clásico y las ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias C-RL (2.4) y C-C (2.13) como casos particulares de las ecuaciones obtenidas en esta sección, puesto que ambas son una combinación entre ellas.*

Observación 36 *A lo largo de esta tesis trabajaremos con ambas condiciones de optimalidad y en el Capítulo 5 vamos a realizar una comparación entre ambos métodos de resolución.*

2.4. Conclusiones del Capítulo

En este capítulo hemos estudiado diferentes tipos de problemas variacionales, tanto en su versión clásica (con derivadas de orden entero), como en su versión fraccionaria (con derivadas de orden real positivo).

El cálculo variacional fraccionario es un campo reciente, iniciado en 1997, donde los problemas variacionales clásicos son considerados, pero en presencia de derivadas o integrales fraccionarias. Para resolver estos problemas, es posible obtener condiciones necesarias llamadas ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange. A lo largo de este capítulo hemos mostrado dos tipos de estas ecuaciones, las ecuaciones C-RL que son ecuaciones de Euler-Lagrange donde intervienen derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y de Caputo, y las ecuaciones C-C donde sólo aparecen derivadas fraccionarias de Caputo.

En una de las secciones, se consideró que la derivada de orden más alto en el lagrangiano es de orden entero. La principal ventaja de esta formulación, con respecto al enfoque fraccionario puro adoptado en la literatura, es que, además de incluir los resultados de los problemas fraccionarios, también los resultados clásicos del cálculo variacional se pueden obtener ahora como casos particulares. Recordemos que la única posibilidad de obtener la derivada clásica y' de una derivada fraccionaria ${}_a^C D_x^\alpha[y]$, con $\alpha \in (0,1)$, es tomar el límite cuando α tiende a uno. Sin embargo, en algunos casos este límite no existe [45]. Para estos problemas variacionales, hemos demostrado la existencia de ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias C-RL y C-C [13]. También hemos observado que la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria C-C mejora los cálculos con respecto a la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria C-RL, debido a su similitud con la derivada de orden entero. En los capítulos que siguen comprobaremos esto, implementando estas técnicas para la resolución de un problema de control óptimo de manejo de la extracción de cierto recurso renovable.

Capítulo 3

Ecuaciones logísticas fraccionarias

En este capítulo vamos a presentar un análisis de una ecuación diferencial cúbica fraccionaria, que es una generalización de diferentes versiones de ecuaciones logísticas fraccionarias. El objetivo consiste en realizar una comparación entre los diferentes modelos logísticos utilizando dicha ecuación cúbica.

Comenzaremos el capítulo demostrando existencia y unicidad de solución del problema cúbico fraccionario, continuaremos con un análisis de estabilidad, y por último, mediante la implementación de algún método numérico para la resolución de la ecuación cúbica fraccionaria, realizaremos una comparación entre los diferentes modelos logísticos.

Los temas tratados en este capítulo son resultados nuestros que hemos publicado en [14] y pueden verse en [15].

3.1. Ecuación cúbica fraccionaria

Predecir el número de población es uno de los factores más importantes para una buena gestión de la misma. Esto ha sido tratado por varios métodos conocidos, uno de ellos es mediante el desarrollo de un modelo matemático que describe el crecimiento de la población. El modelo generalmente es una ecuación diferencial, o un sistema de ecuaciones diferenciales, acorde con la complejidad intrínseca de la población estudiada. Los modelos de crecimiento más utilizados actualmente son aquellos que tienen una solución sigmoidea de series de tiempo, incluida la ecuación logística de Verhulst [23]. La ecuación logística aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades epidémicas y difusión en redes sociales.

Por otro lado, motivado por sus aplicaciones en diferentes áreas, el cálculo fraccionario está

en desarrollo, lo que ha llevado a un gran crecimiento de su estudio en las últimas décadas. Siendo una extensión del cálculo tradicional, el cálculo fraccionario se ha empleado con éxito en el modelado de fenómenos y sistemas físicos. Contrariamente al caso entero, la derivada fraccionaria es un operador no local [25, 44], contiene parcial o totalmente la historia o futuro temporal o el comportamiento espacial de la función, promediadas de una cierta forma. Esto convierte a las ecuaciones diferenciales fraccionarias en candidatas idóneas para la modelización de fenómenos con memoria o efectos posteriores, aquellos en los que lo que ocurre en un punto en el espacio o en un instante de tiempo depende de un intervalo (espacial o temporal) que contiene al punto o al instante, [28].

Por esta razón, han surgido diferentes versiones fraccionarias de la ecuación logística [1, 26], entre las cuales se encuentran:

- **Ecuación logística fraccionaria:**

$$ {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \tag{3.1} $$

  donde $r > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseco y $K > 0$ la capacidad de carga del recurso.

- **Ecuación logística fraccionaria con cosecha:**

$$ {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - Ex(t), \tag{3.2} $$

  donde $E > 0$ es el esfuerzo realizado para extraer una proporción del recurso estudiado.

- **Ecuación logística fraccionaria con efecto Allee:**

$$ {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)(x(t) - m), \tag{3.3} $$

  donde $m > 0$ es el umbral del efecto Allee, esto es la densidad de población mínima para el crecimiento de la especie, debajo de esta cantidad la población muere (la tasa de crecimiento es positivo sólo en el rango $m < x < K$ y es negativo fuera del mismo).

- **Ecuación logística fraccionaria con efecto Allee con cosecha:**

$$ {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)(x(t) - m) - Ex(t). \tag{3.4} $$

Observación 37 *Con estas modelizaciones nos preguntamos, ¿Por qué se elige la derivada fraccionaria de Caputo y no la de Riemann-Liouville para representar el crecimiento fraccionario de la especie?¿Y por qué se considera por izquierda de 0 a t y no por derecha de t a T? El motivo por el cual se elige la derivada fraccionaria de Caputo y no la de Riemann-Liouville lo tratamos en la Observación 31. Con respecto a por qué se considera la derivada por izquierda y no por derecha surge de la Observación 24, como la evolución de cierto recurso depende del pasado del mismo, hemos decidido elegir para la modelización de la evolución de la especie la derivada fraccionaria de Caputo por izquierda. Ver [22].*

El objetivo de este capítulo es estudiar una ecuación cúbica fraccionaria, que como puede observarse es una generalización de estas diferentes versiones de ecuaciones logísticas fraccionarias (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4).
Consideremos entonces,

- **Ecuación cúbica fraccionaria:**

$$ {}_0^C D_t^\alpha [x] = ax^3(t) + bx^2(t) + cx(t), \tag{3.5} $$

  donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Observación 38 *En la ecuación (3.5) omitimos el término independiente debido a que no es necesario considerarlo para obtener una ecuación que generalice a las ecuaciones logísticas fraccionarias (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4).*

3.2. Existencia y unicidad de solución

Consideremos el siguiente problema de valor inicial

$$ \begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = ax^3(t) + bx^2(t) + cx(t), \\ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.6} $$

con $x_0 \in \mathbb{R}$, $t > 0$ y $0 < \alpha \leq 1$.

Definición 16 *Dado $I = [-T, T]$ con $T > 0$, una solución del problema (3.6) en I es cualquier función $x(t)$ tal que*

i) Existe ${}_0^C D_t^\alpha [x]\ \forall t \in I$.

ii) ${}_0^C D_t^\alpha [x] = ax^3(t) + bx^2(t) + cx(t)\ \forall t \in I$.

iii) $x(0) = x_0$.

Observación 39 *Podemos observar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(z) = az^3 + bz^2 + cz$, es una función continua sobre $\mathbb{R}$. Además, podemos reescribir el item ii) de la definición anterior como*

ii) ${}_0^C D_t^\alpha [x] = f(x(t))\ \forall t \in I$.

A continuación veremos una formulación integral de la solución vista en la Definición 16, que nos servirá para probar existencia y unicidad del problema (3.6). Su demostración puede verse en [25].

Lema 9 *Sea $I = [-T, T]$ con $T > 0$ y f definida como en la observación anterior. Bajo estas condiciones, una función x es una solución del problema (3.6) en I si y sólo si satisface la siguiente formulación integral*

1. *$x \in C(I)$.*
2. *$x(t) = x_0 + {}_0 I_t^\alpha [f(x)]\ \forall t \in I$.*

Definición 17 *Sea $I = [-T, T]$ con $T > 0$, sobre el espacio $C(I)$ definimos la norma Bielecki como*

$$\|x\|_N = \sup_{t \in I} \left| e^{-Nt} x(t) \right|,$$

con $N > 0$, ver [40].

Observación 40 *El espacio métrico $(C(I), d)$, donde d es la métrica inducida por la norma $\|.\|_N$, resulta completo.*

Teorema 24 *Consideremos el problema (3.6), la función f como en la Observación 39 y $H = [-h, h]$, con $h > 0$ y $x_0 \in \mathring{H}$ su interior. Entonces para cada x_0 existe $\delta > 0$ tal que si denotamos con $I_\delta = [-\delta, \delta]$, existe única solución en I_δ del problema (3.6) de modo tal que $x(t) \in H\ \forall t \in I_\delta$.*

Demostración: Sabemos que por Observación 39, $f \in C(\mathbb{R})$, en particular resulta $f \in C(H)$. Luego, como H es compacto, existe $M = \max_{s \in H} |f(s)|$.

Fijamos δ tal que

$$0 < \delta < min \left\{ T, \left(\frac{(h - |x_0|)\Gamma(\alpha + 1)}{M} \right)^{1/\alpha} \right\},$$

y consideramos el espacio $X = \{x \in C(I_\delta) : x(t) \in H, \, \forall t \in I_\delta\}$. Como X es cerrado contenido en el espacio normado $(C(I), \|.\|_N)$, completo por Observación 40, resulta (X, d) espacio métrico completo con d inducida por la norma.

Por Lema 9, una función x es solución del problema (3.6) en I_δ si y sólo si x verifica la formulación integral en I_δ.

Notemos que si una función x verifica 1) y 2) de la formulación integral en I_δ, entonces $x(t) \in (-h, h) \subset H \, \forall t \in I_\delta$. En efecto, supongamos que esto no pasa, es decir existe $\tilde{t} \in I_\delta$ tal que $|x(\tilde{t})| \geq h$. Como $|x(0)| = |x_0| < h$, por continuidad de la función $|x|$ existiría $j \in I_\delta$, con $j \neq 0$ tal que $|x(j)| = h$. Sea $\hat{t} \in I_\delta$, con $\hat{t} \neq 0$, el primer valor tal que $|x(\hat{t})| = h$, luego $|x(t)| < h \, \forall t \in (0, \hat{t})$. Por 2) tendríamos que

$$\begin{aligned} h &= |x(\hat{t})| = \left| x_0 + \int_0^{\hat{t}} \frac{(\hat{t}-s)}{\Gamma(\alpha)}^{\alpha-1} f(x(s)) ds \right| \\ &\leq |x_0| + \int_0^{\hat{t}} \left| \frac{(\hat{t}-s)}{\Gamma(\alpha)}^{\alpha-1} \right| |f(x(s))| \, ds \\ &\leq |x_0| + M \frac{\hat{t}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq |x_0| + M \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < h, \end{aligned}$$

por la elección de δ. Es decir que $h < h$, lo cuál es absurdo. Esto surge de suponer que existe $\tilde{t}$ tal que $|x(\tilde{t})| \geq h$. Por lo tanto $|x(t)| < h \, \forall t \in I_\delta$ y resulta $x(t) \in (-h, h) \subset H \, \forall t \in I_\delta$.

Ahora, es claro que una función x es solución del problema (3.6) en I_δ si y sólo si $x \in X$ y satisface 2) de la formulación integral.

Definimos entonces a $G : X \to X$ como el operador tal que

$$G(x(t)) = x_0 + {}_0I_t^\alpha \left[f(x) \right] = x_0 + {}_0I_t^\alpha \left[ax^3 + bx^2 + cx \right].$$

G está bien definido pues $G(x) \in C(I_\delta)$ trivialmente y además $G(x) \in H$, $\forall t \in I_\delta$.

Esta última afirmación es cierta puesto que

$$|G(x)(t)| \leq |x_0| + \int_0^t \left| \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x(s)) \right| ds = |x_0| + M \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq |x_0| + M \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < h.$$

Ahora, es claro que x es solución única del problema (3.6) en I_δ si y sólo si x es el único punto fijo de G. Para ver esto, vamos a utilizar el Teorema del Punto Fijo de Banach sobre el espacio métrico completo (X,d), demostrando que G es un operador contractivo.

$$|e^{-Nt}(G(x)(t) - G(y)(t))| = \left| e^{-Nt}\, {}_0I_t^\alpha \left[a(x^3 - y^3) + b(x^2 - y^2) + c(x - y) \right] \right|$$

Esto resulta igual a

$$\left| \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-Nt} \left[a(x^3(s) - y^3(s)) + b(x^2(s) - y^2(s)) + c(x(s) - y(s)) \right] ds \right|$$

$$= \left| \int_0^t \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-Nt+Ns-Ns} \left[a(x^3(s) - y^3(s)) + b(x^2(s) - y^2(s)) \right. \right.$$
$$\left. \left. + c(x(s) - y(s)) \right] ds \right|$$

$$\leq \int_0^t \left| \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} \left[e^{-Ns}(x(s) - y(s)) \right] \left[a(x^2(s) + x(s)y(s) + y^2(s)) \right. \right.$$
$$\left. \left. + b(x(s) + y(s)) + c \right] \right| ds$$

$$\leq \|x - y\|_N \int_0^t \left| \tfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-N(t-s)} \left[a(x^2(s) + x(s)y(s) + y^2(s)) \right. \right.$$
$$\left. \left. + b(x(s) + y(s)) + c \right] \right| ds,$$

mediante el cambio de variable $u = t - s$, es igual a

$$\|x - y\|_N \int_0^t \left| \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-Nu} \left[a(x^2(t-u) + x(t-u)y(t-u) \right. \right.$$

$$\left. \left. + y^2(t-u)) + b(x(t-u) + y(t-u)) + c \right] \right| du.$$

Resultando,

$$\left|e^{-Nt}(G(x)-G(y))(t)\right| \leq \|x-y\|_N \left(3\,|a|\,h^2+2\,|b|\,h+|c|\right) N^{-\alpha} \int_0^t \underbrace{N^\alpha \frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-Nu}}_{\geq 0}\, du.$$

Por Definición 1 de la función Gamma, obtenemos

$$\left|e^{-Nt}(G(x)-G(y))(t)\right| \leq \|x-y\|_N \frac{3\,|a|\,h^2+2\,|b|\,h+|c|}{N^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)},$$

luego

$$\left|e^{-Nt}(G(x)-G(y))(t)\right| \leq \|x-y\|_N \frac{3\,|a|\,h^2+2\,|b|\,h+|c|}{N^\alpha}.$$

Considerando N de manera tal que $N^\alpha > 3\,|a|\,h^2+2\,|b|\,h+|c|$, entonces $\|G(x)-G(y)\|_N < \|x-y\|_N$, y así el operador G resulta contractivo y el problema posee única solución. □

Observación 41 *El Teorema 24 garantiza la existencia y unicidad de solución del problema (3.6) en un intervalo I_δ para cierto $\delta > 0$, sin embargo este dominio de existencia de solución puede prolongarse a todo I, ver [40].*

3.2.1. Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones logísticas fraccionarias

A continuación analizaremos como caso particular qué sucede con la existencia y unicidad de solución de los problemas cuando la ecuación cúbica es alguna de las ecuaciones logísticas fraccionarias presentadas. Aquí consideraremos $t \in I = [0,T]$ con $T > 0$.

- **Ecuación logística fraccionaria:**

$$\,{}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right). \tag{3.7}$$

Esta es la ecuación cúbica fraccionaria (3.5) para $a=0$, $b=-\frac{r}{K}$ y $c=r$.

Luego $N^\alpha > 2\frac{r}{K}h + r = r\left(\frac{2h}{K}+1\right)$. Este resultado es análogo a lo obtenido en [26].

- **Ecuación logística fraccionaria con cosecha:**

$$\,{}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right) - Ex(t). \tag{3.8}$$

Esta es la ecuación cúbica fraccionaria (3.5) para $a = 0$, $b = -\frac{r}{K}$ y $c = r - E$.

Luego $N^\alpha > 2\frac{r}{K}h + |r - E|$.

- **Ecuación logística fraccionaria con efecto Allee:**

$$ {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)(x(t) - m). \tag{3.9} $$

Esta es la ecuación cúbica fraccionaria (3.5) para $a = -\frac{r}{K}$, $b = \left(\frac{m}{K} + 1\right) r$ y $c = -rm$.

Luego $N^\alpha > 3\frac{r}{K}h^2 + 2\left(\frac{m}{K} + 1\right) rh + rm = r\left(m + \left(\frac{m}{K} + 1\right) 2h + 3\frac{h^2}{K}\right)$.

- **Ecuación logística fraccionaria con efecto Allee con cosecha:**

$$ {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)(x(t) - m) - Ex(t). \tag{3.10} $$

Esta es la ecuación cúbica fraccionaria (3.5) para $a = -\frac{r}{K}$, $b = \left(\frac{m}{K} + 1\right) r$ y $c = -rm - E$.

Luego $N^\alpha > 3\frac{r}{K}h^2 + 2\left(\frac{m}{K} + 1\right) rh + rm + E = r\left(m + \left(\frac{m}{K} + 1\right) 2h + 3\frac{h^2}{K}\right) + E$.

3.3. Análisis de estabilidad de la ecuación cúbica fraccionaria

Cuando se trabaja con ecuaciones diferenciales que modelan crecimiento poblacional siempre es importante realizar un análisis de estabilidad de las soluciones de las mismas para ver el comportamiento de las especies a largo plazo.

3.3.1. Caso general

Consideremos un problema de valor inicial fraccionario arbitrario,

$$ \begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.11} $$

con $t > 0$ y $0 < \alpha \leq 1$.

Para hallar los puntos de equilibrio x_{eq} de dicha ecuación establecemos la condición ${}_0^C D_t^\alpha [x] = 0$, es decir,

$$ f(x_{eq}) = 0. \tag{3.12} $$

Para estudiar la estabilidad de cada punto, buscamos las matrices jacobianas A_{eq} de f evaluadas en cada punto de equilibrio,

$$A_{eq} = \left[f'(x(t))|_{x_{eq}} \right].$$

Luego, calculamos los autovalores λ_{eq} de A_{eq} para cada punto de equilibrio.
Por último, sacamos conclusiones siguiendo el siguiente Teorema cuya demostración puede verse en [3, 25].

Teorema 25 *Sean λ_{eq} los autovalores de A_{eq}, matriz jacobiana de f asociada al punto de equilibrio x_{eq}. Luego*

- *si $arg(\lambda_{eq}) < \frac{\alpha\pi}{2}$ para algún λ_{eq}, entonces el punto de equilibrio x_{eq} es localmente inestable (I),*
- *si $arg(\lambda_{eq}) \geq \frac{\alpha\pi}{2}$ para todo λ_{eq}, entonces el punto de equilibrio x_{eq} es localmente estable (E), siendo localmente asintóticamente estable (AE) si $arg(\lambda_{eq}) > \frac{\alpha\pi}{2}$ para todo λ_{eq}.*

Ahora examinaremos los puntos de equilibrio de la ecuación cúbica fraccionaria.

3.3.2. Caso ecuación cúbica fraccionaria

Los resultados de esta sección fueron publicados en [14].
Consideremos $0 < \alpha \leq 1$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$ para el siguiente problema

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha [x] = f(x(t)) = ax^3(t) + bx^2(t) + cx(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Para hallar los puntos de equilibrio de la ecuación en (3.13), primero establecemos la condición ${}_0^C D_t^\alpha [x] = 0$, es decir

$$ax^3(t) + bx^2(t) + cx(t) = 0.$$

$\diamond$ Si $a \neq 0$, obtenemos los siguientes tres puntos de equilibrio

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Analizando el signo de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_i),\ i = 1, 2, 3$, podemos obtener la estabilidad de estos puntos.

- Punto de equilibrio $x_1 = 0$: como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1) = c$, podemos concluir
  - Si $c > 0$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_1)) = 0 \leq \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_1 es (I).
  - Si $c < 0$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_1)) = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_1 es (AE).
  - Si $c = 0$, no hay conclusión puesto que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1) = 0$.
- Punto de equilibrio $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$: como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_2) = \dfrac{b^2 - b\sqrt{b^2-4ac} - 4ac}{2a}$, podemos concluir
  - Si $a > 0$ y $b < \sqrt{b^2-4ac}$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_2)) = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_2 es (I).
  - Si $a < 0$ y $b > \sqrt{b^2-4ac}$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_2)) = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_2 es (I).
  - Si $a > 0$ y $b > \sqrt{b^2-4ac}$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_2)) = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_2 es (AE).
  - Si $a < 0$ y $b < \sqrt{b^2-4ac}$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_2)) = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_2 es (AE).
  - Si $b = \sqrt{b^2-4ac}$ o $b^2 - 4ac < 0$, entonces $x_2 = x_1 = 0$, ya fue analizado.
  - Si $b^2 - 4ac = 0$, no hay conclusión puesto que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_2) = 0$.
- Punto de equilibrio $x_3 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$: como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_3) = \dfrac{b^2 + b\sqrt{b^2-4ac} - 4ac}{2a}$, podemos concluir
  - Si $a > 0$ y $b < -\sqrt{b^2-4ac}$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_3)) = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_3 es (AE).
  - Si $a < 0$ y $b > -\sqrt{b^2-4ac}$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_3)) = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_3 es (AE).
  - Si $a > 0$ y $b > -\sqrt{b^2-4ac}$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_3)) = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_3 es (I).
  - Si $a < 0$ y $b < -\sqrt{b^2-4ac}$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_3)) = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_3 es (I).
  - Si $b = -\sqrt{b^2-4ac}$ o $b^2 - 4ac < 0$, entonces $x_3 = x_1 = 0$, ya fue analizado.
  - Si $b^2 - 4ac = 0$, no hay conclusión puesto que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_3) = 0$.

$\diamond$ Si $a = 0$, los puntos de equilibrio son

$$x_1 = 0 \ \text{ y } \ x_2 = -\frac{c}{b},$$

suponiendo que $b \neq 0$ y $c \neq 0$ puesto que de no ser así sería $x_1 = 0$ el único punto de equilibrio.
Analizando el signo de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_i),\ i = 1, 2$, podemos obtener la estabilidad de los puntos.

- Punto de equilibrio $x_1 = 0$: Análogo al caso anterior.
- Punto de equilibrio $x_2 = -\frac{c}{b}$: como $\frac{\partial f}{\partial x}(x_2) = -c$, podemos concluir
  - Si $c > 0$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_2)) = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_2 es (AE).
  - Si $c < 0$, resulta $arg(\frac{\partial f}{\partial x}(x_2)) = 0 \leq \frac{\alpha\pi}{2}$ entonces x_2 es (I).

Todo lo desarrollado anteriormente se resume en la siguiente Tabla 3.1.

$a \neq 0$	$x_1 = 0$	$c > 0$		x_1 es (I)
		$c < 0$		x_1 es (AE)
	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$a > 0$	$b < \sqrt{b^2-4ac}$	x_2 es (I)
			$b > \sqrt{b^2-4ac}$	x_2 es (AE)
		$a < 0$	$b < \sqrt{b^2-4ac}$	x_2 es (AE)
			$b > \sqrt{b^2-4ac}$	x_2 es (I)
	$x_3 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$a > 0$	$b < -\sqrt{b^2-4ac}$	x_3 es (AE)
			$b > -\sqrt{b^2-4ac}$	x_3 es (I)
		$a < 0$	$b < -\sqrt{b^2-4ac}$	x_3 es (I)
			$b > -\sqrt{b^2-4ac}$	x_3 es (AE)
$a = 0$	$x_1 = 0$	$c > 0$		x_1 es (I)
		$c < 0$		x_1 es (AE)
	$x_2 = -\frac{c}{b}$	$c > 0$		x_2 es (AE)
		$c < 0$		x_2 es (I)

Tabla 3.1: Puntos de equilibrio

3.3.3. Análisis de estabilidad aplicado a las ecuaciones logísticas fraccionarias

Ahora veremos qué sucede con las ecuaciones logísticas fraccionarias (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4), como caso particular de lo trabajado para la ecuación cúbica.

- **Ecuación logística fraccionaria:** Como mencionamos antes, esta es la ecuación (3.5) para $a = 0$, $b = -\frac{r}{K}$ y $c = r$. Luego, $a = 0$, $b < 0$ y $c > 0$, entonces los puntos de equilibrio son $x_1 = 0$ que es (I) y $x_2 = K$ que es (AE). Este resultado coincide con el analizado en [26].

- **Ecuación logística fraccionaria con cosecha:** Esta es la ecuación (3.5) para $a = 0$, $b = -\frac{r}{K}$ y $c = r - E$. Suponiendo que la tasa de crecimiento intrínseco es mayor al coeficiente de cosecha ($r > E$), $a = 0$, $b < 0$ y $c > 0$, entonces los puntos de equilibrio son $x_1 = 0$ que es (I) y $x_2 = K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$ que es (AE). En el caso en que la tasa de crecimiento intrínseco sea menor al coeficiente de cosecha ($r < E$), $a = 0$, $b < 0$ y $c < 0$, resulta $x_1 = 0$ (AE) y $x_2 = K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$ (I).

- **Ecuación logística fraccionaria con efecto Allee:** Esta es la ecuación (3.5) para $a = -\frac{r}{K}$, $b = \left(\frac{m}{K} + 1\right) r$ y $c = -rm$. Luego $a < 0$, $b > 0$ y $c < 0$, entonces los puntos de equilibrio son $x_1 = 0$ que es (AE), $x_2 = m$ que es (I), debido a que $b > \sqrt{b^2 - 4ac}$, y $x_3 = K$ que es (AE), debido a que $b > -\sqrt{b^2 - 4ac}$. Este resultado coincide con el analizado en [1].

- **Ecuación logística fraccionaria con efecto Allee con cosecha:** Esta es la ecuación (3.5) para $a = -\frac{r}{K}$, $b = \left(\frac{m}{K} + 1\right) r$ y $c = -rm - E$. Luego $a < 0$, $b > 0$ y $c < 0$. Podemos clasificar los puntos de equilibrio de acuerdo al valor del coeficiente de cosecha E. Si $E < \frac{r}{4K}(K - m)^2$ entonces estos son $x_1 = 0$ que es (AE), $x_2 = \frac{1}{2}\left(m + K + \sqrt{(K - m)^2 - 4\frac{KE}{r}}\right)$ que es (I), debido a que $b > \sqrt{b^2 - 4ac}$, y $x_3 = \frac{1}{2}\left(m + K - \sqrt{(K - m)^2 - 4\frac{KE}{r}}\right)$ que es (AE), debido a que $b > -\sqrt{b^2 - 4ac}$, mientras que si $E \geq \frac{r}{4K}(K - m)^2$ el único punto crítico es $x_1 = 0$ que es (AE), llevando a la extinción de las especies.

Para ver bien qué representan estos valores, y hacer una comparación entre estas distintas ecuaciones, a continuación vamos a realizar diferentes ejemplos variando los parámetros de las mismas.

3.4. Ejemplos

Como las ecuaciones fraccionarias (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4) son muy difíciles de resolver, tuvimos que recurrir a un método numérico para realizar una comparación de las mismas. El método numérico utilizado es el método de Adams fraccionario visto en la Definición 14, que se puede encontrar también en [9, 36].
Los códigos los realizamos en lenguaje Python, se pueden ver en el Anexo en Código 1, Código 2 y Código 3. Podemos observar que el código realizado para la ecuación cúbica fraccionaria incluye los códigos hechos para cada ecuación logística fraccionaria en

particular, es decir, el programa para la ecuación cúbica fraccionaria simplifica el trabajo puesto que alcanza con utilizar un sólo código.
A continuación realizaremos diferentes gráficas de las poblaciones $x(t)$ para las distintas ecuaciones logísticas fraccionarias, teniendo en cuenta la variación de los parámetros r, K, m, E, x_0, α y T.

- En las siguientes gráficas, consideramos la ecuación logística fraccionaria con cosecha

$$ {}_0^C D_t^{0,5}\,[x] = 0{,}5\,x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{10}\right) - E\,x(t), $$

  donde $r = 0{,}5$ es la misma tasa que en [26] pero consideramos una capacidad de carga de $K = 10$ y $\alpha = 0{,}5$. Cada gráfica representa la solución aproximada de la ecuación fraccionaria para un coeficiente de cosecha E fijo, donde los valores iniciales $x(0) = x_0$ van variando. El tiempo final elegido es $T = 500$ puesto que en general las soluciones de la ecuación logística fraccionaria toman mucho tiempo en alcanzar su estado de equilibrio.

  Podemos notar en la Figura 3.1 que si la cosecha de las especies es cero, las soluciones se estabilizan en $K = 10$, análogamente al comportamiento visto en [26] en donde las soluciones también se estabilizan en la capacidad de carga. A medida que la cosecha se incrementa, existen estabilidades en puntos intermedios hasta que la especie se extingue cuando hay una sobre-explotación como en la última gráfica. Esto es similar al caso entero, la única diferencia es en el modo en que estas soluciones alcanzan el equilibrio.

- En las siguientes gráficas, consideramos la ecuación logística fraccionaria con cosecha

$$ {}_0^C D_t^{\alpha}\,[x] = 0{,}5\,x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{10}\right) - 0{,}2\,x(t), $$

  donde nuevamente $r = 0{,}5$, $K = 10$ y $E = 0{,}2$. En este caso, cada gráfica representa las soluciones aproximadas de la ecuación fraccionaria para un valor inicial $x(0) = x_0$ fijo, donde los valores de α varían. Nuevamente, el tiempo final elegido es $T = 500$.

  Podemos notar en la Figura 3.2 que para diferentes valores de α se alcanza el mismo equilibrio, pero de manera diferente. Las formas de cada solución $x(t)$ son diferentes y los tiempos en los que cada una alcanza el valor de equilibrio también lo son, es decir cuando el valor de α decrece, las soluciones tardan más en alcanzar al equilibrio porque crecen más lentamente.

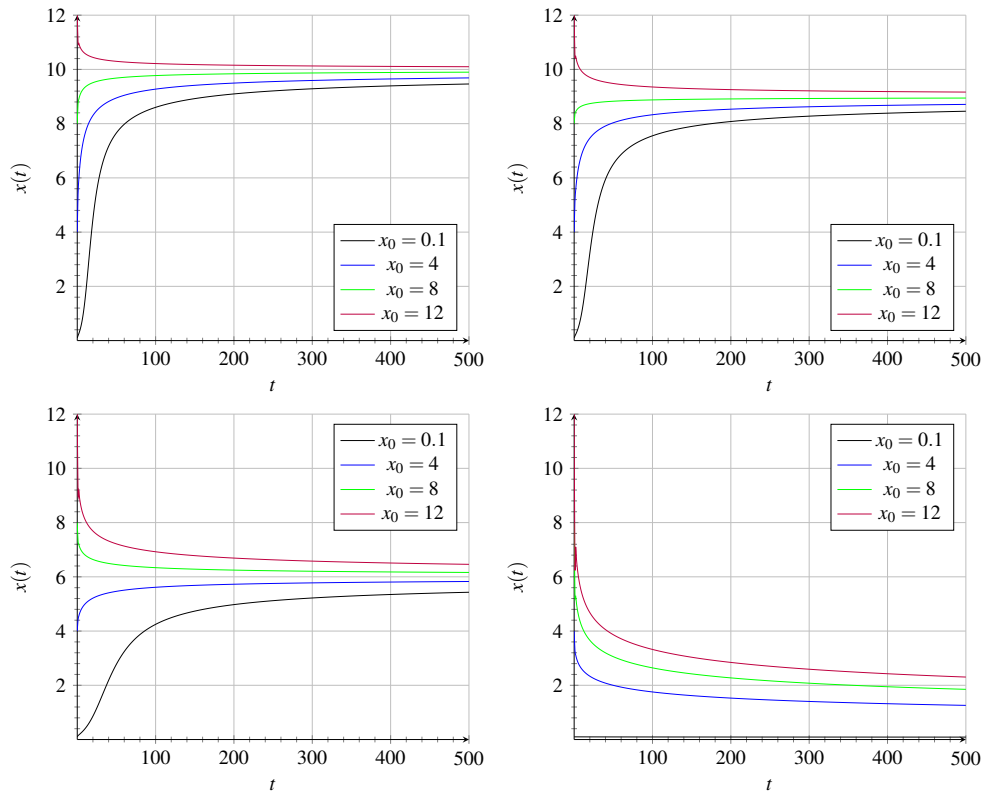


Figura 3.1: Soluciones de las ecuaciones logísticas fraccionarias con cosecha para $E = 0$, E =0.05, E =0.2 y E =0.5.

- En las siguientes gráficas, consideramos la ecuación logística fraccionaria con efecto Allee con cosecha

$$ {}_0^C D_t^{0,5}\,[x] = 0{,}5\,x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{10}\right)(x(t) - 1) - Ex(t), $$

donde $r = 0{,}5$, $K = 10$, $m = 1$, son los mismos parámetros que en [1] y $\alpha = 0{,}5$. En este caso, cada gráfica representa la solución aproximada de la ecuación fraccionaria para un coeficiente de cosecha E fijo, donde los valores iniciales $x(0) = x_0$ varían. El tiempo final es $T = 25$, debido a que las soluciones de las ecuaciones con efecto Allee alcanzan el equilibrio más rápidamente que en el caso anterior donde no se tenía este efecto. Podemos notar en la Figura 3.3 que si la cosecha es cero, las soluciones se estabilizan en la capacidad de carga $K = 10$, salvo la solución con $x_0 = 0{,}1$ que en este caso se estabiliza en cero, análogamente a [1]. A medida que la cosecha incrementa, existen estabilidades en puntos intermedios hasta que la especie se extingue en todos los casos cuando el valor de la cosecha $E = 1{,}5 > 1{,}025 =$

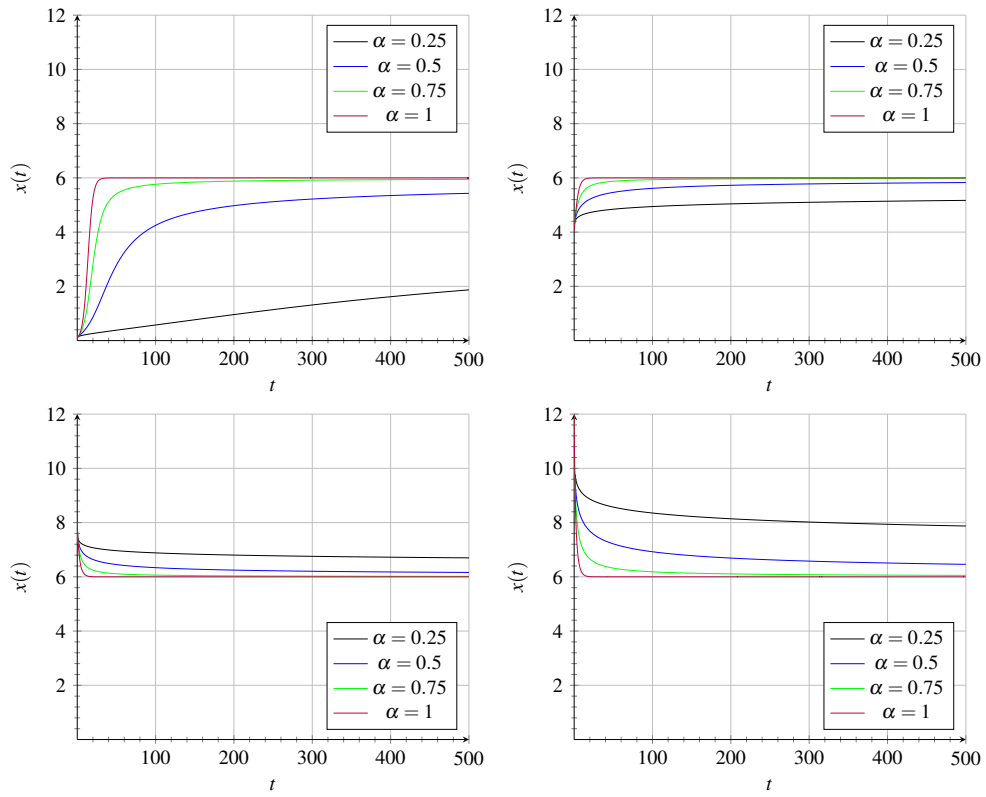


Figura 3.2: Soluciones de las ecuaciones logísticas fraccionarias con cosecha para x_0 =0.1, x_0 =4, x_0 =8 y x_0 =12.

$\frac{r}{4K}(K-m)^2$ en la última gráfica. Esto es similar al caso entero, la diferencia está en el modo en que las soluciones alcanzan estos equilibrios, que es más lento cuando el valor de α decrece.

Por otro lado, si comparamos con la Figura 3.1 encontramos más cosas a destacar. En el caso $E = 0$ y $E = 0{,}5$ son similares salvo que estas últimas soluciones alcanzan más rápidamente el equilibrio, en $T = 25$ ya se puede observar como van tendiendo al equilibrio, a diferencia del caso anterior donde necesitábamos $T = 500$, y para $x_0 = 0{,}1$ las soluciones de la ecuación con efecto Allee se extinguen mientras que las de la ecuación logística no. Para $E = 1$ ya podemos ver que también se extingue la solución de la ecuación con efecto Allee para $x_0 = 4$. Ya para $E = 1{,}5$ ambos casos coinciden en cuanto a que todas las poblaciones se extinguen.

- En las siguientes gráficas, consideramos la misma ecuación logística fraccionaria con

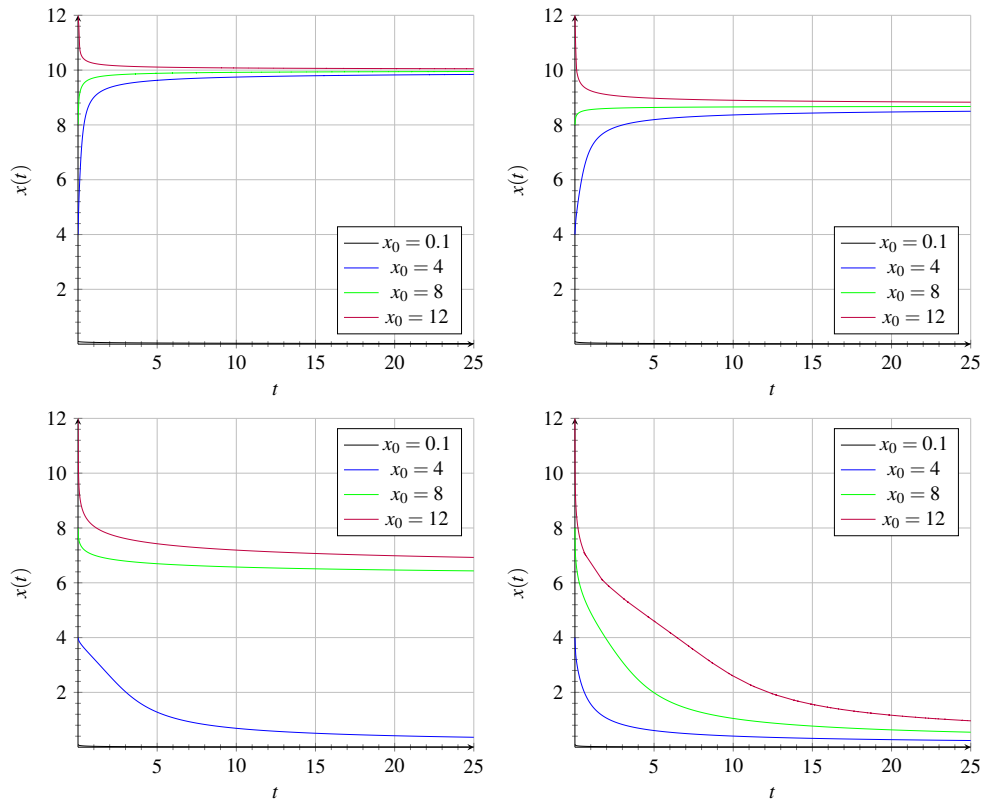


Figura 3.3: Soluciones de las ecuaciones logísticas fraccionarias con efecto Allee con cosecha para $E = 0$, E =0.5, $E = 1$ y E =1.5.

efecto Allee con cosecha

$$ {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0{,}5\, x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{10}\right) (x(t) - 1) - 0{,}2\, x(t), $$

donde nuevamente $r = 0{,}5$, $K = 10$, $m = 1$ y $E = 0{,}2$. En este caso, cada gráfica representa la solución aproximada para un valor inicial $x(0) = x_0$ fijo, donde el valor de α varía. Nuevamente el tiempo final elegido es $T = 25$.

Podemos notar en la Figura 3.4 que para diferentes valores de α se alcanzan los mismos equilibrios, que varían dependiendo la condición inicial. Para $x_0 = 0{,}1$ vemos la extinción de las especies en todos los casos. Para las otras condiciones iniciales, se alcanza un estado intermedio entre la capacidad de carga y la extinción. A medida que los valores de α decrecen, las soluciones crecen más lentamente al equilibrio.

Por otro lado, si comparamos con la Figura 3.2 encontramos más cosas a destacar. Para $x_0 = 0{,}1$ estas soluciones se extinguen mientras que las soluciones de las

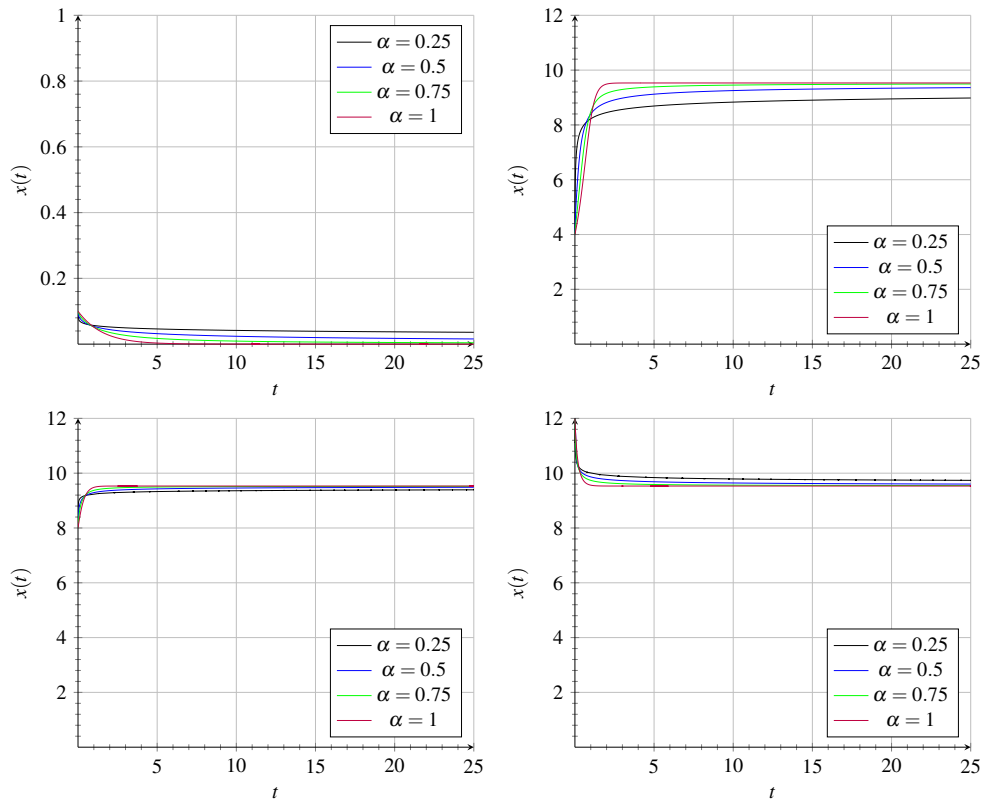


Figura 3.4: Soluciones de las ecuaciones logísticas fraccionarias con efecto Allee con cosecha para x_0 =0.1, $x_0 = 4$, $x_0 = 8$ y $x_0 = 12$.

logísticas, sin efecto Allee, no. En cuanto a las otras condiciones iniciales, podemos ver que en ambos casos las soluciones convergen al equilibrio, observando que son equilibrios diferentes siendo los de las soluciones de las ecuaciones con efecto Allee más grandes que los de las soluciones de las logísticas sin efecto Allee, pero además, como ya mencionamos antes, éstas lo hacen más rápidamente, en $T = 25$ ya se puede apreciar.

3.5. Conclusiones del Capítulo

En este capítulo presentamos un análisis de una ecuación diferencial cúbica fraccionaria, que es una generalización de diferentes versiones de ecuaciones logísticas fraccionarias con o sin efecto Allee y con o sin cosecha.

Comenzamos el capítulo demostrando existencia y unicidad de solución del problema cúbico fraccionario, continuamos con un análisis de estabilidad sensible a la variación de los diferentes parámetros, y por último, mediante la implementación del método numérico

de Adams fraccionario pudimos realizar una comparación entre los diferentes modelos logísticos fraccionarios.

Pudimos notar que los resultados obtenidos para la ecuación cúbica fraccionaria realmente generalizan los resultados de las ecuaciones logísticas fraccionarias, en cuanto a que se podían obtener como casos particulares reemplazando los valores de los parámetros.

En cuanto a la comparación entre los diferentes tipos de logísticas fraccionarias podemos analizar dos aspectos. Por un lado la diferencia entre con o sin cosecha, es claro que la relación entre el coeficiente de cosecha y la tasa de crecimiento determina si la población se extingue o no, en cualquiera de los casos. Por otro lado la diferencia entre con o sin efecto Allee es más compleja. Puesto que en el caso sin efecto Allee el único punto crítico es la capacidad de carga, incluso en aquellos problemas donde el valor inicial es pequeño; y el caso con efecto Allee es un poco más realista y agrega, además del equilibrio en la capacidad de carga, un equilibrio más en la extinción de las especies cuando el valor inicial de las mismas es bajo. Es decir, el modelo fraccionario con efecto Allee tiene en cuenta esa cantidad mínima necesaria para que una población comience a reproducirse y a crecer, en contraste al caso sin efecto que no considera esta cantidad. Sin embargo, no hay que perder de vista que si bien la ecuación fraccionaria con efecto Allee parece modelar mejor la situación del crecimiento poblacional, no deja de ser una ecuación cúbica compleja de tratar, a diferencia de la ecuación logística fraccionaria que es cuadrática, facilitando muchísimo los cálculos y siendo también una muy buena representación de la realidad.

En resumen, todas las ecuaciones logísticas fraccionarias presentadas modelan el crecimiento poblacional, comportándose de maneras similares. Poseen pequeñas diferencias, haciendo que la ecuación con efecto Allee sea más realista pero más compleja de trabajar con respecto a los cálculos que la ecuación logística fraccionaria sin efecto Allee que es menos realista pero es más sencilla de trabajar.

Capítulo 4

Problema del manejo de cosecha de un recurso

En este capítulo vamos a estudiar un problema de control fraccionario que modeliza la maximización de la ganancia obtenida mediante la explotación de cierto recurso natural cuya dinámica está gobernada por una ecuación logística fraccionaria.

Debido a la singularidad del problema, vamos a desarrollar diferentes técnicas de resolución, tanto para el caso clásico como para el caso fraccionario.

En la última sección implementaremos simulaciones numéricas para realizar una comparación entre ambos casos.

Los temas tratados en este capítulo son resultados nuestros que pueden verse en [16].

4.1. Un problema de control optimal simple

Cuando la ecuación logística es usada para describir la evolución natural de cierta especie, es lógico pensar en la explotación de este recurso renovable. Por este motivo, decidimos hacer un estudio de la maximización de la ganancia obtenida mediante la explotación de dicho recurso natural.

A continuación veremos un problema de control óptimo clásico simple que modelizará el problema propuesto. Decimos que es un problema clásico puesto que en la ecuación que describe la dinámica aparece la derivada entera de primer orden.

Para más información respecto del modelo propuesto referirse a [23].

Consideremos el siguiente problema de control óptimo clásico:

$$\begin{cases} \text{máx} \int_0^T e^{-\delta t} h(x(t))\, dt \\ \dot{x}(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h(x(t)) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \\ h_{min} \leq h(x(t)) \leq h_{max}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Aquí T representa el tiempo final, x_0 la condición inicial, x_T la condición final, h_{min} y h_{max} la cosecha máxima y mínima preestablecidas, y $e^{-\delta t}$ representa un factor de descuento, siendo $\delta \geq 0$, la tasa anual de descuento instantáneo, que puede valer cero.
En este problema aparece la siguiente ecuación dinámica

$$\dot{x}(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h(x(t)), \tag{4.2}$$

que es el crecimiento logístico del recurso. Aquí $r > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseco, $K > 0$ es la capacidad de carga y $h(x(t))$ es la función de cosecha. En el Capítulo 3 hemos estudiado esto, en la ecuación (3.2), pero para el caso $h(x(t)) = E \cdot x(t)$.

Observación 42 *En primer lugar observemos que para modelar el crecimiento poblacional estamos utilizando la ecuación logística fraccionaria sin efecto Allee con cosecha similar a (3.2), vista en el capítulo anterior. El motivo de nuestra elección es debido a que si bien la ecuación logística fraccionaria con efecto Allee modela mejor la realidad, el comportamiento en los casos en los que no se extingue la especie, que es la que nos interesa, es similar al de la ecuación logística fraccionaria sin efecto Allee, y esta última es muchísimo más sencilla de trabajar en cuanto a los cálculos.*
También cabe destacar la elección de la función a optimizar. En general, esta función está dada por la siguiente

$$\int_0^T e^{-\delta t}\left(p - \frac{c}{x}\right) h(x(t))\, dt,$$

donde p es un precio fijo estipulado y $\frac{c}{x}$ es el costo de la extracción del recurso, [23]. En esta tesis, realizaremos un modelo simplificado puesto que la resolución de este tipo de problemas posee una alta complejidad en su versión fraccionaria.

A continuación, vamos a resolver el problema (4.1).

Despejando $h(x(t))$ de la ecuación dinámica (4.2) y reemplazando en el funcional a maximizar, resulta

$$\begin{cases} \text{máx} \int_0^T e^{-\delta t} \left[rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \dot{x}(t) \right] dt \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \\ h_{min} \leq h(x(t)) \leq h_{max}, \end{cases}$$

es decir que ahora es un problema variacional cuyo lagrangiano es

$$L(t, x, \dot{x}) = e^{-\delta t} \left[rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \dot{x}(t) \right].$$

Luego, su ecuación de Euler-Lagrange (2.2) resulta

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0,$$

de donde se obtiene

$$r\left(1 - \tfrac{2}{K}x(t)\right) - \delta = 0.$$

Resolviendo, la población óptima resulta la constante

$$x^*(t) = \frac{K}{2}\left(1 - \frac{\delta}{r}\right), \tag{4.3}$$

mientras que la cosecha óptima es

$$h^*(t) = rx^*(t)\left(1 - \frac{x^*(t)}{K}\right), \tag{4.4}$$

es decir,

$$h^*(t) = \frac{K}{4}\frac{r^2 - \delta^2}{r}. \tag{4.5}$$

Observación 43 *Podemos observar que siendo la solución $x^*(t)$ en (4.3) una función constante, no verifica las condiciones de borde impuestas. Por esta razón, decimos que el problema es singular.*
Para su resolución, debemos recurrir al Teorema del Camino más Cercano cuya demostración puede verse en [46].

Teorema 26 ***Teorema del Camino más Cercano***

Consideremos el siguiente problema de control óptimo con un sólo estado y una sola variable de control

$$\begin{cases} \max\limits_{u} \int\limits_{0}^{T} e^{-\delta t} F(x,u)\, dt \\ \dot{x}(t) = f(x,u) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \\ u \in [0, Q] \subset \mathbb{R}, \end{cases}$$

definimos el Camino más Cercano Factible $x^*(t)$ a un estado estable factible dado $(\overline{x}, \overline{u})$ como el camino factible a partir de x_0 de manera que

$$|x^*(t) - \overline{x}(t)| \leq |x(t) - \overline{x}(t)| \ \ \forall t > 0,$$

para todo camino factible $x(t)$ a partir de x_0. Más aún, definimos el segmento de aproximación más cercano $\hat{x}^*(t)$, $t \in [0, t_{min}]$, como el segmento factible a partir de x_0 de manera que

$$|\hat{x}^*(t) - \overline{x}(t)| \leq |x(t) - \overline{x}(t)| \ \ \forall t \in [0, t_{min}],$$

para todo segmento factible $x(t)$ a partir de x_0 y donde t_{min} es definido como el primer momento en que $\hat{x}^*(t)$ alcanza $\overline{x}(t)$. Si $\overline{x}$ fuera el equilibrio óptimo estacionario y si el camino óptimo para el problema es el Camino más Cercano Factible, entonces el segmento de aproximación más cercano a partir de x_0 a $\overline{x}(t)$, es permanecer en $\overline{x}(t)$, y luego salir de $\overline{x}(t)$ lo más tarde posible (t_{max}) para alcanzar x_T en el tiempo T es óptimo.

Con este resultado, el método consiste en hallar $x_a(t)$ la solución del problema que comienza en $x(0) = x_0$ y utiliza la cosecha mínima h_{min} si $x_0 < x^*(t)$ o usa la cosecha máxima h_{max} si $x_0 > x^*(t)$, hasta alcanzar el valor $x^*(t)$ en el tiempo t_{min} a determinar. Llamaremos a esta solución $x_a(t)$ y t_{min} será el primer momento en que $x_a(t)$ llega a $x^*(t)$. Luego debe ser hallado $x_b(t)$ solución del problema con condición final $x(T) = x_T$, que utiliza la cosecha mínima h_{min} si $x_T > x^*(t)$ o usa la cosecha máxima h_{max} si $x_T < x^*(t)$. El tiempo t_{max} será el primer momento en que $x_b(t)$ alcanza el valor $x^*(t)$.
En la Figura 4.1, podemos observar un ejemplo de este procedimiento. Según el Teorema 26, considerar el camino $x_0 t_{min} - t_{min} t_{max} - t_{max} x_T$ es óptimo con respecto a cualquier otro camino como $x_0 A - AB - B x_T$.

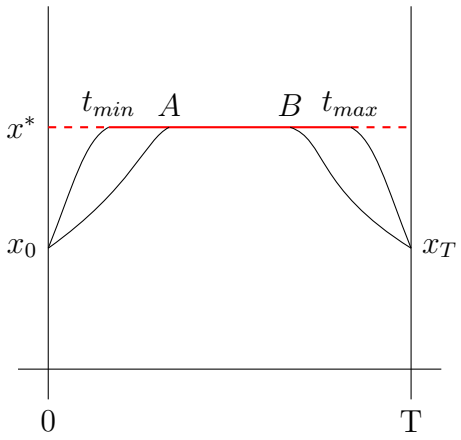


Figura 4.1: Ejemplo del Teorema del Camino más Cercano

En resumen, la solución óptima estará dada por

$$x^*(t) = \begin{cases} x_a(t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq t_{min} \\ \frac{K}{2}\left(1 - \frac{\delta}{r}\right) & \text{si} \quad t_{min} \leq t \leq t_{max} \\ x_b(t) & \text{si} \quad t_{max} \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.6}$$

y la cosecha óptima es obtenida del siguiente procedimiento

$$h^*(t) = \begin{cases} h_{min} & \text{si} \quad x(t) > x^*(t) \\ \frac{K}{4}\frac{r^2-\delta^2}{r} & \text{si} \quad x(t) = x^*(t) \\ h_{max} & \text{si} \quad x(t) < x^*(t), \end{cases} \tag{4.7}$$

teniendo en cuenta que, para que la solución sea factible, se debe satisfacer

$$h_{min} \leq \frac{K}{4}\frac{r^2 - \delta^2}{r} \leq h_{max}.$$

Observación 44 *Podemos obtener la solución del problema sin descuento como caso particular de las dadas, considerando $\delta = 0$ en las ecuaciones (4.3) y (4.5).*

Resulta

$$x^*(t) = \frac{K}{2} \tag{4.8}$$

y

$$h^*(t) = \frac{K}{4}r \tag{4.9}$$

A continuación, resolveremos este problema pero en su versión fraccionaria.

4.2. Modelo fraccionario

En esta sección proponemos la versión fraccionaria del problema planteado en la sección anterior, es decir, el mismo problema pero ahora intervienen derivadas de orden fraccionario,

$$\begin{cases} \text{máx} \int_0^T e^{-\delta t} h(x(t))\, dt \\ {}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h(x(t)) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \\ h_{min} \leq h(x(t)) \leq h_{max}. \end{cases} \tag{4.10}$$

La única diferencia con el problema expresado anteriormente, es que en la ecuación dinámica

$${}_0^C D_t^\alpha [x] = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - h(x(t)), \tag{4.11}$$

ya no aparece la derivada de primer orden, sino que ahora interviene ${}_0^C D_t^\alpha [x]$ la derivada fraccionaria de Caputo por izquierda de orden $0 < \alpha \leq 1$.

Observemos que si pedimos la condición de que $h(x(t)) \in C([0,T])$ y que satisfaga una condición de Lipzchits en el intervalo $[0,T]$, podríamos demostrar existencia y unicidad de solución para la ecuación (4.11) sujeta a la condición $x(0) = x_0$. Para realizar esto, se utiliza un Teorema similar al Teorema de Picard pero en su versión fraccionaria, que se encuentra en [25].

Ahora vamos a resolver el problema (4.10).

Despejando $h(x(t))$ de la ecuación dinámica (4.11) y reemplazando en el funcional a

maximizar, resulta

$$\begin{cases} \text{máx} \int_0^T e^{-\delta t} \left[rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - {}_0^C D_t^\alpha [x] \right] dt \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \\ h_{min} \leq h(x(t)) \leq h_{max}. \end{cases}$$

Nuevamente se reduce a un problema variacional, ahora fraccionario, cuyo lagrangiano fraccionario es

$$L(t, x, {}_0^C D_t^\alpha [x]) = e^{-\delta t} \left[rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - {}_0^C D_t^\alpha [x] \right]. \tag{4.12}$$

Por lo visto en la sección 2.2 del Capítulo 2, para resolver problemas variacionales fraccionarios existen dos Teoremas que nos permiten encontrar condiciones necesarias de optimalidad. Estos son: Teorema 18 que nos proporciona una ecuación de Euler-Lagrange donde intervienen derivadas fraccionarias de Caputo y de Riemann-Liouville (C-RL) y Teorema 20 que nos brinda una ecuación de Euler-Lagrange donde sólo aparecen derivadas fraccionarias de Caputo (C-C).

Como aún no sabemos cuál de estos Teoremas es el más apto para la resolución de este tipo de problemas, a continuación resolveremos el problema variacional mediante los dos métodos, para luego hacer una comparación entre ellos y con el caso clásico.

4.2.1. Resolución mediante la ecuación de Euler-Lagrange C-RL

Al lagrangiano $L(t, x, {}_0^C D_t^\alpha [x]) = e^{-\delta t} \left[rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - {}_0^C D_t^\alpha [x] \right]$ en la ecuación (4.12), le aplicamos el Teorema 18. Su ecuación de Euler-Lagrange C-RL (2.4) es,

$$\frac{\partial L}{\partial x} + {}_t^{RL} D_T^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial {}_0^C D_t^\alpha [x]} \right] = 0,$$

de donde obtenemos por un lado

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e^{-\delta t} r \left(1 - \frac{2}{K} x(t) \right) \tag{4.13}$$

y por otro lado tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial\, {}_0^C D_t^\alpha [x]} = -e^{-\delta t}, \tag{4.14}$$

con lo que podemos obtener

$$\begin{aligned}
{}_t^{RL}D_T^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_0^C D_t^\alpha [x]}\right] &= {}_t^{RL}D_T^\alpha \left[-e^{-\delta t}\right] \\
&\underbrace{=}_{1} -\sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{(-\delta)^j}{j!} e^{-\delta T}\, {}_t^{RL}D_T^\alpha \left[(t-T)^j\right] \\
&\underbrace{=}_{2} -\tfrac{(-\delta)^0}{0!} e^{-\delta T}\, {}_t^{RL}D_T^\alpha [1] - \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{\delta^j}{j!} e^{-\delta T}\, {}_t^{RL}D_T^\alpha \left[(T-t)^j\right] \\
&\underbrace{=}_{3} -e^{-\delta T} \tfrac{(T-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{\delta^j}{\cancel{j!}} e^{-\delta T} \tfrac{\cancel{\Gamma(1+j)}}{\Gamma(1+j-\alpha)} (T-t)^{j-\alpha} \\
&= -e^{-\delta T} \tfrac{(T-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{\delta^j}{\Gamma(j+(1-\alpha))} e^{-\delta T} (T-t)^{j-\alpha} \\
&= -e^{-\delta T} \tfrac{(T-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\delta^{k+1}}{\Gamma(k+1+(1-\alpha))} e^{-\delta T} (T-t)^{k+1-\alpha} \\
&= -e^{-\delta T} \tfrac{(T-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \delta (T-t)^{1-\alpha} e^{-\delta T} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\delta^k (T-t)^k}{\Gamma(k+2-\alpha)} \\
&\underbrace{=}_{4} -e^{-\delta T} \tfrac{(T-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \delta (T-t)^{1-\alpha} e^{-\delta T} E_{1,2-\alpha}(\delta (T-t)) \\
&= -e^{-\delta T} (T-t)^{-\alpha} \left[\tfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \delta (T-t) E_{1,2-\alpha}(\delta (T-t))\right] \\
&\underbrace{=}_{5} -e^{-\delta T} (T-t)^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\delta (T-t)).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

En 1 utilizamos el hecho de que $-e^{-\delta t} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^j (t-T)^j}{j!} e^{-\delta T}$ su serie de Taylor alrededor de T y la linealidad de la derivada de Riemann-Liouville.

En 2 pedimos que $t \neq T$ y en la sumatoria el $(-1)^j$ que acompañaba a δ se lo multiplicamos a $(t-T)^j$ dentro de la derivada de Riemann-Liouville.

En 3 tenemos que ${}_t^{RL}D_T^\alpha [1] = \frac{(T-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ como vimos en la Observación 26, ${}_t^{RL}D_T^\alpha \left[(T-t)^j\right] = \frac{\Gamma(1+j)}{\Gamma(1+j-\alpha)} (T-t)^{j-\alpha}$ por Ejemplo 5 y recordemos que $\Gamma(1+j) = j!$ por lo visto en la Proposición 1.

En 4 utilizamos que $E_{1,2-\alpha}(\delta (T-t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k (T-t)^k}{\Gamma(k+2-\alpha)}$, por Definición 3 de la función de Mittag-Leffler.

Por último, en 5, por Teorema 2, podemos asegurar que $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \delta (T-t) E_{1,2-\alpha}(\delta (T-t)) = E_{1,1-\alpha}(\delta (T-t))$.

Ahora sumando (4.13) y (4.15), obtenemos la siguiente ecuación

$$e^{-\delta t} r \left(1 - \frac{2}{K} x(t)\right) - e^{-\delta T} (T-t)^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\delta(T-t)) = 0.$$

Despejando $x(t)$ obtenemos la solución

$${}^{RL}x^*_\alpha(t) = \tfrac{K}{2}\left(1 - \tfrac{(T-t)^{-\alpha}}{r} e^{-\delta(T-t)} E_{1,1-\alpha}\left(\delta(T-t)\right)\right). \tag{4.16}$$

Y la cosecha se obtiene de la siguiente expresión

$${}^{RL}h^*_\alpha(t) = r\, {}^{RL}x^*_\alpha(t)\left(1 - \frac{{}^{RL}x^*_\alpha(t)}{K}\right) - {}_0^C D_t^\alpha \left[{}^{RL}x^*_\alpha\right]. \tag{4.17}$$

Notemos que en el caso clásico la población obtenida es constante, en cambio, en este caso no lo es, por lo tanto en la cosecha aparece un término con la derivada de Caputo de ${}^{RL}x^*_\alpha(t)$, que debido a su dificultad debemos recurrir a calcularla numéricamente.

Observación 45 *Podemos observar que, como en el caso clásico, la solución ${}^{RL}x^*_\alpha(t)$, si bien no es una constante, tampoco verificará las condiciones de borde establecidas. Esto significa que nos encontramos otra vez con un problema de tipo singular.*
Para la resolución del mismo, podríamos recurrir nuevamente al Teorema del Camino más Cercano 26, pero esta vez necesitaremos una versión fraccionaria del mismo. Sin embargo aún no se ha realizado debido a que en la demostración del Teorema es necesaria la utilización del Teorema de Green fraccionario, que por el momento sólo se tiene para regiones rectangulares [42], y es necesaria su versión para todo tipo de regiones.

Observación 46 *Para el caso sin descuento, es decir $\delta = 0$, tenemos el siguiente problema variacional fraccionario:*

$$\begin{cases} \text{máx} \int_0^T \left[rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - {}_0^C D_t^\alpha [x]\right] dt \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \\ h_{min} \leq h(x(t)) \leq h_{max}, \end{cases}$$

con lagrangiano $L(t, x, {}_0^C D_t^\alpha [x]) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - {}_0^C D_t^\alpha [x]$.

Su ecuación de Euler-Lagrange C-RL (2.4) resulta,

$$\frac{\partial L}{\partial x} + {}_{t}^{RL}D_{T}^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}[x]}\right] = 0,$$

lo que implica

$$r\left(1 - \tfrac{2}{K}x(t)\right) + {}_{t}^{RL}D_{T}^{\alpha}\left[(-1)\right] = 0,$$

luego,

$$r\left(1 - \tfrac{2}{K}x(t)\right) - \tfrac{(T-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = 0.$$

Puesto que la derivada de Riemann-Liouville de una constante no se anula, como en el caso de la derivada clásica, obtenemos que la solución del caso fraccionario no es la misma que en el caso clásico (4.8), resultando en este caso

$${}^{RL}x_{\alpha}^{*}(t) = \tfrac{K}{2}\left(1 - \tfrac{(T-t)^{-\alpha}}{r\Gamma(1-\alpha)}\right)$$

siendo $t \neq T$.

4.2.2. Resolución mediante la ecuación de Euler-Lagrange C-C

Como el lagrangiano $L(t, x, {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}[x]) = e^{-\delta t}\left[rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}[x]\right]$, que aparece en la ecuación (4.12), pertenece a $C^2\left([0,T]\times\mathbb{R}^2\right)$ entonces estamos en condiciones de aplicar el Teorema 20. Su ecuación de Euler-Lagrange C-C (2.13) es,

$$\frac{\partial L}{\partial x} + {}_{t}^{C}D_{T}^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}[x]}\right] = 0,$$

Ahora realizamos el mismo procedimiento que en la sección anterior, por un lado

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e^{-\delta t}r\left(1 - \frac{2}{K}x(t)\right) \tag{4.18}$$

y por otro lado tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial\, {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}[x]} = -e^{-\delta t}, \tag{4.19}$$

con lo que podemos obtener

$$
\begin{aligned}
{}_t^C D_T^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_0^C D_t^\alpha [x]}\right] &= {}_t^C D_T^\alpha \left[-e^{-\delta t}\right] \\
&\underbrace{=}_{1} -\sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{(-\delta)^j}{j!} e^{-\delta T}\, {}_t^C D_T^\alpha \left[(t-T)^j\right] \\
&\underbrace{=}_{2} -\tfrac{(-\delta)^0}{0!} e^{-\delta T}\, {}_t^C D_T^\alpha [1] - \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{\delta^j}{j!} e^{-\delta T}\, {}_t^C D_T^\alpha \left[(T-t)^j\right] \\
&\underbrace{=}_{3} -\sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{\delta^j}{\cancel{j!}} e^{-\delta T} \tfrac{\cancel{\Gamma(1+j)}}{\Gamma(1+j-\alpha)} (T-t)^{j-\alpha} \\
&= -\sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{\delta^j}{\Gamma(j+(1-\alpha))} e^{-\delta T} (T-t)^{j-\alpha} \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\delta^{k+1}}{\Gamma(k+1+(1-\alpha))} e^{-\delta T} (T-t)^{k+1-\alpha} \\
&= -\delta (T-t)^{1-\alpha} e^{-\delta T} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{\delta^k (T-t)^k}{\Gamma(k+2-\alpha)} \\
&\underbrace{=}_{4} -\delta (T-t)^{1-\alpha} e^{-\delta T} E_{1,2-\alpha}(\delta (T-t)).
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

En 1 utilizamos el hecho de que $-e^{-\delta t} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^j (t-T)^j}{j!} e^{-\delta T}$ su serie de Taylor alrededor de T y la linealidad de la derivada de Caputo.

En 2, en la sumatoria, el $(-1)^j$ que acompañaba a δ se lo multiplicamos a $(t-T)^j$ dentro de la derivada de Riemann-Liouville.

En 3 tenemos que ${}_t^C D_T^\alpha [1] = 0$ como vimos en la Observación 26, ${}_t^C D_T^\alpha \left[(T-t)^j\right] = \frac{\Gamma(1+j)}{\Gamma(1+j-\alpha)} (T-t)^{j-\alpha}$ por Ejemplo 5 y recordemos que $\Gamma(j+1) = j!$ como en la Proposición 1.

En 4 utilizamos que $E_{1,2-\alpha}(\delta(T-t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k (T-t)^k}{\Gamma(k+2-\alpha)}$ por la Definición 3.

Ahora sumando (4.18) y (4.20), obtenemos la siguiente ecuación

$$
e^{-\delta t} r \left(1 - \tfrac{2}{K} x(t)\right) - \delta (T-t)^{1-\alpha} e^{-\delta T} E_{1,2-\alpha}(\delta (T-t)) = 0.
$$

Podemos concluir que la solución es

$$
{}^C x_\alpha^*(t) = \tfrac{K}{2} \left(1 - \tfrac{\delta}{r} (T-t)^{1-\alpha} e^{-\delta (T-t)} E_{1,2-\alpha}(\delta (T-t))\right). \tag{4.21}
$$

Y la cosecha se obtiene de la siguiente expresión

$$ {}^{C}h^{*}_{\alpha}(t) = r\, {}^{C}x^{*}_{\alpha}(t)\left(1 - \frac{{}^{C}x^{*}_{\alpha}(t)}{K}\right) - {}^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}\left[{}^{C}x^{*}_{\alpha}\right]. \tag{4.22} $$

Similarmente al caso anterior, en la cosecha aparece un término con la derivada de Caputo de ${}^{C}x^{*}_{\alpha}(t)$, que debido a su dificultad debemos recurrir a calcularla numéricamente.

Observación 47 *Nuevamente, como en Observación 45, podemos ver que, como en el caso clásico, la solución ${}^{C}x^{*}_{\alpha}(t)$, si bien no es una constante, tampoco verificará las condiciones de borde establecidas.*

Observación 48 *Aquí tenemos la solución del problema sin descuento ($\delta = 0$) como caso particular de la solución del problema (4.10).*
La población es ${}^{C}x^{*}_{\alpha}(t) = \frac{K}{2}$ y la cosecha es ${}^{C}h^{*}_{\alpha}(t) = \frac{rK}{4}$.
Observemos que dicha solución es la misma para el caso clásico en (4.8) y (4.9), con lo cuál tenemos para el caso $\delta = 0$, la solución y la cosecha óptima es la misma para todo $0 < \alpha \leq 1$, utilizando este método de resolución. El motivo por el cuál sucede esto es porque no existe ningún factor que dependa del tiempo que multiplique a ${}^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}\left[x^{*}_{\alpha}\right]$ en el problema variacional fraccionario resultante de tomar $\delta = 0$:

$$ \begin{cases} \text{máx} \int_{0}^{T} \left[rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - {}^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}\left[x\right]\right] dt \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_T \\ h_{min} \leq h(x(t)) \leq h_{max}, \end{cases} $$

con lagrangiano $L(t, x, {}^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}\left[x\right]) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - {}^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}\left[x\right]$.
Su ecuación de Euler-Lagrange C-C (2.13) resulta,

$$ \frac{\partial L}{\partial x} + {}^{C}_{t}D^{\alpha}_{T}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}^{C}_{0}D^{\alpha}_{t}\left[x\right]}\right] = 0, $$

lo que implica

$$ r\left(1 - \tfrac{2}{K}x(t)\right) + {}^{C}_{t}D^{\alpha}_{T}\left[(-1)\right] = 0, $$

luego,

$$ r\left(1 - \tfrac{2}{K}x(t)\right) = 0, $$

puesto que la derivada de Caputo de una constante también se anula, como en el caso de la derivada clásica, y así se obtiene la misma ecuación de Euler-Lagrange para todo $0 < \alpha \leq 1$ *y su solución es independiente de dicho valor.*

Para realizar un análisis gráfico de las soluciones para el problema con descuento para los casos fraccionarios y el clásico, debemos ver un ejemplo en concreto.

4.3. Ejemplo y comparación

Sean x_0, $x_{10} > 0$ valores fijos y r, K, δ, T, h_{min} y h_{max} valores dados como en el ejemplo *The Pacific Halibut Fishery*, en [23].
El problema resulta:

$$\begin{cases} \text{máx} \int_0^{10} e^{-0{,}01t} h(x(t))\, dt \\ {}_0^C D_t^\alpha [x] = 0{,}71\, x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{80{,}5}\right) - h(x(t)) \\ x(0) = x_0 \\ x(10) = x_{10} \\ 10 \leq h(x(t)) \leq 15, \end{cases} \tag{4.23}$$

Vamos a resolver este problema utilizando lo visto en las secciones 4.2.1, 4.2.2 y 4.1.
Primero vamos a realizar una comparación entre los dos métodos fraccionarios, para después ya sí incluir el caso clásico.

4.3.1. Comparación entre métodos C-RL y C-C

Vamos a resolver (4.23) utilizando los Teoremas 18 y 20.
De la ecuación (4.16) obtenemos que la solución crítica obtenida, para cada valor de $0 < \alpha < 1$, mediante la ecuación de Euler-Lagrange C-RL es

$$\begin{aligned} {}^{RL}x^*(t) &= \tfrac{K}{2}\left(1 - \tfrac{(T-t)^{-\alpha}}{r} e^{-\delta(T-t)} E_{1,1-\alpha}\left(\delta(T-t)\right)\right) \\ &= 40{,}25\left(1 - \tfrac{(10-t)^{-\alpha}}{0{,}71} e^{-0{,}01(10-t)} E_{1,1-\alpha}\left(0{,}01(10-t)\right)\right). \end{aligned} \tag{4.24}$$

De la ecuación (4.21) obtenemos que la solución crítica obtenida, para cada valor de

$0 < \alpha < 1$, mediante la ecuación de Euler-Lagrange C-C es

$$\begin{aligned} {}^{C}x^*_\alpha(t) &= \frac{K}{2}\left(1 - \frac{\delta(T-t)^{1-\alpha}}{r}e^{-\delta(T-t)}E_{1,2-\alpha}(\delta(T-t))\right) \\ &= 40{,}25\left(1 - \frac{0{,}01(10-t)^{1-\alpha}}{0{,}71}e^{-0{,}01(10-t)}E_{1,2-\alpha}(0{,}01(10-t))\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Si representamos gráficamente esto, considerando diferentes valores de α obtenemos las siguientes gráficas. Los códigos de las funciones solución los realizamos en lenguaje Python y pueden verse en el Anexo en el Código 5.

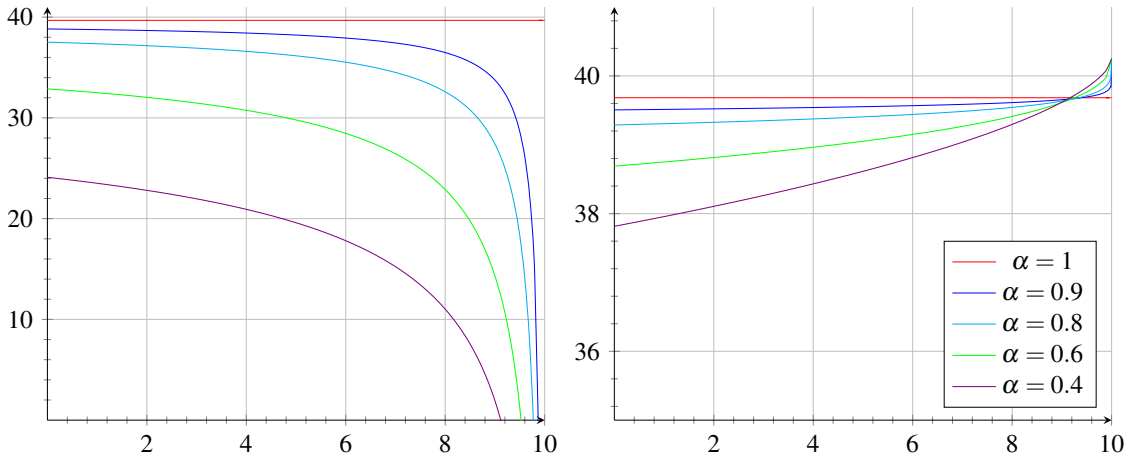


Figura 4.2: Poblaciones obtenidas mediante las ecuaciones C-RL y C-C.

En la Figura 4.2 podemos observar, a la izquierda, que las distintas soluciones ${}^{RL}x^*_\alpha(t)$ (4.24) comienzan en un valor fijo (que, como mencionamos antes, no necesariamente es el valor inicial pedido en el problema) y luego terminan en menos infinito, lo cual interpretamos como que se extingue la especie, mientras que, a la derecha, las distintas soluciones ${}^{C}x^*_\alpha(t)$ (4.25) comienzan en un valor fijo (que, como también mencionamos antes, tampoco es necesariamente el valor inicial pedido en el problema) y luego terminan en otro punto fijo pero positivo (que tampoco es necesariamente el valor final pedido en el problema).

¿Con cuáles de estas soluciones nos quedamos? ¿Cuáles son las óptimas? Si bien ninguna de estas soluciones brindadas con los distintos métodos cumple con las condiciones de borde impuestas (esto es debido a la singularidad del problema en sí), vamos a elegir una de estas familias de soluciones realizando un análisis cualitativo de la situación. En el siguiente capítulo realizaremos una comparación más profunda entre estos métodos pero sobre un ejemplo estándar que sí verifique condiciones de borde.

Para tomar una decisión nos basamos en el simple hecho de que no queremos que se extinga la especie. Como vimos en Figura 4.2, las distintas soluciones ${}^{RL}x^*_\alpha(t)$(4.24), muestran la extinción del recurso explotado, mientras que las ${}^{C}x^*_\alpha(t)$ (4.25), no. Sólo por este detalle, simple pero de mucha importancia, hemos decidido elegir las soluciones brindadas mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange C-C para realizar una comparación más profunda con la solución clásica.

4.3.2. Comparación entre soluciones fraccionarias C-C y la solución clásica

En esta sección vamos a realizar una comparación entre las soluciones fraccionarias (C-C) y la solución clásica, sin embargo no perdamos de vista que, como mencionamos en la Observación 47, las ${}^{C}x^*_\alpha(t)$ (4.25) no cumplen con las condiciones de borde pedidas en el problema. Entonces, para evadir este inconveniente, decidimos considerar un valor fijo de α, obteniendo las condiciones de borde x_0 y x_{10} de esta solución fraccionaria fija, para después armar el problema con esos valores y así resolver por un lado el problema fraccionario, y por otro lado el problema clásico utilizando el Teorema del Camino más Cercano (Teorema 26).

Así, eligiendo $\alpha = 0{,}6$, el problema (4.23) resulta,

$$\begin{cases} \text{máx} \int_0^{10} e^{-0{,}01t} h(x(t))\, dt \\ {}_0^C D_t^{0{,}6}\,[x] = 0{,}71\, x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{80{,}5}\right) - h(x(t)) \\ x(0) = 38{,}6896 \\ x(10) = 40{,}25 \\ 10 \leq h(x(t)) \leq 15. \end{cases} \tag{4.26}$$

Primero resolvemos el problema clásico como hicimos en la sección 4.1, usando (4.3) y (4.5) obtenemos

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \tfrac{K}{2}\left(1 - \tfrac{\delta}{r}\right) \\ &= 40{,}5\left(1 - \tfrac{0{,}01}{0{,}71}\right) \\ &= 39{,}6831 \end{aligned} \tag{4.27}$$

y

$$\begin{aligned} h^*(t) &= \frac{K}{4}\frac{r^2-\delta^2}{r} \\ &= 20{,}125\frac{0{,}71^2-0{,}01^2}{0{,}71} \\ &= 14{,}2859. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Podemos observar que $x^*(t)$ no verifica las condiciones de borde, entonces aplicaremos el Teorema del Camino más Cercano (Teorema 26).

El método consiste en hallar $x_a(t)$ la solución del problema que comienza en $x(0) = 38{,}6896$ y usa la cosecha mínima $h_{min} = 10$ hasta que la solución alcance el valor $x^*(t) = 39{,}6831$ en el tiempo t_{min}, pues $38{,}6896 < x^*(t) = 39{,}6831$.

Para ello consideramos,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0{,}71x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{80{,}5}\right) - 10 \\ x(0) = 38{,}6896. \end{cases}$$

Su solución es,

$$x_a(t) = \frac{20{,}9703 + 62{,}3013\, e^{0{,}388979t}}{1{,}1523 + e^{0{,}388979t}}. \tag{4.29}$$

Y t_{min} será tal que $x_a(t_{min}) = x^*(t) = 39{,}6831$. Resulta

$$t_{min} = 0{,}232235.$$

Siguiendo con el método, ahora debemos hallar $x_b(t)$ solución del problema que usa nuevamente la cosecha mínima $h_{min} = 10$ hasta que la solución alcanza el valor $x(T) = x(10) = 40{,}25$, pues $40{,}25 > x^*(t) = 39{,}6831$.

Para ello consideramos,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0{,}71x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{80{,}5}\right) - 10 \\ x(10) = 40{,}25. \end{cases}$$

Su solución es

$$x_b(t) = \frac{889{,}931 + 62{,}3013\, e^{0{,}388979t}}{48{,}9008 + e^{0{,}388979t}}. \tag{4.30}$$

Y t_{max} será tal que $x_b(t_{max}) = x^*(t) = 39{,}6831$. Resulta

$$t_{max} = 9{,}8678.$$

Finalmente, obtenemos la solución óptima utilizando (4.27), (4.29) y (4.30), los tiempos t_{min} y t_{max} y el Teorema 26.

$$x^*(t) = \begin{cases} \dfrac{20{,}9703 + 62{,}3013\, e^{0{,}388979t}}{1{,}1523 + e^{0{,}388979t}} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 0{,}232235 \\ 39{,}6831 & \text{si} \quad 0{,}232235 \leq t \leq 9{,}8678 \\ \dfrac{889{,}931 + 62{,}3013\, e^{0{,}388979t}}{48{,}9008 + e^{0{,}388979t}} & \text{si} \quad 9{,}8678 \leq t \leq 10 = T \end{cases} \tag{4.31}$$

y la cosecha óptima obtenida del mismo procedimiento es

$$h^*(t) = \begin{cases} 10 & \text{si} \quad 0 \leq t < 0{,}232235 \\ 14{,}2859 & \text{si} \quad 0{,}232235 \leq t \leq 9{,}8678 \\ 10 & \text{si} \quad 9{,}8678 < t \leq 10 = T. \end{cases} \tag{4.32}$$

Ahora resolvamos el problema en su versión fraccionaria. Utilizando (4.25) de la sección anterior y (4.22) de la sección 4.2.2, obtenemos la solución

$$\begin{aligned} x^*_\alpha(t) &= 40{,}25 \left(1 - \tfrac{0{,}01(10-t)^{1-\alpha}}{0{,}71} e^{-0{,}01(10-t)} E_{1,2-\alpha}(0{,}01(10-t))\right) \Longrightarrow \\ x^*_{0,6}(t) &= 40{,}25 \left(1 - \tfrac{0{,}01}{0{,}71}(10-t)^{0{,}4} e^{-0{,}01\,(10-t)} E_{1,\,1,4}(0{,}01\,(10-t))\right). \end{aligned} \tag{4.33}$$

y la cosecha se obtiene de la expresión

$$\begin{aligned} h^*_\alpha(t) &= r x^*_\alpha(t) \left(1 - \tfrac{x^*_\alpha(t)}{K}\right) - {}_0^C D_t^\alpha \left[x^*_\alpha\right] \Longrightarrow \\ h^*_{0,6}(t) &= 0{,}71\, x^*_{0,6}(t) \left(1 - \tfrac{x^*_{0,6}(t)}{80{,}5}\right) - {}_0^C D_t^{0,6} \left[x^*_{0,6}\right]. \end{aligned} \tag{4.34}$$

A continuación realizaremos una gráfica de las poblaciones obtenidas en ambos casos. Los códigos de las funciones los realizamos en lenguaje Python, se pueden ver en el Anexo en Código 4 para el problema clásico y Código 5 para el problema fraccionario.

Podemos observar en la Figura 4.3 que la solución fraccionaria, $x^*_{0,6}(t)$ (4.33), es menor a la población óptima del problema clásico, $x^*(t)$ (4.31), durante la mayor parte del tiempo,

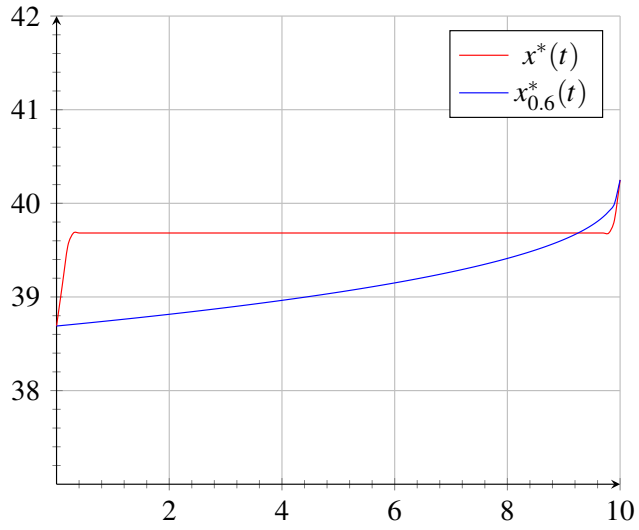


Figura 4.3: Poblaciones obtenidas para los problemas clásico y fraccionario.

esto significa que la versión con $\alpha = 0{,}6$ muestra un deterioro del estado del stock del recurso con respecto al caso $\alpha = 1$, que solo se recupera sobre el final.

En la siguiente gráfica, consideraremos las cosechas obtenidas. Como no pudimos obtener ${}_0^C D_t^{0,6}\left[x^*_{0,6}\right]$ de manera clásica, recurrimos a utilizar un método numérico fraccionario L1 visto en la sección 1.3.2 del Capítulo 1 y en los libros [9, 36]. Los códigos de las funciones los realizamos en lenguaje Python, se pueden ver en el Anexo en Código 4 para el problema clásico y Código 5 para el problema fraccionario.

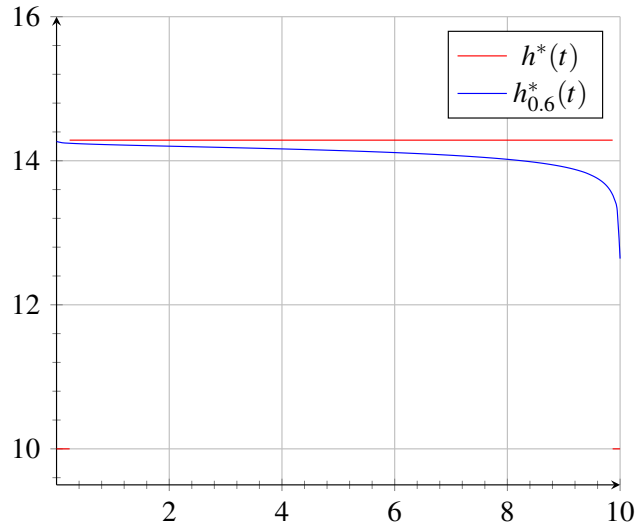


Figura 4.4: Cosechas obtenidas de los problemas clásico y fraccionario.

En la Figura 4.4 tenemos que si bien con el problema fraccionario la extracción del recurso es menor, lo cual es lógico puesto que la dinámica fraccionaria modela que el recurso crezca más lentamente, la misma sólo disminuye al final del intervalo cerca de $T = 10$ y aún así la extracción final en T termina siendo mayor que en el caso clásico.
De este modo, es posible hacer una comparación de las ganancias obtenidas en cada caso. Para ello realizamos una aproximación de la integral correspondiente al problema fraccionario utilizando sumas de Riemann, ver Código 4 y Código 5 en el Anexo. Obtuvimos los siguientes valores:

Ganancia del caso clásico	134,411
Ganancia del caso fraccionario	133,828

Tabla 4.1: Ganancias obtenidas.

Para hacer un mejor análisis de lo sucedido, consideremos el siguiente gráfico de la evolución de los recursos sin cosecha con condición inicial dada. Realizamos los códigos en lenguaje Python similares a los del capítulo anterior, pueden verse en el Anexo en Código 6.

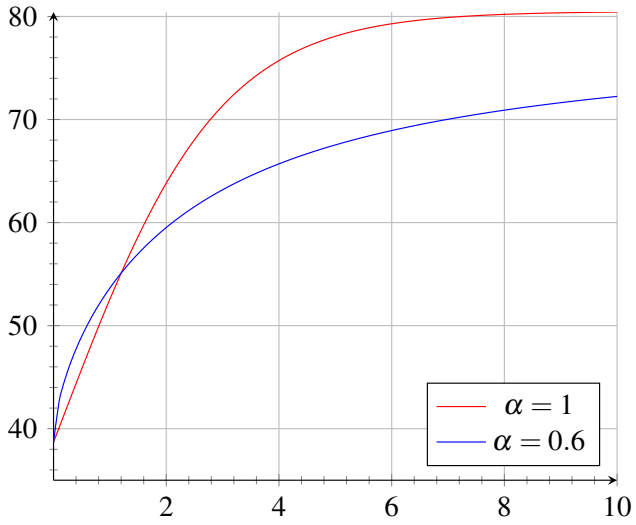


Figura 4.5: Poblaciones de las dinámicas de los problemas clásico y fraccionario sin considerar cosecha.

Podemos notar que la utilización de una dinámica fraccionaria, que hace que el recurso crezca más lentamente como en Figura 4.5, no hace variar considerablemente la ganancia comparada con el caso clásico.

Por último, podemos plantear un hipotético caso en que la agencia que cosecha el recurso no sabe que la dinámica "verdadera" es la fraccionaria y realiza los cálculos utilizando la derivada clásica obteniendo la cosecha h_1^* dada en (4.28). Entonces, veamos qué sucede con la población considerando esta cosecha en la dinámica fraccionaria del recurso.
Debemos resolver

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha}\,[x] = 0{,}71\,x(t)\left(1-\frac{x(t)}{80{,}5}\right) - 14{,}2859 \\ x(0) = 38{,}6896. \end{cases} \tag{4.35}$$

Como esta ecuación no tiene solución exacta, vamos a aproximar dicha solución utilizando el método de Adams fraccionario visto en la sección 1.3.1 del Capítulo 1 y en los libros [9, 36]. Realizamos estos códigos en lenguaje Python, se puede ver en el Anexo en Código 7. Para esta situación, obtenemos el siguiente resultado

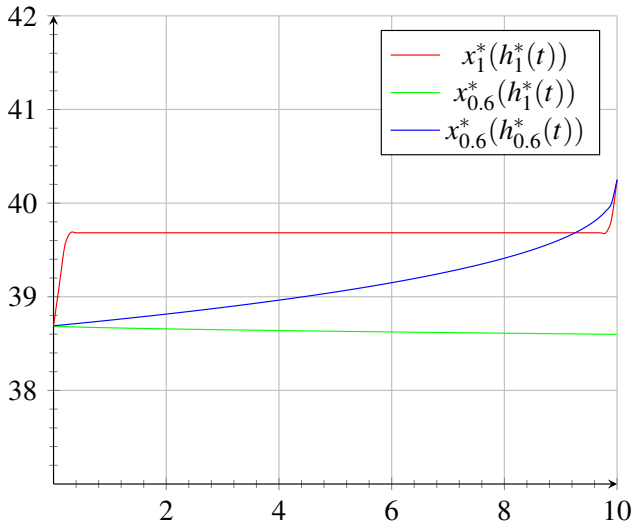


Figura 4.6: Poblaciones para los problemas clásico, y fraccionarios considerando distintas cosechas.

En la Figura 4.6 podemos observar que la población obtenida de la dinámica fraccionaria correspondiente a considerar la cosecha óptima del problema de control clásico $x_{0,6}^*(h_1^*(t))$, es menor a la obtenida tomando la cosecha del problema fraccionario $x_{0,6}^*(h_{0,6}^*(t))$, como era de esperarse.
Más aún, si suponemos que la "verdadera evolución" de la dinámica es considerando $\alpha = 0{,}6$ y que la agencia que cosecha el recurso considera como evolución errónea la dinámica de $\alpha = 1$, la pérdida no es muy grande porque la agencia va a usar $h_1^*(t)$ y su ganancia va a ser 133,828 y no 134,411 como se habría estimado. Notar también que

la diferencia entre las ganancias obtenidas podría ser más significativa si la función de ganancia instantánea, que en este caso es sólo la cosecha, fuera un poco más compleja y dependiera también del stock como en la Observación 42.

4.4. Conclusiones del Capítulo

En este capítulo hemos estudiado un problema de control fraccionario que modela la maximización de las ganancias obtenidas de la explotación de cierto recurso. Realizamos una explicación del modelo utilizado. Debido a la singularidad del problema en sí, se desarrollaron y utilizaron diferentes técnicas de resolución, tanto para los casos fraccionarios, como para el caso clásico. A pesar de que nos encontramos con la necesidad de un Teorema del Camino más Cercano no existente en el análisis fraccionario, fuimos capaces de realizar una comparación entre las soluciones de los problemas clásico y fraccionario para un orden fraccionario fijo. También pudimos observar, como en el capítulo anterior, que el orden fraccionario en la dinámica de la población realmente afecta el comportamiento de su crecimiento. Entonces, podemos concluir que las derivadas fraccionarias podrían modelar mejor la evolución de recursos naturales que poseen un retardo en su crecimiento.

Por otro lado, durante la resolución de este problema vimos que utilizando la ecuación de Euler-Lagrange que dependía de las derivadas de Caputo y Riemann-Liouville, nos proporcionaba diferentes soluciones que usando la ecuación de Euler-Lagrange que involucraba solo derivadas de Caputo. Para continuar con la comparación decidimos elegir, por cuestiones cualitativas, las poblaciones calculadas mediante la ecuación que usaba solo derivadas de Caputo. No sabemos si la diferencia de las soluciones obtenidas es porque el problema planteado es de tipo singular o por razones diferentes, por esta razón decidimos dedicar el siguiente capítulo a realizar un análisis más profundo de esta situación.

Por último, como futura investigación, nos proponemos la extensión del Teorema del Camino más Cercano en su versión fraccionaria y la implementación de un modelo más complejo en la función objetivo del problema de control planteado.

Capítulo 5

Comparación entre Ecuaciones de Euler-Lagrange

Como hemos mencionado en el Capítulo 2 y en el Capítulo 4, existen dos teoremas que otorgan condiciones necesarias para resolver problemas variacionales fraccionarios: una ecuación de Euler-Lagrange donde intervienen derivadas de Caputo y Riemann-Liouville (C-RL) y otra ecuación de Euler-Lagrange donde sólo aparecen derivadas de Caputo (C-C). A lo largo de la tesis vimos que en muchos casos nos convenía trabajar con la C-C, por lo visto en Observación 31. Sin embargo nos quedó pendiente la duda de cuál de estos métodos es el más apropiado en general, es decir en casos estándar (no como en el caso del Capítulo 4 que era un problema variacional atípico).

En este capítulo, haremos una comparación resolviendo dos diferentes problemas variacionales, uno fraccionario y otro mixto, mediante ambos métodos, con la intención de obtener conclusiones sobre qué método elegir. Finalmente, para conseguir este objetivo, presentaremos un nuevo método numérico fraccionario que resolverá estos problemas de manera directa sin pasar por ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias.

Los temas tratados son resultados nuestros que fueron publicados en [11] y también pueden verse en [17].

5.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Existe una extensa bibliografía que trata sobre la resolución de problemas variacionales fraccionarios mediante la utilización de las distintas ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias. Con respecto a la ecuación C-RL nos podemos referir a [2, 4–7, 10, 37–39, 42],

mientras que para la ecuación C-C [8, 13, 14, 19, 33, 35].
A continuación a modo de resumen repasaremos la Definición 2.17 y los Teoremas 21 y 23, que recordemos que son los casos más generales de problemas variacionales puesto que incluyen tanto a los problemas variacionales clásicos como a los fraccionarios de la sección 2.1 y la sección 2.2 del Capítulo 2.

Definición 18 *El problema fundamental del cálculo de variaciones fraccionario con el que vamos a trabajar en esta sección consiste en hallar funciones* $y \in {}_a^{\alpha}E_b'$*, tal que maximicen o minimicen el siguiente funcional*

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', {}_a^C D_x^{\alpha}[y])\, dx \tag{5.1}$$

y que estén sujetas a las condiciones de borde $y(a) = y_a$ *e* $y(b) = y_b$.
Aquí tenemos

$${}_a^{\alpha}E_b' = \{y : [a, b] \to \mathbb{R} / y \in C^1([a, b]),\ {}_a^C D_x^{\alpha}[y] \in C([a, b])\},$$

siendo L *función de Lagrange de clase* $C^1([a, b]\times\mathbb{R}^3)$*,* $\frac{\partial L}{\partial y'}$ *posee derivada primera continua y* $\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}$ *posee derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por derecha de orden* α *continua para* $y \in {}_a^{\alpha}E_b'$.

Teorema 27 ***Ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria para problemas mixtos*** *Si* y *es un mínimo o un máximo de* J *en (5.1) sobre* ${}_a^{\alpha}E_b'$*, entonces* y *es una solución de la ecuación diferencial fraccionaria*

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_x^{RL}D_b^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}\right] = 0 \tag{5.2}$$

para todo $x \in [a, b]$.

Observación 49 *Como ya mencionamos antes, en la ecuación (5.2) intervienen ambas derivadas, la de Riemann-Liouville y la de Caputo. Esto es consecuencia del método de Lagrange para optimizar funcionales: la aplicación del Teorema de Integración por Partes Fraccionario (Teorema 16) para la derivada de Caputo en la derivada de Gateaux del funcional.*

Teorema 28 ***Ecuación de Euler-Lagrange Fraccionaria con sólo derivadas de Caputo para problemas variacionales mixtos***
Sea y un optimizador de J en (5.1) perteneciente a ${}_a^{\alpha}E_b'$, con $L \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^3)$, sujeto a las condiciones de borde $y(a)=y_a\,,\ y(b)=y_b$, entonces y satisface la siguiente ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria que intervienen sólo las derivadas fraccionarias de Caputo

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)+{}_x^{C}D_b^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\,{}_a^{C}D_x^{\alpha}[y]}\right]=0\ . \tag{5.3}$$

Observación 50 *Con respecto a la ecuación (5.3), podemos observar que sólo interviene la derivada de Caputo. Es importante notar la importancia de que $L\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}^3)$, sin esto este resultado no es válido.*

Observación 51 *Podemos observar, que las ecuaciones presentadas son sólo condiciones necesarias de existencia de solución. Ahora estamos interesados en hallar condiciones suficientes. Como es usual, necesitaremos ver algunas condiciones de convexidad sobre el lagrangiano.*

Definición 19 *Decimos que la función $f(\underline{x},y,u,v)$ es convexa en $S\subseteq\mathbb{R}^4$ si f_y , f_u y f_v existen y son continuas, y se verifica la condición*

$$f(x,y+y_1,u+u_1,v+v_1)-f(x,y,u,v)\geq f_y(x,y,u,v)y_1+f_u(x,y,u,v)u_1+f_v(x,y,u,v)v_1,$$

para todo $(x,y,u,v),(x,y+y_1,u+u_1,v+v_1)\in S$.

Observación 52 *De manera análoga se define función cóncava cuando se cumple la desigualdad con menor o igual, en lugar de mayor o igual.*

El teorema que sigue es válido sólo para la solución de la ecuación de Euler-Lagrange C-RL del Teorema 27, ver [7].

Teorema 29 *Supongamos que el lagrangiano $L(\underline{x},y,u,v)$ es convexo (cóncavo) en $[a,b]\times\mathbb{R}^3$. Entonces cada solución y de la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria C-RL (5.2) minimiza (maximiza) al problema (5.1), cuando es restringida a las condiciones $y(a)=y_a$ e $y(b)=y_b$.*

Demostración: Sea $h\in{}_a^{\alpha}E_b'$ una función tal que $h(a)=h(b)=0$.

Usando que L es convexa tenemos

$$\begin{aligned} J(y_0+h)-J(y_0) &= \int_a^b \big(L(x,y_0+h,y_0'+h',\,{}_a^C D_x^\alpha[y_0+h]) \\ &\quad - L(x,y_0,y_0',\,{}_a^C D_x^\alpha[y_0])\big)\,dx \\ &\geq \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}h + \frac{\partial L}{\partial y'}h' + \frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\,{}_a^C D_x^\alpha[h]\right)\Bigg|_{y=y_0} dx. \end{aligned}$$

Llamamos

$$(A) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}h\right)\Bigg|_{y=y_0} dx,$$

$$(B) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y'}h'\right)\Bigg|_{y=y_0} dx$$

y

$$(C) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\,{}_a^C D_x^\alpha[h]\right)\Bigg|_{y=y_0} dx.$$

Integrando por partes a (B) y utilizando el Teorema de Integración por Partes Fraccionario (Teorema 16) en (C) obtenemos

$$\begin{aligned} (B) &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y'}h'\right)\Bigg|_{y=y_0} dx = \\ &= -\int_a^b \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)h\right)\Bigg|_{y=y_0} dx + \frac{\partial L}{\partial y'}h(x)\,\Big|_a^b \\ &\underbrace{=}_{h(a)=h(b)=0} -\int_a^b \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)h\right)\Bigg|_{y=y_0} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (C) &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\,{}_a^C D_x^\alpha[h]\right)\Bigg|_{y=y_0} dx = \\ &= \int_a^b \left(h\,{}_x^{RL}D_b^\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\right]\right)\Bigg|_{y=y_0} dx + {}_x^{RL}D_b^{\alpha-1}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\right]h(x)\,\Big|_a^b \\ &\underbrace{=}_{h(a)=h(b)=0} \int_a^b \left(h\,{}_x^{RL}D_b^\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\right]\right)\Bigg|_{y=y_0} dx. \end{aligned}$$

Luego resulta,

$$\begin{aligned} J(y_0+h)-J(y_0) &\geq (A)+(B)+(C) \\ &= \int_a^b \left(h\frac{\partial L}{\partial y} - h\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + h\, {}_x^{RL}D_b^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^{C}D_x^{\alpha}[y]}\right]\right)\Big|_{y=y_0} dx \\ &= \int_a^b h\left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_x^{RL}D_b^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^{C}D_x^{\alpha}[y]}\right]\right](y_0)\, dx. \end{aligned}$$

Como y_0 es justamente solución de la ecuación de Euler-Lagrange (5.2) , resulta

$$J(y_0+h)-J(y_0)\geq 0.$$

Es decir, $J(y_0+h)\geq J(y_0)$, como queríamos probar.

Análogamente se prueba que y_0 maximiza J cuando L es cóncavo.

□

Observación 53 *Con el Teorema 29 pudimos obtener una condición suficiente de optimalidad para la ecuación de Euler-Lagrange C-RL (5.2). Para la ecuación de Euler-Lagrange C-C (5.3) por el momento no existen condiciones suficientes.*

A continuación presentaremos dos ejemplos de problemas variacionales, uno mixto y uno fraccionario sin la presencia de derivadas enteras. El objetivo de esto es presentar, en cada ejemplo, dos candidatos diferentes para ser solución de un mismo problema particular que sean obtenidos resolviendo las dos ecuaciones de Euler-Lagrange presentadas en la sección anterior.
En cada ejemplo, primero vamos a resolver el caso clásico y luego vamos a tratar el caso fraccionario.

5.2. Ejemplo 1

5.2.1. Caso clásico

El problema clásico consiste en hallar una función $y\in {}_0E_1'$ que maximice el funcional

$$J(y)=\int_0^1 \left(y'(x)-(y'(x))^2\right)dx,$$

sujeto a las condiciones de borde $y(0)=0$ e $y(1)=1$.

Aquí tenemos ${}_0E_1' = \{y : [0,1] \to \mathbb{R} : y \in C^2([0,1])\}$.

Para resolver esto, consideremos el siguiente lagrangiano

$$L(x, y, y') = y'(x) - (y'(x))^2. \tag{5.4}$$

Su ecuación de Euler-Lagrange dada en ecuación (2.2) es

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0,$$

esto es,

$$-\frac{d}{dx}\left(1 - 2y'(x)\right) = 0$$

es decir,

$$y''(x) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación y teniendo en cuenta que $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$, obtenemos la siguiente solución

$$y(x) = x. \tag{5.5}$$

5.2.2. Caso fraccionario

El problema fraccionario mixto consiste en hallar una función $y \in {}_0^{\alpha}E_1'$ que maximice el funcional

$$J(y) = \int_0^1 \left({}_0^C D_x^{\alpha}[y] - (y'(x))^2\right) dx, \tag{5.6}$$

sujeto a las condiciones de borde $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$.

Aquí tenemos ${}_0^{\alpha}E_1' = \{y : [0,1] \to \mathbb{R} : y \in C^1([0,1]),\ {}_0^C D_x^{\alpha}[y] \in C([0,1])\}$.

Para resolverlo consideremos el siguiente lagrangiano

$$L(x, y, y', {}_0^C D_x^{\alpha}[y]) = {}_0^C D_x^{\alpha}[y] - (y'(x))^2. \tag{5.7}$$

Como dijimos antes, vamos a resolver este problema utilizando los dos métodos, uno con la ecuación de Euler-Lagrange C-RL (5.2) y otra con la ecuación de Euler-Lagrange C-C (5.3).

Resolución mediante la ecuación C-RL

Aplicando la ecuación (5.2) sobre el lagrangiano (5.7), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_{x}^{RL}D_{1}^{\alpha}\left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_{0}^{C}D_{x}^{\alpha}[y]}\right] &= 0\\ -\frac{d}{dx}\left(-2y'(x)\right) + {}_{x}^{RL}D_{1}^{\alpha}[1] &= 0\\ 2y''(x) + {}_{x}^{RL}D_{1}^{\alpha}[1] &= 0.\end{aligned}$$

Utilizando la definición vista en el Ejemplo 5, tenemos

$${}_{x}^{RL}D_{1}^{\alpha}\left[(1-x)^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}(1-x)^{\beta-\alpha},$$

para $\beta = 0$ obtenemos

$$2y''(x) + \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(1-x)^{-\alpha} = 0, \tag{5.8}$$

es decir,

$$y''(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(1-x)^{-\alpha}.$$

Resolviendo esta ecuación y teniendo en cuenta que $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$, tenemos la siguiente solución

$$y_{RL1}(x) = -\frac{1}{2\Gamma(3-\alpha)}(1-x)^{2-\alpha} + \left(1 - \frac{1}{2\Gamma(3-\alpha)}\right)x + \frac{1}{2\Gamma(3-\alpha)}. \tag{5.9}$$

Observación 54 *Podemos notar que la solución (5.9) tiende a la solución clásica (5.5) cuando α tiende a 1. Esto significa que cuando $\alpha = 1$, recuperamos la solución del problema clásico asociado.*

Resolución mediante la ecuación C-C

Como el lagrangiano en (5.7), $L \in C^2([0,1] \times \mathbb{R}^3)$, podemos aplicar el Teorema 28. Luego, utilizando la ecuación (5.3), obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_{x}^{C}D_{1}^{\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial\, {}_{0}^{C}D_{x}^{\alpha}[y]}\right) = 0$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dx}\left(-2y'(x)\right) + {}_{x}^{C}D_{1}^{\alpha}\left[1\right] &= 0 \\
2y''(x) + {}_{x}^{C}D_{1}^{\alpha}\left[1\right] &= 0.
\end{aligned}
$$

Como vimos en Observación 26, ${}_{x}^{C}D_{1}^{\alpha}\left[c\right] = 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$, resulta

$$2y''(x) = 0 \tag{5.10}$$

es decir

$$y''(x) = 0 \tag{5.11}$$

Notemos que en este paso, la ecuación (5.10) es diferente de la ecuación (5.8), y éste es el motivo por el cual vamos a obtener dos soluciones distintas.
Resolviendo (5.11) y teniendo en cuenta que $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$, tenemos la siguiente solución

$$y_{C1}(x) = x. \tag{5.12}$$

Observación 55 *Podemos notar que la solución (5.12) es igual a la solución clásica (5.5) para todo valor de* $0 < \alpha \leq 1$. *Esto significa que cuando* $\alpha = 1$, *obviamente también recuperamos la solución del problema clásico asociado.*

5.2.3. Comparación entre los métodos

En esta sección vamos a mostrar algunas gráficas con el objetivo de comparar las soluciones obtenidas con los diferentes métodos. Las funciones utilizadas para las gráficas que vamos a mostrar a continuación se pueden ver en el Anexo en el Código 8.
La Figura 5.1 presenta la convergencia de ambas soluciones y_{RL1} (5.9) en la izquierda e y_{C1} (5.12) en la derecha, cuando tomamos límite cuando α tiende a 1. Podemos observar que ambas convergen a la solución clásica y (5.5), siendo la de y_{C1} obvia.

Observación 56 *Esta figura nos muestra la diferencia entre las formas de las soluciones obtenidas mediante los diferentes métodos. Podemos ver claramente cómo las figuras de las soluciones* y_{C1} *son exactamente la solución clásica en contraste con las formas de las soluciones* y_{RL1}.

La Figura 5.2 presenta una comparación entre ambas soluciones y_{RL1} (5.9) e y_{C1} (5.12), para diferentes valores de α.

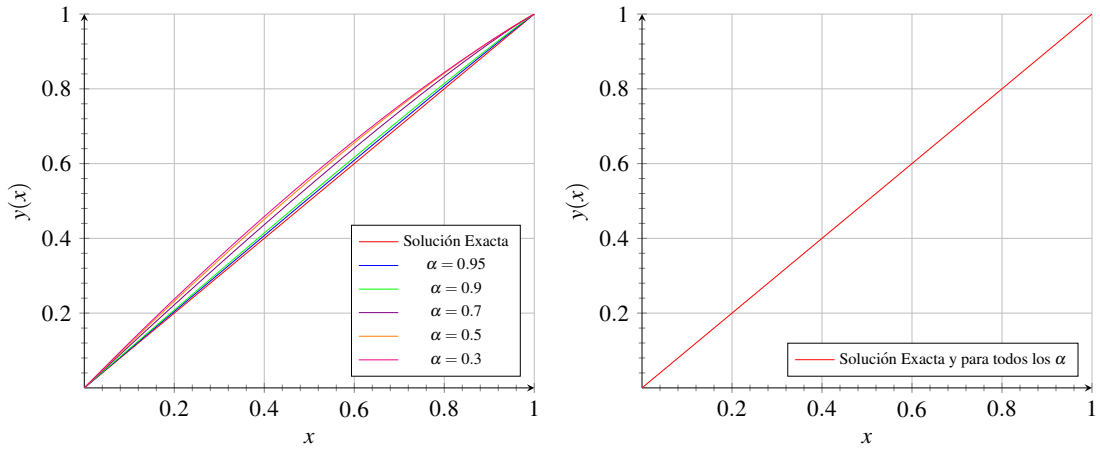


Figura 5.1: Convergencia de las soluciones y_{RL1} e y_{C1}.

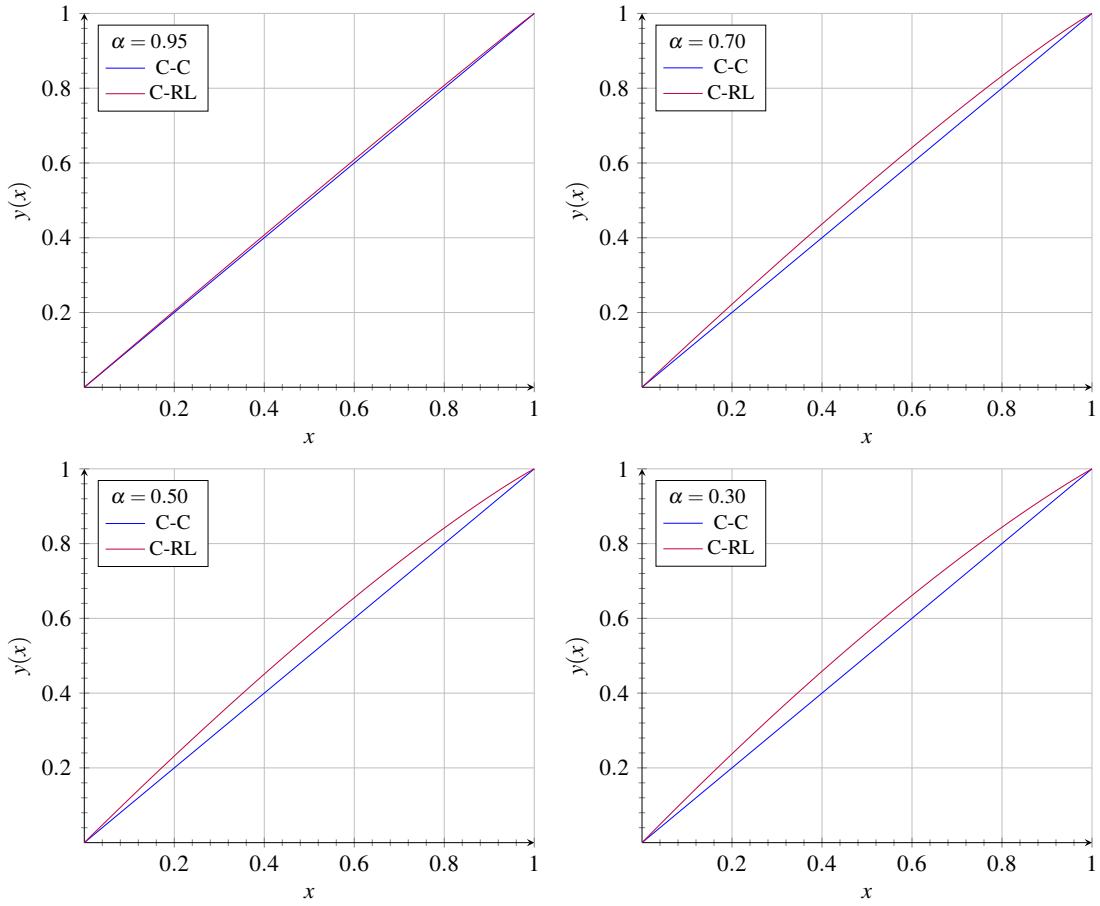


Figura 5.2: Comparación de las soluciones y_{RL1} e y_{C1}.

Observación 57 *Esta figura nos muestra que a medida que el valor de α disminuye, la diferencia entre las gráficas de ambos métodos aumenta.*

Por último, veamos qué sucede si intentamos aplicar el Teorema 29 sobre el lagrangiano $L(x, y, u, v) = v - u^2$. Tenemos,

$$\begin{aligned} L(x, y + y_1, u + u_1, v + v_1) - L(x, y, u, v) &= v + v_1 - (u + u_1)^2 = \\ &= v + v_1 - u^2 - 2uu_1 - u_1^2, \end{aligned}$$

no es comparable con

$$L_y(x, y, u, v)y_1 + L_u(x, y, u, v)u_1 + L_v(x, y, u, v)v_1 = -2uu_1 + v_1,$$

puesto que si $v > u^2 + u_1^2$ entonces L resulta convexa, y en caso contrario, cóncava, y como se debe mantener una misma desigualdad para todo (x, y, u, v), $(x, y + y_1, u + u_1, v + v_1) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^3$, podemos concluir que no podemos utilizar este teorema para determinar cual de los dos métodos es el óptimo.
Como el Teorema 29 no nos sirvió en este caso, calculemos los valores de las integrales tanto para las soluciones y_{RL1} como para las y_{C1} para diferentes valores de α.
La Tabla 5.1 presenta los valores obtenidos en cada caso. Para calcular los integrandos en (5.6), aproximamos la derivada fraccionaria de Caputo de y_{RL1}. Para esto, utilizamos el método L_1 visto en la sección 1.3.2 del Capítulo 1 y en la bibliografía [9, 36]. Para calcular las integrales, las aproximamos utilizando sumas de Riemann. Todo esto se puede ver en el Anexo en Código 8.

α	y_{RL1}	y_{C1}
1	0	0
0.95	-0.0215	-0.0235
0.9	-0.0457	-0.0457
0.7	-0.1326	-0.1432
0.5	-0.2301	-0.2478
0.3	-0.3312	-0.3526

Tabla 5.1: Valores obtenidos para las integrales evaluadas en y_{RL1} e y_{C1} del Ejemplo 1.

Observación 58 *En la Tabla 5.1 podemos observar que las soluciones y_{RL1} son las que*

maximizan el problema. Sin embargo, también podemos ver que no es mucha la diferencia entre ambos valores, sobre todo cuando los valores de α se aproximan a 1.

A continuación veremos el Ejemplo 2.

5.3. Ejemplo 2

5.3.1. Caso clásico

El problema clásico consiste en hallar una función $y \in {}_0E_1'$ que minimice el funcional

$$J(y) = \int_0^1 \Big((y'(x))^2 - 24\, y(x) \Big)\, dx,$$

sujeto a las condiciones de borde $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$.
Aquí tenemos ${}_0E_1' = \{y : [0,1] \to \mathbb{R} : y \in C^2([0,1])\}$.
Para resolver esto, consideremos el siguiente lagrangiano

$$L(x, y, y') = (y')^2 - 24\, y. \tag{5.13}$$

Su ecuación de Euler-Lagrange dada en ecuación (2.2) es

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0,$$

esto es,

$$-24 - \frac{d}{dx}\left(2y'(x)\right) = 0,$$

es decir

$$y''(x) = -12.$$

Resolviendo esta ecuación y teniendo en cuenta que $y(0) = y(1) = 0$, obtenemos la siguiente solución

$$y(x) = -6x^2 + 6x. \tag{5.14}$$

5.3.2. Caso fraccionario

El problema fraccionario consiste en hallar una función $y \in {}_0E_1^{\alpha}$ que minimice el funcional

$$J(y) = \int_0^1 \left(\left({}_0^C D_x^\alpha [y] \right)^2 - 24\, y(x) \right) dx, \tag{5.15}$$

sujeto a las condiciones de borde $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$.

Aquí tenemos ${}_0E_1^\alpha = \{y : [0,1] \to \mathbb{R} : y \in C^1([0,1]),\ {}_0^C D_x^\alpha [y] \in C([0,1])\}$.

Para resolverlo consideremos el siguiente lagrangiano

$$L(x, y, {}_0^C D_x^\alpha [y]) = {}_0^C D_x^\alpha [y]^2 - 24\, y. \tag{5.16}$$

Nuevamente, vamos a resolver este problema utilizando los dos métodos, uno con la ecuación de Euler-Lagrange C-RL (5.2) y otra con la ecuación de Euler-Lagrange C-C (5.3).

Resolución mediante la ecuación C-RL

Aplicando la ecuación (5.2) sobre el lagrangiano (5.16), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} + {}_x^{RL} D_1^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial\, {}_0^C D_x^\alpha [y]} \right) &= 0 \\ -24 + {}_x^{RL} D_1^\alpha \left(2\, {}_0^C D_x^\alpha [y] \right) &= 0 \\ {}_x^{RL} D_1^\alpha \left({}_0^C D_x^\alpha [y] \right) &= 12. \end{aligned}$$

Por definición,

$${}_x^{RL} D_1^\alpha \left[(1-x)^\beta \right] = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} (1-x)^{\beta-\alpha}$$

y la propiedad

$${}_x^{RL} D_1^\alpha \left[(1-x)^{\alpha-1} \right] = 0,$$

que hemos visto en la Observación 26, considerando $\beta = \alpha$ podemos concluir

$${}_0^C D_x^\alpha [y] = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)} (1-x)^\alpha + c_1 (1-x)^{\alpha-1} \tag{5.17}$$

donde $c_1 \in \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta la Proposición 1 item d), valen las siguientes igualdades

$$(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j) = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)},$$
$$(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - 1 - j) = \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha+1)},$$

y podemos escribir

$$\begin{aligned}(1-x)^{\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{x^n}{n!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-x)^{\alpha-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - 1 - j)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha+1)} \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Reemplazando esto en (5.17),

$${}_0^C D_x^{\alpha}[y] = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{x^n}{n!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha+1)} \frac{x^n}{n!}.$$

Considerando ${}_0^C D_x^{\alpha}\left[x^{\beta}\right] = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha}$ y la linealidad de la derivada de Caputo, obtenemos

$$\begin{aligned}y(x) =& \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \frac{x^{n+\alpha}}{n!} \\ &+ c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha+1)} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \frac{x^{n+\alpha}}{n!} + c_2\end{aligned}$$

pero esto es equivalente a

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)^2} x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+n+\alpha)} \frac{x^n}{n!} \\ &+ \frac{c_1}{\Gamma(1+\alpha)} x^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\alpha+1)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+n+\alpha)} \frac{x^n}{n!} + c_2,\end{aligned}$$

donde $c_2 \in \mathbb{R}$.

Usando la Definición 4 de función Hipergeométrica de parámetros a, b, c, podemos reescribir la solución como:

$$\begin{aligned} y(x) = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)^2} x^\alpha \ {}_2F_1(1, -\alpha, 1+\alpha, x) \\ + \frac{c_1}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha \ {}_2F_1(1, 1-\alpha, 1+\alpha, x) + c_2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $y(0) = y(1) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} y_{RL2}(x) = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)^2} x^\alpha \ {}_2F_1(1, -\alpha, 1+\alpha, x) \\ - \frac{6}{\Gamma(1+\alpha)^2} \frac{x^\alpha}{{}_2F_1(1, 1-\alpha, 1+\alpha, 1)} \ {}_2F_1(1, 1-\alpha, 1+\alpha, x). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Observación 59 *La solución (5.18) es válida sólo para* $0{,}5 < \alpha \leq 1$ *puesto que sino la solución tiende a infinito y entonces no satisface la condición terminal. Esto no significa que la solución no exista, sólo que no es posible encontrarla mediante este método de resolución.*

Observación 60 *Podemos notar que la solución (5.18) tiende a la solución clásica (5.14) cuando* α *tiende a 1. Esto significa que cuando* $\alpha = 1$*, recuperamos la solución del problema clásico asociado.*

Resolución mediante la ecuación C-C

Como el lagrangiano en (5.16), $L \in C^2([0,1] \times \mathbb{R}^2)$, podemos aplicar el Teorema 28. Luego, utilizando la ecuación (5.3), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} + {}_x^C D_1^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \, {}_0^C D_x^\alpha [y]} \right) &= 0 \\ -24 + {}_x^C D_1^\alpha \left(2 \, {}_0^C D_x^\alpha [y] \right) &= 0 \\ {}_x^C D_1^\alpha \left({}_0^C D_x^\alpha [y] \right) &= 12. \end{aligned}$$

Por definición,

$${}_x^C D_1^\alpha \left[(1-x)^\beta \right] = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} (1-x)^{\beta-\alpha}$$

y la Observación 26 que, a diferencia de la derivada de Riemann-Liouville,

$$ {}_x^C D_1^\alpha [d_1] = 0,$$

para cada $d_1 \in \mathbb{R}$, considerando $\beta = \alpha$ podemos concluir

$$ {}_0^C D_x^\alpha [y] \quad = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)}(1-x)^\alpha + d_1. \tag{5.19}$$

Notemos que en este paso, la ecuación es diferente de la ecuación (5.17), y éste es el motivo por el cual vamos a obtener dos soluciones distintas.
Ahora podemos escribir

$$\frac{12}{\Gamma(1+\alpha)}(1-x)^\alpha = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)}{n!} x^n.$$

Teniendo en cuenta la Propiedad 1 d) vale,

$$(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j) = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)},$$

y obtenemos

$$\frac{12}{\Gamma(1+\alpha)}(1-x)^\alpha = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{x^n}{n!}.$$

Reemplazando esto en (5.19),

$$ {}_0^C D_x^\alpha [y] \quad = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{x^n}{n!} + d_1.$$

Considerando ${}_0^C D_x^\alpha \left[x^\beta\right] = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha}$ y la linealidad de la derivada de Caputo, tenemos

$$y(x) = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n+\alpha)} \frac{x^{n+\alpha}}{n!} + d_1 x^\alpha + d_2,$$

donde $d_2 \in \mathbb{R}$.
Es decir,

$$y(x) = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)^2} x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+n+\alpha)} \frac{x^n}{n!} + d_1 x^\alpha + d_2.$$

Usando la Definición 4 de función Hipergeométrica de parámetros a, b, c, podemos reescribir la solución como

$$y(x) = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)^2} x^\alpha \ {}_2F_1(1, -\alpha, 1+\alpha, x) + d_1 x^\alpha + d_2.$$

Teniendo en cuenta que $y(0) = y(1) = 0$, obtenemos

$$y_{C2}(x) = \frac{12}{\Gamma(1+\alpha)^2} x^\alpha \ {}_2F_1(1, -\alpha, 1+\alpha, x) - \frac{6}{\Gamma(1+\alpha)^2} x^\alpha. \tag{5.20}$$

Observación 61 *A diferencia de y_{RL2} en (5.18), y_{C2} es válida para todo $0 < \alpha \leq 1$. Sin embargo, no podemos asegurar que sea mínimo del problema porque, por el momento, no existe un Teorema de Condiciones Suficientes para las ecuaciones de Euler-Lagrange C-C.*

Observación 62 *Podemos observar que la solución (5.20) tiende a la solución clásica (5.14) cuando α tiende a 1. Esto significa que, ambas soluciones de cada una de las ecuaciones de Euler-Lagrange, y_{RL2} e y_{C2}, tienden a la solución de la ecuación de Euler-Lagrange clásica cuando $\alpha = 1$.*

5.3.3. Comparación entre los métodos

En esta sección vamos a mostrar algunas gráficas con el objetivo de comparar las soluciones obtenidas con los diferentes métodos. Las funciones utilizadas para las gráficas que vamos a mostrar a continuación se pueden ver en el Anexo en el Código 9.
La Figura 5.3 presenta la convergencia de ambas soluciones y_{RL2} (5.18) en la izquierda e y_{C2} (5.20) en la derecha, cuando tomamos límite cuando α tiende a 1. Podemos observar que ambas convergen a la solución clásica y (5.14).

Observación 63 *Esta figura nos muestra la diferencia entre las formas de las soluciones obtenidas mediante los diferentes métodos. Podemos ver claramente cómo las figuras de las soluciones y_{C2} son más parecidas a la forma de la solución clásica en contraste con las formas de las soluciones y_{RL2}.*

La Figura 5.4 presenta una comparación entre ambas soluciones y_{RL2} (5.18) e y_{C2} (5.20), para diferentes valores de α.

Observación 64 *En esta figura podemos ver cómo la diferencia entre las formas de ambas soluciones se vuelve más notable a medida que α se aproxima a 0.5, donde la solución y_{RL} encontrada diverge como hemos visto en Observación 59.*

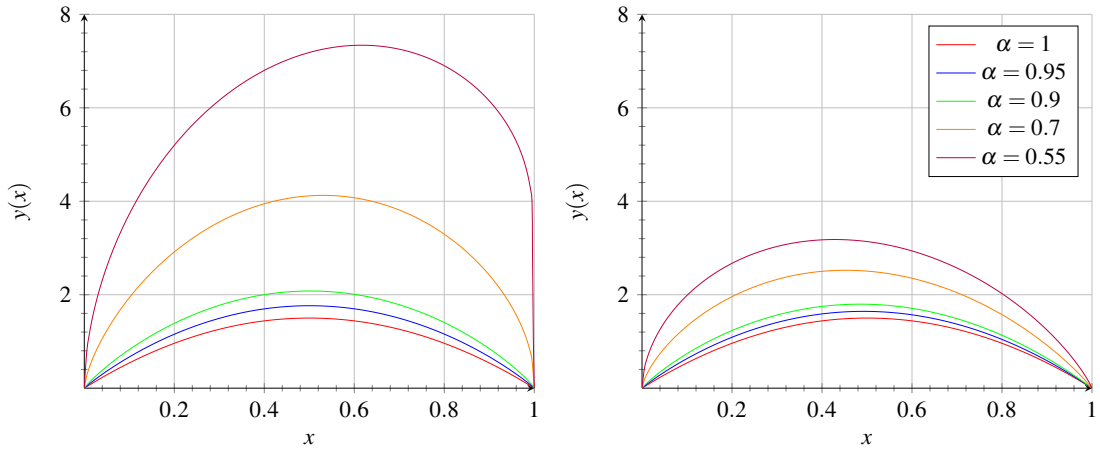


Figura 5.3: Convergencia de las soluciones y_{RL2} e y_{C2}.

La Figura 5.5 presenta la solución y_{C2} (5.20) para $\alpha = 0{,}4$.

Observación 65 *Mientras que la ecuación de Euler-Lagrage C-RL no nos brinda fácilmente soluciones para los casos* $0 < \alpha \leq 0{,}5$*, la ecuación C-C sí lo hace.*

Ahora, veamos qué sucede si intentamos aplicar el Teorema 29 sobre $L(x, y, u) = u^2 - 24y$. Tenemos,

$$\begin{aligned} L(x, y + y_1, u + u_1) - \quad & L(x, y, u) = (u + u_1)^2 - 24(y + y_1) - u^2 + 24y \\ & = u^2 + 2uu_1 + u_1^2 - 24y - 24y_1 - u^2 + 24y \\ & = u_1^2 + 2uu_1 - 24y_1 \\ & \geq -24y_1 + 2uu_1 = \partial_2 L(x, y, u)y_1 + \partial_3 L(x, y, u)u_1, \end{aligned}$$

se verifica para todo $(x, y, u), (x, y + y_1, u + u_1) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$. Aplicando el Teorema 29, dado que L es convexa, podemos concluir que y_{RL2} minimiza al problema para $0{,}5 < \alpha \leq 1$ (que es donde conocemos las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange).

Observación 66 *Podemos observar que el Teorema 29 sólo funciona para funciones y que satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange C-RL, pero además las funciones deben satisfacer las condiciones de borde. En el caso de no satisfacerlas (esto sería en el caso en que* $0 < \alpha < 0{,}5$*), el teorema no funciona.*

Por último, para verificar, calculemos los valores de las integrales para las soluciones y_{RL2} y las y_{C2} para diferentes valores de α.

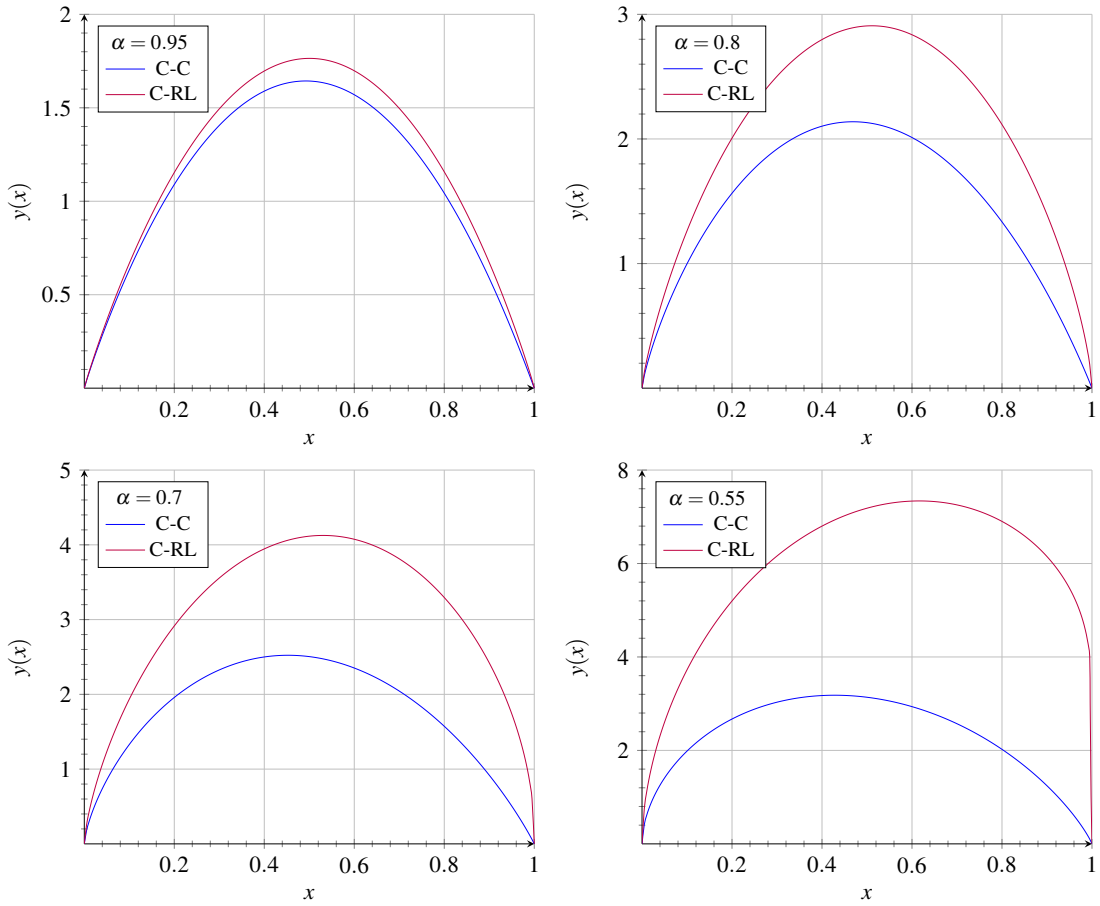


Figura 5.4: Comparación de las soluciones y_{RL2} e y_{C2}.

La Tabla 5.2 presenta los valores obtenidos en cada caso. Para calcular los integrandos en (5.15), aproximamos la derivada fraccionaria de Caputo de ambas funciones y_{C2} e y_{RL2}. Para esto, utilizamos un método de tipo L_1 visto en la sección 1.3.2 del Capítulo 1 y en la bibliografía [9, 36]. Luego, para calcular las integrales, las aproximamos utilizando sumas de Riemann. Todo esto se puede ver en el Anexo en Código 9.

Observación 67 *En la Tabla 5.2 podemos observar que a medida que nos acercamos a* $\alpha = 0{,}5$*, la diferencia entre los valores es cada vez mayor, siendo el mínimo la solución de la ecuación C-RL. Para los valores* $0 < \alpha \leq 0{,}5$ *obviamente sólo tenemos la solución obtenida mediante la ecuación C-C, puesto que es la única que verifica las condiciones de borde.*

Observación 68 *No pudimos determinar realmente qué soluciones son las óptimas puesto que pudimos encontrarlas sólo para* $0{,}5 < \alpha \leq 1$*. Por este motivo, nos vemos en la necesidad de introducir otro método de resolución de problemas variacionales mixtos.*

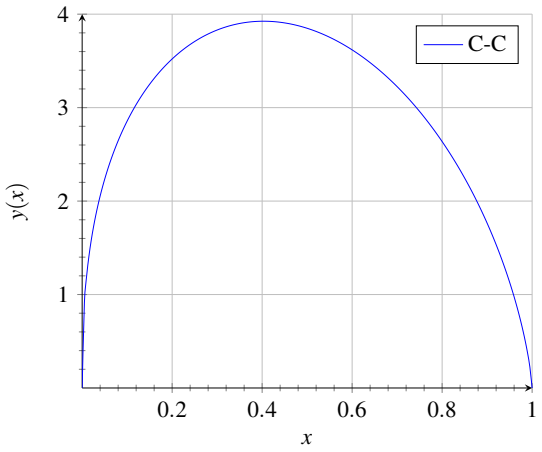


Figura 5.5: Solución y_{C2} para α =0.4.

α	y_{RL2}	y_{C2}
1	-12.1752	-12.1752
0.95	-14.5035	-14.3133
0.9	-17.3685	-16.7006
0.8	-25.2957	-22.2567
0.7	-37.2794	-28.9016
0.55	-58.1234	-40.9804
0.4	-	-55.5863

Tabla 5.2: Valores obtenidos para las integrales evaluadas en y_{RL2} e y_{C2} del Ejemplo 2.

A continuación veremos un nuevo método numérico que sirve para aproximar las soluciones de problemas variacionales mixtos, con la ventaja de que no utilizará ninguna ecuación de Euler-Lagrange durante su desarrollo.

5.4. Método numérico de tipo L_1

En esta sección obtendremos un nuevo método numérico directo para problemas variacionales fraccionarios mixtos, es decir con presencia de derivada clásica y fraccionaria. Recordemos que este tipo de problemas los vimos en la sección 2.3 del Capítulo 1 y los repasamos al comienzo de este Capítulo en la Definición 18. Éstos consisten en hallar

funciones $y \in {}_a^{\alpha}E'_b$, tal que maximicen o minimicen el siguiente funcional

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y', {}_a^C D_x^{\alpha}[y])\, dx \tag{5.21}$$

y que estén sujetas a las condiciones de borde $y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b$.

Se considera $\alpha \in (0, 1)$ y

$${}_a^{\alpha}E'_b = \{y : [a, b] \to \mathbb{R} / y \in C^1([a, b]),\ {}_a^C D_x^{\alpha}[y] \in C([a, b])\}.$$

Como mencionamos anteriormente, los problemas variacionales fraccionarios (2.3) son un caso particular de los problemas variacionales mixtos (5.21), por eso en esta sección sólo trabajaremos con estos últimos.

Siguiendo la estrategia utilizada en [24], la idea del método consiste en discretizar sobre una malla en un intervalo de tiempo deseado, usar diferencias finitas para la derivada clásica, utilizar el método L_1 visto en la sección 1.3.2 del Capítulo 1 para las derivadas fraccionarias, y una regla de cuadratura para la integral. Este procedimiento reduce al problema variacional, de un problema continuo de optimización dinámica, a la optimización estática de múltiples variables.

Por este motivo decimos que este método es de tipo directo. Un método numérico para problemas variacionales se dice directo cuando no utiliza la ecuación de Euler-Lagrange durante su desarrollo. En contraste, un método se dice indirecto cuando primero usa la ecuación de Euler-Lagrange, para luego aplicar algún método numérico sobre la ecuación resultante. Esta última técnica fue la que utilizamos a lo largo de esta tesis, por este motivo nos vimos en la necesidad de crear el método directo de tipo L_1 para problemas variacionales mixtos.

Ahora si procederemos a la obtención del método, ver [11].

Primero vamos a discretizar el funcional J dado en la ecuación (5.21) usando una regla de cuadratura en un mallado $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ con $x_{i+1} = x_i + h$ para todo $i = 0, ..., n-1$, siendo $h = \frac{b-a}{n}$ el tamaño del paso.

El objetivo es hallar los valores $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ de la función desconocida y en los puntos x_i con $i = 1, ..., n-1$. Los valores y_0 e y_n están dados por las condiciones de borde. Aplicando

la regla de cuadratura tenemos,

$$\begin{aligned} J(y) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} L(x, y, y', {}_a^C D_x^\alpha[y])\, dx \\ &\cong \sum_{i=1}^{n} hL\left(x_i, y_i, y_i', {}_a^C D_{x_i}^\alpha[y]\right). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Aproximando la derivada clásica usando diferencias finitas hacia atrás, y la derivada fraccionaria de Caputo utilizando el método L_1, visto en la sección 1.3.2 del Capítulo 1, se obtiene,

$$J(y) \cong \sum_{i=1}^{n} hL\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \sum_{k=0}^{i-1} b_{i-k-1}(y(x_{k+1}) - y(x_k))\right), \tag{5.23}$$

donde los coeficientes

$$b_k = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}[(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}]. \tag{5.24}$$

El lado derecho de la ecuación (5.23) puede ser considerado como una función Ψ de $n-1$ valores desconocidos $y = (y_1, y_2, ..., y_{n-1})$,

$$\Psi(y_1, ..., y_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} hL\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \sum_{k=0}^{i-1} b_{i-k-1}(y_{k+1} - y_k)\right). \tag{5.25}$$

Para hallar un extremo de Ψ, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones algebraico,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_i} = 0 \quad i = 1, ..., n-1. \tag{5.26}$$

Observación 69 *En el teorema enunciado a continuación denotaremos*

$$[i] = \left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \sum_{k=0}^{i-1} b_{i-k-1}(y_{k+1} - y_k)\right).$$

Teorema 30 *El método de tipo L_1 para un problema variacional mixto de la forma (5.21) es equivalente a la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria (5.2),*

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + {}_x^{RL} D_b^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial\, {}_a^C D_x^\alpha[y]}\right] = 0 \tag{5.27}$$

cuando el paso del mallado h tiende a cero.

Demostración: Sea $(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ un mínimo de Ψ, consideremos $\eta \in C[a,b]$ con $\eta(a) = \eta(b) = 0$ y definimos $\eta_i = \eta(x_i)$ para i=0,...,n.

Observemos que $\eta_0 = \eta_1 = 0$ y que $(y_1 + \epsilon\eta_1, ..., y_{n-1} + \epsilon\eta_{n-1})$ es una variación de $(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$, con $|\epsilon| < r$ para $r > 0$ fijo. Así, como $(y_1, y_2, ..., y_{n-1})$ es un optimizador de Ψ, utilizando la expansión de Taylor obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Psi(y_1 + \epsilon\eta_1, ..., y_{n-1} + \epsilon\eta_{n-1}) - \Psi(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \\ &= \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i \tfrac{\partial \Psi}{\partial y_i}[i] + o(\epsilon^2) \\ &= \epsilon \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i h \left[\tfrac{\partial L}{\partial y}[i] - \frac{\frac{\partial L}{\partial y'}[i+1] - \frac{\partial L}{\partial y'}[i]}{h} + b_0 \tfrac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y]}[i] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=i+1}^{n} (b_{k-i} - b_{k-i-1}) \tfrac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y]}[k] \right] + o(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Dividiendo por ϵ, tomándolo positivo y negativo, como las funciones η_i fueron elegidas arbitrariamente, resulta que la expresión entre corchetes debe ser cero para todo $i = 1, ..., n-1$, esto es

$$\tfrac{\partial L}{\partial y}[i] - \frac{\frac{\partial L}{\partial y'}[i+1] - \frac{\partial L}{\partial y'}[i]}{h} + b_0 \tfrac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y]}[i] + \sum_{k=i+1}^{n} (b_{k-i} - b_{k-i-1}) \tfrac{\partial L}{\partial {}_a^C D_x^\alpha [y]}[k] = 0 \tag{5.29}$$

Ahora estudiemos el caso cuando h tiende a cero, es decir $n = \frac{b-a}{h}$ tiende a infinito.

Sea $\bar{x} \in (a,b)$ e $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x_{i-1} < \bar{x} \leq x_i$. Primero observemos que, en este caso, también tenemos $i \to \infty$ y $n - i \to \infty$. En efecto, sea $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $a + (i-1)h < \bar{x} \leq a + ih$. Entonces tenemos, por un lado $i \geq \frac{\bar{x}-a}{h} = \frac{n(\bar{x}-a)}{b-a}$ lo que hace que tienda a infinito, por otro lado tenemos que como $i < \frac{\bar{x}-a}{h} + 1 = \frac{n(\bar{x}-a)}{b-a} + 1$ resulta $n - i > \frac{n(b-\bar{x})}{b-a} - 1$, lo que hace que también tienda a infinito.

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} x_i = \bar{x}.$$

Supongamos que existe una función $\bar{y} \in C^1[a,b]$ que verifica,

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N_1, \, \forall n \geq N_1 : \, |y_i - \bar{y}(x_i)| < \epsilon \, \forall i = 1, ..., n-1 \tag{5.30}$$

y

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N_2, \, \forall n \geq N_2 : \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \bar{y}'(x_i) \right| < \epsilon \, \forall i = 1, ..., n-1. \tag{5.31}$$

Como $\bar{y}$ e $\bar{y}'$ son uniformemente continuas, tenemos

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N_3, \, \forall n \geq N_1 : \, |y_i - \bar{y}(\bar{x})| < \epsilon \, \forall i = 1, ..., n-1$$

y

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N_2, \, \forall n \geq N_4 : \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \bar{y}'(\bar{x}) \right| < \epsilon \, \forall i = 1, ..., n-1.$$

Con las suposiciones sobre la continuidad de $\bar{y}$ podemos deducir,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\partial L}{\partial y}[i] = \frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{y}'(\bar{x}), \, {}_a^C D_{\bar{x}}^{\alpha}[\bar{y}]), \tag{5.32}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\partial L}{\partial y'}[i] - \frac{\partial L}{\partial y'}[i-1]}{h} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'}(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{y}'(\bar{x}), \, {}_a^C D_{\bar{x}}^{\alpha}[\bar{y}]) \right) \tag{5.33}$$

y

$$\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} b_0 \tfrac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}[i] + \sum_{k=i+1}^{n} (b_{k-i} - b_{k-i-1}) \tfrac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}[k] = \\ &= {}_x^{RL} D_b^{\alpha} \left[\frac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]} \right] (\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}), \bar{y}'(\bar{x}), \, {}_a^C D_{\bar{x}}^{\alpha}[\bar{y}]). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Observemos que (5.34) es válido puesto que si consideramos el método L_1 para la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville por derecha presentado en la Sección 1.3.2 en la ecuación (1,16), tenemos que

$$\begin{aligned} b_0 \tfrac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}[i] + \sum_{k=i+1}^{n} (b_{k-i} - b_{k-i-1}) \tfrac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}[k] &= \\ b_0 \tfrac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}[i] + \sum_{k=i+1}^{n-1} (b_{k-i} - b_{k-i-1}) \tfrac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}[k] - b_{n-i-1} \tfrac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}[n] + b_{n-i} \tfrac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]}[n] &= \\ {}_{x_i}^{RL} D_b^{\alpha} \left[\tfrac{\partial L}{\partial \, {}_a^C D_x^{\alpha}[y]} \right] &. \end{aligned}$$

Si y solamente si $b_{n-i} = \frac{(x_n - x_i)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$. Veamos esto último entonces

$$\begin{aligned} b_{n-i} &= \frac{(n-i+1)^{1-\alpha} - (n-i)^{1-\alpha}}{h} \tfrac{h^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\ &= \frac{h^{1-\alpha}(n-i+1)^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}(n-i)^{1-\alpha}}{h} \tfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \\ &= \frac{(x_n - x_{i-1})^{1-\alpha} - (x_n - x_i)^{1-\alpha}}{h} \tfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \end{aligned}$$

Definimos $u(s) = (x_n - s)^{1-\alpha}$ diferenciable con continuidad para todo $s \in \mathbb{R}$, $s \neq x_n$.

Con esto resulta,

$$\frac{(x_n - x_{i-1})^{1-\alpha} - (x_n - x_i)^{1-\alpha}}{h} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} = \frac{u(x_{i-1}) - u(x_{i-1}+h)}{h} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}$$

Utilizando el Teorema del valor medio, existe $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ de modo que $u(x_{i-1}) - u(x_{i-1}+h) = u'(\xi)h$, obteniendo

$$\frac{u(x_{i-1}) - u(x_{i-1}+h)}{h} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} = \frac{(1-\alpha)(x_n - \xi)^{-\alpha}}{h} h \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{(x_n - \xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Que cuando h tiende a cero, resulta $\dfrac{(x_n - x_i)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ como queríamos.

Finalmente, por Teorema 9 obtenemos la ecuación (5.34).

Así, de las ecuaciones (5.32), (5.33) y (5.34) obtenemos la conclusión del teorema. □

Observación 70 *Cuando se escribe equivalente en el teorema anterior, se refiere en sentido del Teorema 3.6 de [24]. Debido a la suposición de la existencia de una función $\bar{y} \in C^1[a,b]$ que verifica (5.30) y (5.31), decimos que es un Teorema de convergencia débil quedando como trabajo a futuro la prueba de la convergencia fuerte.*

Observación 71 *A partir del Teorema 30 podemos observar que el método numérico de tipo L_1 si bien no depende de las ecuaciones de Euler-Lagrange para su desarrollo, por ser de tipo directo, igualmente converge a la solución de la ecuación de Euler-Lagrange C-RL (5.2).*

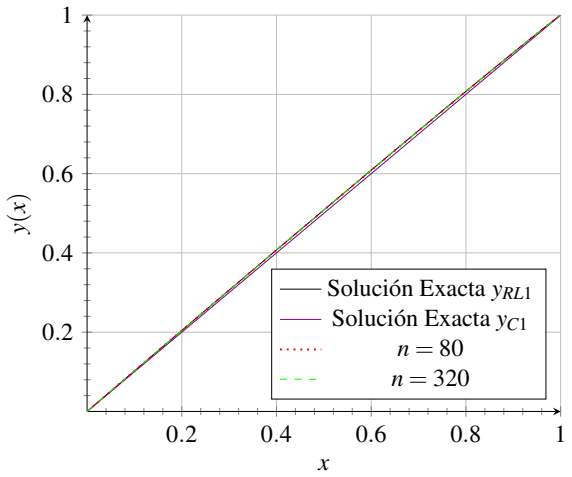
A continuación vamos a ver cómo funciona este método numérico en los ejemplos de la sección 5.2 y la sección 5.3.

5.4.1. Ejemplo 1

Recuperamos el ejemplo 1 de la sección 5.2 , el problema variacional mixto (5.6)

$$J(y) = \int_0^1 \left({}_0^C D_x^\alpha [y] - (y'(x))^2 \right) dx, \tag{5.35}$$

sujeto a las condiciones de borde $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$.



Pasos	Error	Tiempo de Proces.
20	$1{,}230e^{-03}$	$4{,}925e^{-04}$ seg
40	$7{,}467e^{-04}$	$1{,}170e^{-03}$ seg
80	$4{,}401e^{-04}$	$2{,}725e^{-03}$ seg
160	$2{,}532e^{-04}$	$8{,}178e^{-03}$ seg
320	$1{,}429e^{-04}$	$2{,}752e^{-02}$ seg
640	$7{,}952e^{-05}$	$1{,}103e^{-01}$ seg

Figura 5.6: Aproximación para el Ejemplo 1 con α =0.95.

Vamos a aplicar el método numérico de tipo L_1. Este problema se reduce numéricamente a resolver $Ay = B$, donde

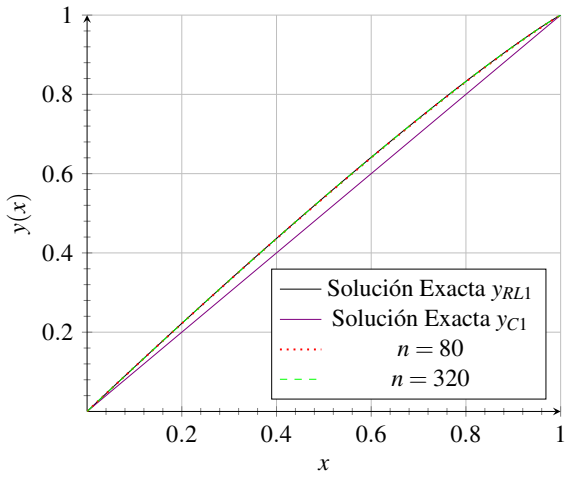
$$A_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j < i-1 \,\text{o}\, j > i+1 \\ 2 & \text{si} \quad j = i-1 \,\text{o}\, j = i+1 \\ -4 & \text{si} \qquad\quad j = i, \end{cases} \tag{5.36}$$

$$B_i = -h^2 b_{n-i-2}, \tag{5.37}$$

siendo $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^{n-1}$, $B = (B_i)_{i=1}^{n-1}$ y los coeficientes b_k son los de la ecuación (5.24) para todo $k \in \mathbb{N}$.

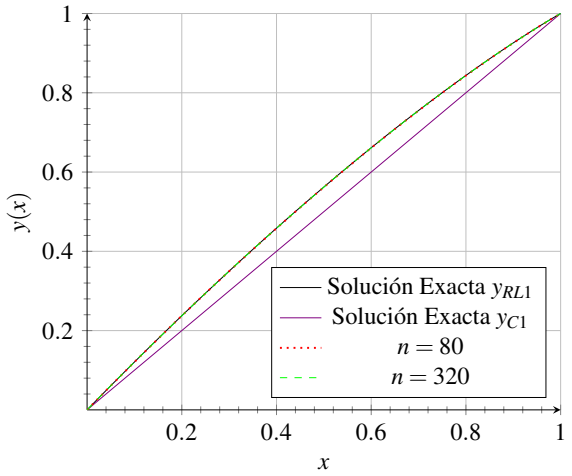
A continuación se presentan gráficas y tablas donde se muestra la aplicación del método en el ejemplo dado para diferentes valores de α y su comparación con las soluciones y_{RL1} (5.9) e y_{C1} (5.12). Dicho método se puede ver en el Anexo en Código 8.

En las gráficas se observan aproximaciones para diferentes cantidades de pasos y las soluciones exactas, en las tablas se observan la cantidad de pasos utilizados, los errores calculados mediante la norma infinito y el tiempo de procesamiento utilizado.



Pasos	Error	Tiempo de Proces.
20	$3{,}291e^{-03}$	$6{,}909e^{-04}$ seg
40	$1{,}859e^{-03}$	$1{,}198e^{-03}$ seg
80	$1{,}022e^{-03}$	$2{,}731e^{-03}$ seg
160	$5{,}497e^{-04}$	$7{,}567e^{-03}$ seg
320	$2{,}911e^{-04}$	$2{,}629e^{-02}$ seg
640	$1{,}521e^{-04}$	$1{,}063e^{-01}$ seg

Figura 5.7: Aproximación para el Ejemplo 1 con α =0.70.



Pasos	Error	Tiempo de Proces.
20	$1{,}543e^{-03}$	$5{,}226e^{-04}$ seg
40	$8{,}153e^{-04}$	$1{,}009e^{-03}$ seg
80	$4{,}221e^{-04}$	$2{,}3148e^{-03}$ seg
160	$2{,}159e^{-04}$	$7{,}822e^{-03}$ seg
320	$1{,}095e^{-05}$	$2{,}528e^{-02}$ seg
640	$5{,}525e^{-05}$	$1{,}074e^{-01}$ seg

Figura 5.8: Aproximación para el Ejemplo 1 con α =0.30.

En Figura 5.6, Figura 5.7 y Figura 5.8, se observa que a medida que la cantidad de pasos aumenta, el error de la aproximación disminuye. También se puede ver que cuando α se aproxima a 1, las gráficas son más similares a la gráfica de la solución exacta. Con

respecto a lo numérico, los errores son bajos y los tiempos de procesamiento también, lo que lo hacen un método rápido.

Por último, y lo más importante que debemos destacar, es que se cumple lo dicho en la Observación 71, las soluciones aproximadas tienden a las soluciones y_{RL1}. Podemos concluir, para el ejemplo 1, que si bien el Teorema de Condiciones Suficientes (Teorema 29) no se cumplía y los cálculos fueron más sencillos con la ecuación de Euler-Lagrange C-C (5.3), debido al método directo de tipo L_1, las soluciones óptimas son las y_{RL1} (5.9) obtenidas mediante la ecuación de Euler-Lagrange C-RL (5.2).

A continuación veamos que sucede con el siguiente ejemplo.

5.4.2. Ejemplo 2

Recuperamos el ejemplo 2 de la sección 5.3, el problema variacional mixto (5.15)

$$J(y) = \int_0^1 \left(\left({}_0^C D_x^\alpha [y] \right)^2 - 24\, y(x) \right) dx, \tag{5.38}$$

sujeto a las condiciones de borde $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$.

Vamos a aplicar el método numérico de tipo L_1. Este problema se reduce numéricamente a resolver $Ay = B$, donde

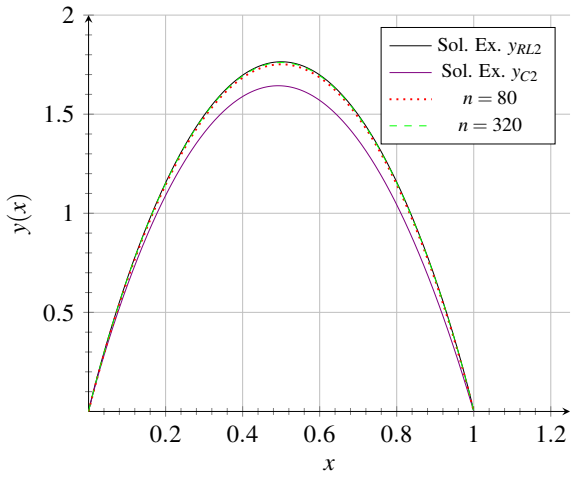
$$A_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=d}^{n-i+d-1} (b_k - b_{k-1})(b_{k-d} - b_{k-d-1}) & \text{si} \quad j = i - d \\ \sum_{k=0}^{n-i-e-1} (b_k - b_{k-1})(b_{k+e} - b_{k+e-1}) & \text{si} \quad j = i + e, \end{cases} \tag{5.39}$$

$$B_i = -h^2 b_{n-i-2}, \tag{5.40}$$

siendo $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^{n-1}$, $B = (B_i)_{i=1}^{n-1}$, d y e enteros tales que $0 \leq d \leq i$, $0 < e \leq n - i$ y los coeficientes b_k son los definidos en la ecuación (5.24) para todo $k \in \mathbb{N}$ y $b_{-1} = 0$.

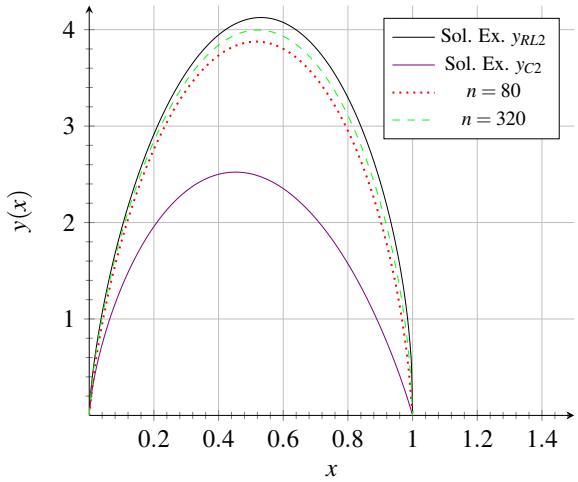
A continuación se presentan gráficas y tablas donde se muestra la aplicación del método en el ejemplo dado para diferentes valores de α y su comparación con las soluciones y_{RL2} (5.18) e y_{C2} (5.20). Dicho método se puede ver en el Anexo en Código 9.

En las gráficas se observan aproximaciones para diferentes cantidades de pasos y las soluciones exactas, en las tablas se observan la cantidad de pasos utilizados, los errores calculados mediante la norma infinito y el tiempo de procesamiento utilizado.



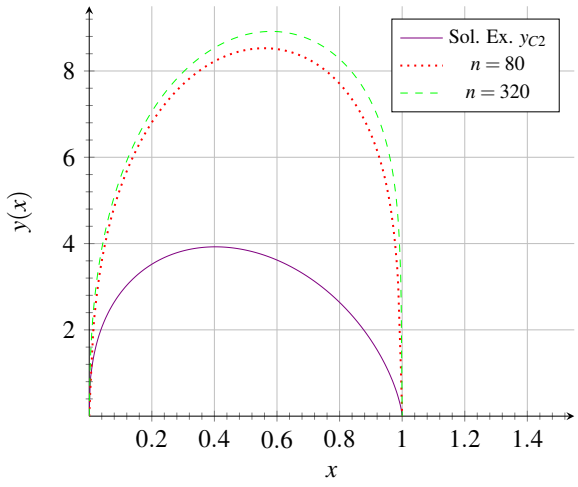
Pasos	Error	Tiempo de Proces.
20	$3{,}9e^{-02}$	$8{,}851e^{-03}$ seg
40	$2{,}254e^{-02}$	$1{,}694e^{-02}$ seg
80	$1{,}281e^{-02}$	$4{,}185e^{-02}$ seg
160	$7{,}192e^{-03}$	$1{,}705e^{-01}$ seg
320	$4{,}009e^{-03}$	$7{,}949e^{-01}$ seg
640	$2{,}223e^{-03}$	5,368 seg

Figura 5.9: Aproximación para el Ejemplo 2 con α =0.95.



Pasos	Error	Tiempo de Proces.
20	$7{,}199e^{-01}$	$7{,}185e^{-03}$ seg
40	$5{,}561e^{-01}$	$1{,}471e^{-02}$ seg
80	$4{,}317e^{-01}$	$4{,}499e^{-02}$ seg
160	$3{,}337e^{-01}$	$1{,}668e^{-01}$ seg
320	$2{,}573e^{-01}$	$7{,}841e^{-01}$ seg
640	$1{,}981e^{-01}$	5,409 seg

Figura 5.10: Aproximación para el Ejemplo 2 con α =0.70.



Pasos	Error	Tiempo de Proces.
20	∞	$5{,}946e^{-03}$ seg
40	∞	$1{,}808e^{-02}$ seg
80	∞	$4{,}46e^{-02}$ seg
160	∞	$1{,}489e^{-01}$ seg
320	∞	$7{,}721e^{-01}$ seg
640	∞	5,26 seg

Figura 5.11: Aproximación para el Ejemplo 2 con α =0.40.

En Figura 5.9 y Figura 5.10, se observa que a medida que la cantidad de pasos aumenta, el error de la aproximación disminuye, a diferencia de Figura 5.11 donde sabíamos que la solución exacta que habíamos obtenido no convergía puesto que $\alpha = 0{,}4 < 0{,}5$. También se puede ver que cuando α se aproxima a 1, las gráficas son más similares a la gráfica de la solución exacta. Con respecto a lo numérico, los errores no son tan bajos como en el Ejemplo 1 y los tiempos de procesamiento también son bajos, lo que lo hacen un método rápido.

Por último, y lo más importante es que podemos notar nuevamente lo dicho en la observación 71, las soluciones aproximadas tienden a las soluciones y_{RL2}, viendo en las gráficas como se alejan de las soluciones y_{C2}. Podemos concluir, para el ejemplo 2, que si bien el Teorema de Condiciones Suficientes (Teorema 29) no se cumplía para los valores $0 < \alpha \leq 0{,}5$ y si bien pudimos obtener una solución y_{C2} para todos los valores de α mediante la ecuación de Euler-Lagrange C-C (5.3), debido al método directo de tipo L_1, las soluciones óptimas son las que deberíamos obtener mediante la ecuación de Euler-Lagrange C-RL (5.2). Sin embargo, a pesar de esto, las soluciones y_{C2} mantienen la misma forma que las soluciones óptimas y, a diferencia del caso de la ecuación de Euler-Lagrange C-RL que no pudimos obtener ninguna solución para $0 < \alpha \leq 0{,}5$, en estos casos sí las pudimos obtener.

5.5. Conclusiones del Capítulo

En este capítulo hemos estudiado dos teoremas de condiciones necesarias para resolver problemas variacionales fraccionarios: una ecuación de Euler-Lagrange que involucra derivadas fraccionarias de Caputo y Riemann-Liouville (C-RL), y otra ecuación de Euler-Lagrange donde sólo aparecen derivadas de Caputo (C-C).

Con el objetivo de realizar una comparación entre ambas condiciones, hemos presentado dos ejemplos, un problema variacional mixto, y un problema variacional fraccionario, y un nuevo método numérico directo, es decir que no depende de ninguna ecuación de Euler-Lagrange, para la resolución de los mismos.

Obtuvimos varias conclusiones:

En el primer ejemplo, al resolverlo mediante ambos métodos, obtuvimos dos soluciones diferentes para un mismo valor de α. Si bien el Teorema de Condiciones Suficientes de la ecuación de Euler-Lagrange C-RL (Teorema 29) no fue concluyente en este caso, mediante el nuevo método numérico de tipo L_1 que hemos propuesto, pudimos observar que la solución óptima era la y_{RL1} brindada por la ecuación de Euler-Lagrange C-RL.

En el segundo ejemplo, pasó algo similar, al resolverlo mediante ambos métodos, también obtuvimos dos soluciones diferentes para un mismo valor de α. Para $0{,}5 < \alpha \leq 1$, pudimos verificar que el mínimo del problema se consiguió de la solución de la ecuación de Euler-Lagrange C-RL (y_{RL2}), así como sugería el Teorema 29. Ahora, para $0 < \alpha \leq 0{,}5$ la ecuación C-RL no nos proveyó una solución, es decir la ecuación brindada por el momento no se puede resolver, mientras que la ecuación de Euler-Lagrange C-C sí lo hizo. Sin embargo, nos preguntamos, ¿podemos asegurar que la solución de la ecuación C-C (y_{C2}) es la solución optimal del problema al menos para estos valores de α? La respuesta a esta pregunta es NO. A pesar de que en [13, 35] se mostró que la función y_{C2} es una solución crítica para el problema, y de que también hemos visto que gráficamente sus formas para cada valor de α son más similares a la forma de la solución clásica, aún así no podemos asegurar que y_{C2} es una solución optimal ni siquiera para los casos en que $0 < \alpha \leq 0{,}5$. Si existiera un Teorema de Condiciones Suficientes para las ecuaciones C-C, nuestro ejemplo no lo verificaría, porque si lo hiciera, este teorema entraría en contradicción con el Teorema de Condiciones Suficientes para las ecuaciones C-RL (Teorema 29). Esto significa que las condiciones de convexidad sobre el lagrangiano no alcanzan para obtener condiciones suficientes para las ecuaciones C-C. Luego, si existieran otras condiciones y dicho teorema existiera, para no contradecir al Teorema 29, este teorema debería depender de los valores de α. Por otro lado, podemos observar que cuando $\alpha = 1$, y_{C2} es la solución

clásica y es la mínima del problema, pero cuando α decrece, por ejemplo para $0{,}5 < \alpha < 1$, estas soluciones no son mínimas, puesto que las soluciones y_{RL2} lo son. Podemos decir que este comportamiento es una discontinuidad de las soluciones y_{C2} cuando α tiende a 1. Entonces, ¿por qué y_{C2} serían soluciones mínimas cuando $0 < \alpha < 0{,}5$? Si fueran soluciones mínimas, existiría otra discontinuidad de estas soluciones con respecto a α. Por último, cuando aplicamos el método numérico de tipo L_1 pudimos observar que éste convergía a soluciones que efectivamente no eran y_{C2}, sin embargo y_{C2} mantenían una forma similar a las soluciones aproximadas.

En conclusión, si bien trabajar con las ecuaciones de Euler-Lagrange C-C hace que los cálculos sean más sencillos, muchas veces tenemos que tener cuidado con respecto a la implementación de este método puesto que las ecuaciones de Euler-Lagrange C-RL son las que verdaderamente nos darán la solución optimal. Quizás convendría resolver los problemas variacionales mixtos mediante la aproximación de sus soluciones con el método numérico de tipo L_1, que no utiliza en su desarrollo ninguna ecuación de Euler-Lagrange, sin embargo su implementación no es algo sencillo de realizar, puesto que encontrar la formulación de tipo $Ay = B$ no es una tarea fácil.

Queda como trabajo a futuro encontrar un método numérico directo, que sea más fácil de implementar que el método de tipo L_1, para ver qué sucede si lo aplicamos al problema de control planteado en el Capítulo 4.

Conclusiones

En esta tesis se obtuvieron avances sobre el conocimiento del cálculo de variaciones fraccionario, tanto en lo referido al desarrollo teórico, como en la aplicación del mismo a problemas de manejo poblacional.

En primer lugar se establecieron condiciones de optimalidad de problemas variacionales, tanto en su versión clásica (con derivadas de orden entero), como en su versión fraccionaria (con derivadas de orden real positivo). Esto es, se encontraron condiciones necesarias, llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange. Al existir diferentes definiciones de derivada fraccionaria, se obtuvieron diferentes tipos de ecuaciones de Euler-Lagrange para los problemas fraccionarios, las ecuaciones C-RL que son ecuaciones de Euler-Lagrange donde intervienen derivadas fraccionarias de Riemann-Liouvile y de Caputo, y las ecuaciones C-C donde sólo aparecen derivadas fraccionarias de Caputo. También se consideraron problemas variacionales mixtos, en los que intervenían tanto derivadas de orden fraccionario como entero. La principal ventaja de esta formulación, con respecto al enfoque fraccionario puro adoptado en la literatura, es que, además de incluir los resultados de los problemas fraccionarios, también se pueden obtener los resultados clásicos del cálculo variacional como casos particulares. Para estos problemas variacionales, se demostró la existencia de ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias C-RL y C-C. También se pudo observar que la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria C-C mejora los cálculos con respecto a la ecuación de Euler-Lagrange fraccionaria C-RL, debido a su similitud con la derivada de orden entero.

A continuación, con el objetivo de comparar la evolución fraccionaria de cierto recurso para un futuro modelo fraccionario de maximización de la ganancia de la extracción del mismo, se presentó un análisis de una ecuación diferencial cúbica fraccionaria. Esta ecuación es una generalización de diferentes versiones de ecuaciones logísticas fraccionarias con o sin efecto Allee y con o sin cosecha. Se demostró existencia y unicidad de solución, se realizó un análisis de estabilidad sensible a la variación de los diferentes parámetros, y por último, mediante la implementación del método numérico de Adams fraccionario, se compararon

los diferentes modelos logísticos fraccionarios. Los resultados obtenidos para la ecuación cúbica fraccionaria generalizaron a los resultados de las ecuaciones logísticas fraccionarias, en cuanto a que se podían obtener como casos particulares reemplazando los valores de los parámetros.

Con respecto a la comparación entre los diferentes tipos de logísticas fraccionarias, se logró observar que el caso con efecto Allee es más realista puesto que tiene en cuenta la cantidad mínima necesaria para que una población comience a reproducirse y a crecer, en contraste al caso sin efecto Allee que no considera esta cantidad. Sin embargo, la ecuación fraccionaria con efecto Allee, al ser una ecuación cúbica, es compleja de tratar mientras que la ecuación logística fraccionaria, que es cuadrática, facilita muchísimo los cálculos y resulta también una muy buena representación de la realidad. Por este motivo, se decidió, como un primer enfoque, trabajar con la ecuación logística sin efecto Allee para el modelado del problema de la maximización de la ganancia de la extracción del recurso o especie.

Posteriormente, se trató el problema de control fraccionario que modeliza esta situación. Debido a la singularidad del problema en sí, se desarrollaron y utilizaron diferentes técnicas de resolución, tanto para los casos fraccionarios, como para el caso clásico. A pesar de que se vio la necesidad de un Teorema del Camino más Cercano no existente en el análisis fraccionario, se realizó una comparación entre las soluciones de los problemas clásico y fraccionario para un orden fraccionario fijo. También se observó que el orden fraccionario en la dinámica de la población realmente afecta el comportamiento de su crecimiento, pudiendo concluir que las derivadas fraccionarias podrían modelar mejor la evolución de recursos naturales que poseen un retardo en su crecimiento.

Por otro lado, durante la resolución de este problema se vio que utilizando la ecuación de Euler-Lagrange C-RL, proporcionaba diferentes soluciones que usando la ecuación de Euler-Lagrange C-C. Para continuar con la comparación se eligió, por cuestiones cualitativas, las poblaciones calculadas mediante la ecuación C-C. Al no saber si la diferencia de las soluciones obtenidas era por la singularidad del problema planteado o por razones diferentes, se decidió dedicar el último capítulo de la tesis a realizar un análisis más profundo de esto.

Finalmente, se realizó una comparación de estos diferentes métodos de optimalidad de problemas variacionales fraccionarios. Se presentaron dos ejemplos, un problema variacional mixto, y un problema variacional fraccionario. Para la resolución de los mismos, se dedujo un nuevo método numérico directo, es decir que no depende de ninguna ecuación de Euler-Lagrange. Se obtuvieron varios resultados que nos llevaron a la siguiente

conclusión: si bien trabajar con las ecuaciones de Euler-Lagrange C-C hace que los cálculos sean más sencillos, muchas veces tenemos que tener cuidado con respecto a la implementación de este método puesto que las ecuaciones de Euler-Lagrange C-RL son las que verdaderamente nos darán la solución optimal, debido a que estas poseen un Teorema de condiciones suficientes. Quizás convendría resolver los problemas variacionales mixtos mediante la aproximación de sus soluciones con métodos numéricos directos, por ejemplo el método de tipo L_1, que no utiliza en su desarrollo ninguna ecuación de Euler-Lagrange, sin embargo su implementación no es algo sencillo de realizar.

Queda mucho trabajo a futuro, como analizar un problema de maximización de las ganancias más complejo, quizás que involucre el crecimiento poblacional con efecto Allee, estudiar sobre una posible existencia del Teorema de Green fraccionario para así lograr una demostración del Teorema del Camino más Cercano en su versión fraccionaria, seguir investigando al respecto de la comparación entre las diferentes ecuaciones de Euler-Lagrange, y encontrar algún método numérico directo, que sea más fácil de implementar que el método de tipo L_1, para ver qué sucede si lo aplicamos al problema de control planteado o a diferentes problemas.

Anexo

En esta sección presentaremos los códigos programados en lenguaje Python utilizados a lo largo de esta tesis.

Códigos de la Sección 3.4

1. Método de Adams fraccionario para la ecuación cúbica fraccionaria y sus casos particulares, las ecuaciones logísticas fraccionarias (3.1) y (3.2) y las ecuaciones logísticas con efecto Allee (3.3) y (3.4).

```
import numpy as np
from math import*
from scipy.special import gamma


#### PARAMETROS
alfa = 0.5
A = -0.05
B = 0.55
C = -0.5
paso = 0.05
T = 25 # tiempo final
x0 = 0.1 #Condicion inicial


t = np.arange(0, T+paso, paso) #Vector de tiempos

###### FUNCIONES

def cubica(x, A, B, C):
    aux = A*(x**3)+B*(x**2)+C*x
    return aux

```

```
def sumaacubica(u, n, alfa, paso):
    a = [((paso**alfa)/gamma(alfa+2))*((n**(alfa+1))
    -(n-alfa)*(n+1)**alfa)]
    for j in range(2,n+2):
        aux=((paso**alfa)/gamma(alfa+2))*((n-(j-1)+2)**(alfa+1)
        -2*(n-(j-1)+1)**(alfa+1)+(n-(j-1))**(alfa+1))
        a.append(float(aux))
    a.append(float(1.0))
    sumaacubica = 0
    for j in range(0,n+1):
        sumaacubica += a[j]*cubica(u[j], A, B, C)
    return sumaacubica


def sumabcubica(u, n, alfa):
    sumabcubica = 0
    bb = []
    for j in range(1,n+2):
        auxbb = (1/gamma(alfa+1))*((n-(j-1)+1)**alfa
        -(n-(j-1))**alfa)
        bb.append(float(auxbb))
        sumabcubica += bb[j-1]*cubica(u[j-1], A, B, C)
    return sumabcubica

def Sol_Adams_cubica(alfa, paso, dato):
    u = [dato]
    Z = [dato]
    v = [dato]
    for j in range(1,len(t)+1):
        auxZ = u[0]+(paso**alfa)*sumabcubica(u, j-1, alfa)
        Z.append(float(auxZ))
        auxu = u[0]+sumaacubica(u, j-1, alfa, paso)
        +(paso**alfa)*(cubica(Z[j], A, B, C))/gamma(alfa+2)
        u.append(float(auxu))
        auxv = v[0]+sumaacubica(v, j-1, alfa, paso)
        +(paso**alfa)*(cubica(u[j], A, B, C))/gamma(alfa+2)
        v.append(float(auxv))
    return v
```

2. Método de Adams fraccionario para las ecuaciones logísticas fraccionarias (3.1) y (3.2).

```
import numpy as np
from math import*
from scipy.special import gamma


#### PARAMETROS
alfa = 0.5
r = 0.5 #tasa de crecimiento
K = 10 #capacidad de carga
E = 0 #tasa de cosecha
paso = 1
T = 500 #tiempo final
x0 = 0.1 #Condicion inicial


t = np.arange(0, T+paso, paso) #Vector de tiempos

###### FUNCIONES

def log(x, r, K, E):
    return r*x*(1-(x/K))-E*x

def sumaalog(u, n, alfa, paso):
    a = [((paso**alfa)/gamma(alfa+2))*((n**(alfa+1))
    -(n-alfa)*(n+1)**alfa)]
    for j in range(2,n+2):
        aux=((paso**alfa)/gamma(alfa+2))*((n-(j-1)+2)**(alfa+1)
        -2*(n-(j-1)+1)**(alfa+1)+(n-(j-1))**(alfa+1))
        a.append(float(aux))
    a.append(float(1.0))
    sumaalog = 0
    for j in range(0,n+1):
        sumaalog += a[j]*log(u[j], r, K, E)
    return sumaalog


def sumablog(u, n, alfa):
    sumablog = 0
    bb = []
    for j in range(1,n+2):
        auxbb = (1/gamma(alfa+1))*((n-(j-1)+1)**alfa
        -(n-(j-1))**alfa)
```

```
        bb.append(float(auxbb))
        sumablog += bb[j-1]*log(u[j-1], r, K, E)
    return sumablog

def Sol_Adams_log(alfa, paso, dato):
    u = [dato]
    Z = [dato]
    v = [dato]
    for j in range(1,len(t)+1):
        auxZ = u[0]+(paso**alfa)*sumablog(u, j-1, alfa)
        Z.append(float(auxZ))
        auxu = u[0]+sumaalog(u, j-1, alfa, paso)
        +(paso**alfa)*(log(Z[j], r, K, E))/gamma(alfa+2)
        u.append(float(auxu))
        auxv = v[0]+sumaalog(v, j-1, alfa, paso)
        +(paso**alfa)*(log(u[j], r, K, E))/gamma(alfa+2)
        v.append(float(auxv))
    return v
```

3. Método de Adams fraccionario para las ecuaciones logísticas fraccionarias con efecto Allee (3.3) y (3.4).

```
import numpy as np
from math import*
from scipy.special import gamma


#### PARAMETROS
alfa = 0.5
r = 0.5 #tasa de crecimiento
K = 10 #capacidad de carga
E = 1 #tasa de cosecha
m = 1 # umbral de Alle
paso = 0.05
T = 25 #tiempo final
x0 = 0.1 #Condicion inicial


t = np.arange(0, T+paso, paso) #Vector de tiempos

###### FUNCIONES

```

```
def allee(x, r, K, E, m):
    return r*x*(1-(x/K))*(x-m)-E*x

def sumaaallee(u, n, alfa, paso):
    a = [((paso**alfa)/gamma(alfa+2))*((n**(alfa+1))
    -(n-alfa)*(n+1)**alfa)]
    for j in range(2,n+2):
        aux=((paso**alfa)/gamma(alfa+2))
        *((n-(j-1)+2)**(alfa+1)-2*(n-(j-1)+1)**(alfa+1)
        +(n-(j-1))**(alfa+1))
        a.append(float(aux))
    a.append(float(1.0))
    sumaaallee = 0
    for j in range(0,n+1):
        sumaaallee += a[j]*allee(u[j], r, K, E, m)
    return sumaaallee


def sumaballee(u, n, alfa):
    sumaballee = 0
    bb = []
    for j in range(1,n+2):
        auxbb = (1/gamma(alfa+1))*((n-(j-1)+1)**alfa
        -(n-(j-1))**alfa)
        bb.append(float(auxbb))
        sumaballee += bb[j-1]*allee(u[j-1], r, K, E, m)
    return sumaballee

def Sol_Adams_allee(alfa, paso, dato):
    u = [dato]
    Z = [dato]
    v = [dato]
    for j in range(1,len(t)+1):
        auxZ = u[0]+(paso**alfa)*sumaballee(u, j-1, alfa)
        Z.append(float(auxZ))
        auxu = u[0]+sumaaallee(u, j-1, alfa, paso)
        +(paso**alfa)*(allee(Z[j], r, K, E, m))/gamma(alfa+2)
        u.append(float(auxu))
        auxv = v[0]+sumaaallee(v, j-1, alfa, paso)
        +(paso**alfa)*(allee(u[j], r, K, E, m))/gamma(alfa+2)
        v.append(float(auxv))
    return v
```

Códigos de la Sección 4.3

4. Población óptima solución del problema clásico (4.1) y cosecha óptima utilizando el Teorema del camino más cercano y cálculo de la ganancia clásica usando sumas de Riemann.

```
import numpy as np
from math import*


#### PARAMETROS

r=0.71 #Tasa de nacimiento
delta=0.01 #Tasa de descuento
K=80.5 #Capacidad de carga
hmin=10 #Cosecha minima
hmax=20 #Cosecha maxima
tmin=0.232235 #Tiempo minimo del teorema del camino mas cercano
tmax=9.8678 #Tiempo maximo del teorema del camino mas cercano
x0=38.6896 #Condicion inicial
x10=K/2 #Condicion final
xopt=(K/2)*(1-delta/r) #X optimo de la Euler-Lagrange
hopt=r*xopt*(1-(xopt/K)) #H optimo de la Euler-Lagrange
b=10 #Final del intervalo de tiempo
paso=0.1


t = np.arange(0, 10.1, 0.1) #Arreglo de 0 a 10 con paso 0.1

#### X OPTIMO CLASICO UTILIZANDO METODO DEL CAMINO MAS CERCANO
x = []

for i in t:
    if i==0:
        x.append(float(x0))
    elif i < tmin:
        aux=(20.9703+62.3013*exp(0.388979*i))/(1.1523
        +exp(0.388979*i))
        x.append(float(aux))
    elif i > tmin and i < tmax:
        x.append(float(xopt))
    else:
```

```
        aux=(889.931+62.3013*exp(0.388979*i))/(48.9008
        +exp(0.388979*i))
        x.append(float(aux))


#### H OPTIMO CLASICO UTILIZANDO METODO DEL CAMINO MAS CERCANO
h = []

for i in t:
    if i < tmin:
        h.append(float(hmin))
    elif i > tmin and i < tmax:
        h.append(float(hopt))
    else:
        h.append(float(hmin))



#### GANANCIA
# Aca calculamos la integral ganancia usando sumas de Riemann

sumai = 0 #considerando extremos izquierdos
sumad = 0 #considerando extremos derechos
ssuma = 0 #considerando semisuma

for j in range(0,len(t)-1):
    sumai += exp(-delta*t[j])*h[j]*paso
    sumad += exp(-delta*t[j+1])*h[j+1]*paso
    ssuma += exp(-delta*(t[j]+t[j+1])/2)*(h[j]+h[j+1])*paso/2
```

5. Población óptima, solución del problema fraccionario (4.10) utilizando la ecuación de Euler-Lagrange C-C, cosecha óptima asociada, población óptima solución, utilizando la ecuación de Euler-Lagrange C-RL y cálculo de las ganancias fraccionarias usando sumas de Riemann.

```
import numpy as np
from math import*
from mittag_leffler import ml, ml_
from scipy.special import gamma


#### PARAMETROS
```

```
8
9  alfa=0.6 #Orden fraccionario
10 delta=0.01 #Tasa de descuento
11 r=0.71 #Tasa de nacimiento
12 K=80.5 #Capacidad de carga
13 hmin=10 #Cosecha minima
14 hmax=20 #Cosecha maxima
15 x0=38.6896 #Condicion inicial
16 x10=K/2 #Condicion final
17 xopt=39.6831 #X optimo de la Euler-Lagrange
18 hopt=14.2859 #H optimo de la Euler-Lagrange
19 b=T=10 #Final del intervalo de tiempo
20 paso=0.1
21
22 t = np.arange(0, 10+paso, paso) #Arreglo de 0 a 10 con paso 0.1
23
24 #### X OPTIMO FRACCIONARIO CAPUTO
25 x = []
26
27 def optimocaputo(K,b,t,alfa,r,delta):
28     return (K/2)*(1-((delta/r)*((b-t)**(1-alfa))
29     *exp(delta*t-delta*b)*ml_(delta*(b-t), 1, 2-alfa, 1)))
30
31
32 for i in t:
33     aux = optimocaputo(K,b,i,alfa,r,delta)
34     x.append(float(aux))
35
36
37 #### H OPTIMO FRACCIONARIO CAPUTO
38 h = []
39 Dx = [] #Derivada de X optima
40
41 def funcion(t,T,alfa,K,r,delta):
42     return (T-t)**(1-alfa)*exp(-delta*(T-t))
43     *ml_(delta*(T-t),1,2-alfa,1)
44
45
46 def coef(k,paso,alfa):
47     return ((paso**(-alfa))/gamma(2-alfa))*((k+1)**(1-alfa)
48     -(k**(1-alfa)))
49
```

```
50
51 # Metodo L1 para calcular la derivada de Caputo de x
52 p = [0]
53 suma = 0
54 for j in range(1,len(t)):
55     for k in range(0,j):
56         suma += coef(j-k-1,paso,alfa)
57         *(funcion(t[k+1],T,alfa,K,r,delta)
58         -funcion(t[k],T,alfa,K,r,delta))
59     p.append(float(suma))
60     suma = 0
61
62 for j in range(len(t)):
63     aux = (r*x[j]*(1-(x[j]/K)))+delta*(K/(2*r))*p[j]
64     h.append(float(aux))
65     aux2 = -delta*(K/(2*r))*p[j] #Esta es la derivada sola
66     Dx.append(float(aux2))
67
68
69 #### GANANCIA
70 # Aca calculamos la integral ganancia usando sumas de Riemann
71
72 sumai = 0 #considerando extremos izquierdos
73 sumad = 0 #considerando extremos derechos
74 ssuma = 0 #considerando semisuma
75
76 for j in range(0,len(t)-1):
77     sumai += exp(-delta*t[j])*h[j]*paso
78     sumad += exp(-delta*t[j+1])*h[j+1]*paso
79     ssuma += exp(-delta*(t[j]+t[j+1])/2)*(h[j]+h[j+1])*paso/2
80
81
82 ##### X OPTIMO RIEMANN-LIOUVILLE
83
84 def optimoriemann(K,b,t,alfa,r,delta):
85     return (K/2)*(1-((((b-t)**(-alfa))/r)
86     *exp(delta*t-delta*b)*ml_(delta*(b-t), 1, 1-alfa, 1)))
```

6. Poblaciones de las ecuaciones logísticas del problema clásico (4.1) y fraccionario (4.10) sin considerar cosecha, utilizando método de Adams fraccionario.

```
1 import numpy as np
```

```
from math import*
from scipy.special import gamma

#### PARAMETROS
alfa = 0.6 #Orden fraccionario
r = 0.71 #Tasa de crecimiento
K = 80.5 #Capacidad de carga
paso = 0.1
T = 10 #Final del intervalo
x0=38.6896 #Condicion inicial


t = np.arange(0, T+paso, paso) #Vector de tiempos

#### FUNCIONES

def sumaalog(u, n, alfa, paso):
    a = [((paso**alfa)/gamma(alfa+2))*((n**(alfa+1))
    -(n-alfa)*(n+1)**alfa)]
    for j in range(2,n+2):
        aux=((paso**alfa)/gamma(alfa+2))*((n-(j-1)+2)**(alfa+1)
        -2*(n-(j-1)+1)**(alfa+1)+(n-(j-1))**(alfa+1))
        a.append(float(aux))
    a.append(float(1.0))
    sumaalog = 0
    for j in range(0,n+1):
        sumaalog += a[j]*sollog(u[j], r, K)
    return sumaalog

def sollog(x, r, K):
    return r*x*(1-(x/K))

def sumablog(u, n, alfa):
    sumablog = 0
    bb = []
    for j in range(1,n+2):
        auxbb = (1/gamma(alfa+1))*((n-(j-1)+1)**alfa
        -(n-(j-1))**alfa)
        bb.append(float(auxbb))
        sumablog += bb[j-1]*sollog(u[j-1], r, K)
    return sumablog

```

```
def Sol_Adams_sollog(alfa, paso, dato):
    u = [dato]
    Z = [dato]
    v = [dato]
    for j in range(1,len(t)+1):
        auxZ = u[0]+(paso**alfa)*sumablog(u, j-1, alfa)
        Z.append(float(auxZ))
        auxu = u[0]+sumaalog(u, j-1, alfa, paso)
        +(paso**alfa)*(sollog(Z[j], r, K))/gamma(alfa+2)
        u.append(float(auxu))
        auxv = v[0]+sumaalog(v, j-1, alfa, paso)
        +(paso**alfa)*(sollog(u[j], r, K))/gamma(alfa+2)
        v.append(float(auxv))
    return v
```

7. Población óptima del problema (4.35).

```
import numpy as np
from math import*
from scipy.special import gamma

#### PARAMETROS
alfa = 0.6 #Orden fraccionario
r = 0.71 #Tasa de crecimiento
K = 80.5 #Capacidad de carga
paso = 0.05
T = 10 #Tiempo final
x0=38.6896 #Condicion inicial
delta=0.01 #Coeficiente de descuento
xopt=(K/2)*(1-delta/r) #X optimo de la Euler-Lagrange
hopt=r*xopt*(1-(xopt/K)) #H optimo de la Euler-Lagrange


t = np.arange(0, T+paso, paso) #Vector de tiempos

#### FUNCIONES

def sollogcosecha(x, r, K, hopt):
    return r*x*(1-(x/K))-hopt

def sumaalog(u, n, alfa, paso):
    a = [((paso**alfa)/gamma(alfa+2))*((n**(alfa+1))
```

```
    -(n-alfa)*(n+1)**alfa)]
    for j in range(2,n+2):
        aux=((paso**alfa)/gamma(alfa+2))*((n-(j-1)+2)**(alfa+1)
        -2*(n-(j-1)+1)**(alfa+1)+(n-(j-1))**(alfa+1))
        a.append(float(aux))
    a.append(float(1.0))
    sumaalog = 0
    for j in range(0,n+1):
        sumaalog += a[j]*sollogcosecha(u[j], r, K, hopt)
    return sumaalog


def sumablog(u, n, alfa):
    sumablog = 0
    bb = []
    for j in range(1,n+2):
        auxbb = (1/gamma(alfa+1))*((n-(j-1)+1)**alfa
        -(n-(j-1))**alfa)
        bb.append(float(auxbb))
        sumablog += bb[j-1]*sollogcosecha(u[j-1], r, K, hopt)
    return sumablog


def Sol_Adams_sollogcosecha(alfa, paso, dato, hopt):
    u = [dato]
    Z = [dato]
    v = [dato]
    for j in range(1,len(t)+1):
        auxZ = u[0]+(paso**alfa)*sumablog(u, j-1, alfa)
        Z.append(float(auxZ))
        auxu = u[0]+sumaalog(u, j-1, alfa, paso)
        +(paso**alfa)*(sollogcosecha(Z[j], r, K, hopt))
        /gamma(alfa+2)
        u.append(float(auxu))
        auxv = v[0]+sumaalog(v, j-1, alfa, paso)
        +(paso**alfa)*(sollogcosecha(u[j], r, K, hopt))
        /gamma(alfa+2)
        v.append(float(auxv))
    return v
```

Códigos de la Sección 5.2 y la Sección 5.3

8. Soluciones del problema variacional (5.6) mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias C-RL y C-C, cálculo de las integrales y aproximación de las mismas soluciones mediante el método numérico de tipo L_1.

```
import numpy as np
from math import*
from scipy.special import gamma
from time import time


tiempo_inicial = time()#para medir tiempo de demora del programa


#### PARAMETROS

alpha = 0.95
pasos = 200
paso = 1/pasos


#### FUNCION PARA SOLUCION EXACTA C-RL
def solexact(x, alpha):
    y=(-1/(2*gamma(3-alpha)))*(1-x)**(2-alpha)
    +(1-(1/(2*gamma(3-alpha))))*x+1/(2*gamma(3-alpha))
    return y

#### FUNCION PARA SOLUCION EXACTA C-C
def solexactCC(x):
    y=x
    return y

#### SOLUCIONES EXACTAS DEL PROBLEMA
E = [0] #C-RL
F= [0] #C-C
t = np.arange(0, 1+paso, paso) #Arreglo de 0 a 1
for i in range(1,pasos+1):
    aux = solexact(t[i], alpha)
    E.append(float(aux))
    auxc = solexactCC(t[i])
    F.append(float(auxc))
```

```
37
38
39 #### INTEGRALES
40 #A continuacion realizaremos programas para calcular la
41 #derivada alfa de Caputo de xC y de E, para asi estimar las
42 #integrales
43
44 def coef(k,paso,alpha):
45     return (paso**(-alpha)*((k+1)**(1-alpha)-(k**(1-alpha))))
46     /gamma(2-alpha)
47
48 #VECTOR DERIVADA DE CAPUTO DE SOLUCION C-RL (E)
49 #Usaremos metodo L1
50 RL= []
51 sumaRL = 0
52
53 for j in range(0,len(t)):
54     for k in range(0,j):
55         sumaRL += coef(j-k-1,paso,alpha)*(E[k+1]-E[k])
56     RL.append(float(sumaRL))
57     sumaRL = 0
58
59 #VECTOR DERIVADA DE CAPUTO DE SOLUCION C-C (F)
60 CC= []
61
62 for j in range(0,len(t)):
63     aux = (gamma(2)/gamma(2-alpha))*t[j]**(1-alpha)
64     CC.append(float(aux))
65
66 #Ahora haremos suma de Riemann para las integrales
67 IE=[] # integrando con la E
68 IF=[] # integrando con la xF
69
70 for i in range(len(t)):
71     auxIE=RL[i]-((((2-alpha)/(2*gamma(3-alpha)))
72     *(1-t[i])**(1-alpha)+(1-(1/(2*gamma(3-alpha)))))**2)
73     IE.append(float(auxIE))
74     auxIF=CC[i]-1
75     IF.append(float(auxIF))
76
77
78 #Integrales
```

```
sumaIE=0 #valor de la integral de la solucion C-RL
sumaIF=0 #valor de la integral de la solucion C-C

for i in range(len(t)-1):
    sumaIE+=((IE[i+1]+IE[i])/2)*paso
    sumaIF+=((IF[i+1]+IF[i])/2)*paso


#### METODO DE TIPO L1 PARA PROBLEMA VARIACIONAL MIXTO EJEMPLO 1

# Matriz A
def matriz1(n):
    A = np.zeros((n-1, n-1)) #el primer valor y el ultimo
    #valor son datos
    for i in range(0,n-1):
        for j in range(0,n-1):
            if (j==i-1) or (j==i+1):
                A[i,j]=2
            elif j==i:
                A[i,j]=-4
            else:
                A[i,j]=0
    return A

# Vector b
def coef(k,paso,alpha):
    if k==-1:
        z = 0
    else:
        z = ((paso**(-alpha))/gamma(2-alpha))
        *((k+1)**(1-alpha)-(k**(1-alpha)))
    return z


def vector1(n):
    b = []
    for i in range(n-2):
        aux=-(paso**2)*coef(n-i-1, paso, alpha)
        b.append(float(aux))
    aux=-(paso**2)*coef(1, paso, alpha)-2
    b.append(float(aux))
    return b
```

```
121
122
123 # Resultado de Ax=b
124 A = matriz1(pasos)
125 b = vector1(pasos)
126 A_inv = np.linalg.inv(A)
127 X = A_inv @ b #inversa de A por b
128
129 # Solucion aproximada del problema
130 #(agregandole la condicion inicial y final)
131 Y = [0]
132 for i in range(1,pasos+1):
133    if i==(pasos):
134        Y.append(float(1))
135    else:
136         Y.append(float(X[i-1]))
137
138 # Error
139 Resta = [0]
140 for i in range(1,pasos+1):
141     aux = E[i]-Y[i]
142     Resta.append(float(aux))
143 error = np.linalg.norm(Resta, np.inf)
144
145
146 tiempo_final = time()
147 tiempo_ejecucion = tiempo_final - tiempo_inicial
148 #tiempo que demora el programa
149 #print('')
150 #print ('El tiempo de ejecucion fue:',tiempo_ejecucion )
151 #En segundos
```

9. Soluciones del problema variacional (5.15) mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange fraccionarias C-RL y C-C, cálculo de las integrales y aproximación de las mismas soluciones mediante el método numérico de tipo L_1.

```
1 import numpy as np
2 from math import*
3 from scipy.special import gamma
4 import scipy.special as sc #Para usar la hipergeometrica
5 #como sc.hyp2f1(a,b,c,z)
6 from time import time
```

```
7
8
9  tiempo_inicial = time() #para medir tiempo de demora del programa
10
11 #### PARAMETROS
12 alpha=0.95
13 pasos = 640
14 paso = 1/pasos
15
16
17 ####FUNCION PARA SOLUCION EXACTA C-RL
18 def SRL(x,alpha):
19     y=(12*(x**alpha/(gamma(alpha+1)**2))
20     *sc.hyp2f1(1,-alpha,1+alpha,x))-((6/((gamma(alpha+1)**2)
21     *sc.hyp2f1(1,1-alpha,1+alpha,1)))*x**(alpha)
22     *sc.hyp2f1(1,1-alpha,1+alpha,x))
23     return y
24
25 ####FUNCION PARA SOLUCION EXACTA C-C
26
27 def SCC(x,alpha):
28     y=12*(x**alpha/(gamma(alpha+1)**2))
29     *sc.hyp2f1(1,-alpha,1+alpha,x)-((6/(gamma(alpha+1)**2))
30     *x**(alpha))
31     return y
32
33 ####FUNCION PARA SOLUCION CLASICA
34
35 def SE(x, alpha):
36     y=-6*x**2+6*x
37     return y
38
39 ####SOLUCIONES EXACTAS DEL PROBLEMA
40
41 t = np.arange(0, 1+paso, paso) #Arreglo de 0 a 1 espaciado con paso
42
43 xC = []
44 xRL = []
45 xE = [] #solucion clasica
46
47 for i in t:
48     aux = SCC(i,alpha)
```

```
49      xC.append(float(aux))
50      aux =SRL(i,alpha)
51      xRL.append(float(aux))
52      aux = SE(i,alpha)
53      xE.append(float(aux))
54
55
56  #### INTEGRALES
57  #A continuacion realizaremos programas para calcular la derivada
58  #alfa de Caputo de xC y de xRL y xC, para asi estimar las
59  #integrales
60
61  def coef(k,paso,alfa):
62      return (paso**(-alfa)*((k+1)**(1-alfa)-(k**(1-alfa))))
63      /gamma(2-alfa)
64
65
66  #VECTORES  DERIVADAS  DE  CAPUTO  DE LAS SOLUCIONES C-RL Y C-C
67  #usaremos metodo L1
68
69  CC = [] #vector derivada de Caputo de xC
70  RL= [] #vector derivada de Caputo de xRL
71  sumaCC = 0
72  sumaRL = 0
73
74  for j in range(0,len(t)):
75      for k in range(0,j):
76          sumaCC += coef(j-k-1,paso,alpha)*(xC[k+1]-xC[k])
77          sumaRL += coef(j-k-1,paso,alpha)*(xRL[k+1]-xRL[k])
78      CC.append(float(sumaCC))
79      RL.append(float(sumaRL))
80      print(sumaCC, sumaRL)
81      sumaCC = 0
82      sumaRL = 0
83
84
85  #Ahora haremos suma de Riemann para las integrales
86  E=[] # integrando con la xC
87  F=[] # integrando con la xRL
88  G=[] # integrando clasico
89  for i in range(len(t)):
90      auxE=(CC[i]**2)-24*xC[i]
```

```
    E.append(float(auxE))
    auxF=(RL[i]**2)-24*xRL[i]
    F.append(float(auxF))
    auxG=(-12*t[i]+6)**2-24*xE[i]
    G.append(float(auxG))

#Integrales
sumaE=0
sumaF=0
sumaG=0
for i in range(len(t)-1):
    sumaE+=((E[i+1]+E[i])/2)*paso
    sumaF+=((F[i+1]+F[i])/2)*paso
    sumaG+=((G[i+1]+G[i])/2)*paso



####METODO DE TIPO L1 PARA PROBLEMAS VARIACIONALES MIXTOS

# Matriz A
def coef(k,paso,alpha):
    if k==-1:
        z = 0
    else:
        z = ((paso**(-alpha))/gamma(2-alpha))
        *((k+1)**(1-alpha)-(k**(1-alpha)))
    return z

def matriz2(n):
    restasb = []
    for i in range(n):
        aux=coef(i,paso,alpha)-coef(i-1,paso,alpha)
        restasb.append(float(aux))
    L=np.zeros((n-1, n-1))
    M = np.zeros((n-1, n-1))#Matriz diagonal de L
    for i in range(n-1):
        suma = 0
        for d in range(i+1):
            for l in range(0,n-i):
                suma += restasb[l+d]*restasb[l]
            L[i,i-d] = suma
            suma=0
```

```
133         M[i,i]= L[i,i]
134     A=L+np.transpose(L)-M
135     return A
136 
137 # Vector b
138 def vector2(n):
139     b = []
140     for i in range(n-1):
141         aux=12
142         b.append(float(aux))
143     return b
144 
145 # Resultado de Ax=b
146 A = matriz2(pasos)
147 b = vector2(pasos)
148 A\_inv = np.linalg.inv(A)
149 X = A\_inv @ b #inversa de A por b
150 
151 
152 # Solucion aproximada del problema
153 #(agregandole la condicion inicial y final)
154 Y = [0]
155 for i in range(1,pasos+1):
156    if i==(pasos):
157        Y.append(float(0))
158    else:
159         Y.append(float(X[i-1]))
160 
161 # Error
162 Resta = [0]
163 RestaCC = [0]
164 for i in range(1,pasos+1):
165     aux = xRL[i]-Y[i]
166     Resta.append(float(aux))
167     aux = xC[i]-Y[i]
168     RestaCC.append(float(aux))
169 error = np.linalg.norm(Resta, np.inf)
170 errorCC = np.linalg.norm(RestaCC, np.inf)
171 
172 
173 tiempo_final = time()
174 tiempo_ejecucion = tiempo_final - tiempo_inicial
```

```
175 # Tiempo que demora el programa
176 print('')
177 print ('El tiempo de ejecucion fue:',tiempo_ejecucion) #En segundos
```

Bibliografía

[1] Abbas, S., Banerjee, M., and Momani, S. Dynamical analysis of fractional-order modified logistic model. *Computers & Mathematics with Applications 62*, 3 (2011), 1098–1104.

[2] Agrawal, O. P. Generalized Euler—Lagrange equations and transversality conditions for FVPs in terms of the Caputo derivative. *Journal of Vibration and Control 13*, 9-10 (2007), 1217–1237.

[3] Ahmed, E., El-Sayed, A., and El-Saka, H. A. On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems. *Physics Letters A 358*, 1 (2006), 1–4.

[4] Almeida, R., Ferreira, R. A., and Torres, D. F. Isoperimetric problems of the calculus of variations with fractional derivatives. *Acta Mathematica Scientia 32*, 2 (2012), 619–630.

[5] Almeida, R., Malinowska, A. B., and Torres, D. F. A fractional calculus of variations for multiple integrals with application to vibrating string. *Journal of Mathematical Physics 51*, 3 (2010), 033503.

[6] Almeida, R., Malinowska, A. B., and Torres, D. F. *Fractional Euler–Lagrange differential equations via Caputo derivatives*. Springer, 2012.

[7] Almeida, R., and Torres, D. F. Necessary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 16*, 3 (2011), 1490–1500.

[8] Antunes, P. R., and Ferreira, R. A. Analysis of a class of boundary value problems depending on left and right Caputo fractional derivatives. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 48* (2017), 398–413.

[9] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., and Trujillo, J. J. *Fractional calculus: models and numerical methods*, vol. 3. World Scientific, 2012.

[10] Baleanu, D., and Trujillo, J. J. On exact solutions of a class of fractional Euler–Lagrange equations. *Nonlinear Dynamics 52*, 4 (2008), 331–335.

[11] Barrios, M., Lombardi, A., and Reyero, G. Método numérico de tipo L1 para problemas variacionales fraccionarios. In *Congreso de Mecánica Computacional-MECOM* (2018), vol. XXXVI, pp. 1089–1098.

[12] Barrios, M., and Reyero, G. Ecuaciones de Euler-Lagrange para un problema isoperimétrico fraccionario. In *Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial- MACI* (2019), vol. VI, pp. 328–331.

[13] Barrios, M., and Reyero, G. An Euler-Lagrange equation only depending on derivatives of Caputo for fractional variational problems with classical derivatives. *Statistics, Optimization & Information Computing 8*, 2 (2020), 590–601, DOI: 10.19139/soic–2310–5070–865.

[14] Barrios, M., Reyero, G., and Tidball, M. Estabilidad de una generalización de ecuaciones logísticas fraccionarias. In *Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial- MACI* (2019), vol. VII, pp. 105–108.

[15] Barrios, M., Reyero, G., and Tidball, M. A fractional order cubic differential equation. Applications to natural resource management. *arXiv preprint arXiv:2104.04092* (2021).

[16] Barrios, M., Reyero, G., and Tidball, M. Harvest management problem in a fractional logistic equation. *arXiv preprint arXiv:2104.04082* (2021).

[17] Barrios, M., Reyero, G., and Tidball, M. Necessary conditions to a fractional variational problem. *arXiv preprint arXiv:2104.04089* (2021).

[18] Bastos, N. R. Calculus of variations involving Caputo-Fabrizio fractional differentiation. *Statistics, Optimization & Information Computing 6*, 1 (2018), 12–21.

[19] Blaszczyk, T., and Ciesielski, M. Numerical solution of Euler-Lagrange equation with Caputo derivatives. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics 9*, 1 (2017), 173–185.

[20] Caputo, M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical Journal International 13*, 5 (1967), 529–539.

[21] Caputo, M., and Mainardi, F. Linear models of dissipation in anelastic solids. *La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977) 1*, 2 (1971), 161–198.

[22] Caputo, M. C., and Torres, D. F. Duality for the left and right fractional derivatives. *Signal Processing 107* (2015), 265–271.

[23] Clark, C. W. *The optimal management of renewable resources*, vol. 2. Mathematical Bioeconomics, 1990.

[24] Cresson, J., et al. *Fractional calculus in analysis, dynamics, and optimal control*. Nova Publishers, 2014, ch. V.

[25] Diethelm, K. *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*. Springer Science & Business Media, 2010.

[26] El-Sayed, A., El-Mesiry, A., and El-Saka, H. On the fractional-order logistic equation. *Applied Mathematics Letters 20*, 7 (2007), 817–823.

[27] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., and Tricomi, F. G. Higher transcendental functions, Vol. I, Vol. III. *McGraw-Hill, New York 8* (1953), 5976.

[28] Ferrari, A., and Marcus, E. S. Study of a fractional-order model for HIV infection of CD4+ T-cells with treatment. *Journal of Fractional Calculus and Applications 11*, 2 (2020), 12–22.

[29] Goos, D., Reyero, G., Roscani, S., and Santillan Marcus, E. On the initial-boundary-value problem for the time-fractional diffusion equation on the real positive semiaxis. *International Journal of Differential Equations 2015* (2015).

[30] Goos, D. N., and Reyero, G. F. Mathematical Analysis of a Cauchy Problem for the Time-Fractional Diffusion-Wave Equation with alpha in (0,2). *Journal of Fourier Analysis and Applications 24*, 2 (2018), 560–582.

[31] Herrmann, R. *Fractional calculus: an introduction for physicists*. World scientific, 2014.

[32] Hilfer, R., et al. *Applications of fractional calculus in physics*, vol. 35. World scientific Singapore, 2000.

[33] Kamocki, R. Variational Methods for a Fractional Dirichlet Problem Involving Jumarie's Derivative. *Mathematical Problems in Engineering 2015* (2015).

[34] Kilbas, A. ĭ. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204. Elsevier, 2006.

[35] Lazo, M. J., and Torres, D. F. The DuBois–Reymond fundamental lemma of the fractional calculus of variations and an Euler–Lagrange equation involving only derivatives of Caputo. *Journal of Optimization Theory and Applications 156*, 1 (2013), 56–67.

[36] Li, C., and Zeng, F. *Numerical methods for fractional calculus*, vol. 24. CRC Press, 2015.

[37] Malinowska, A. B., Odzijewicz, T., and Torres, D. F. *Advanced methods in the fractional calculus of variations*. Springer, 2015.

[38] Malinowska, A. B., and Torres, D. F. Generalized natural boundary conditions for fractional variational problems in terms of the Caputo derivative. *Computers & Mathematics with Applications 59*, 9 (2010), 3110–3116.

[39] Malinowska, A. B., and Torres, D. F. *Introduction to the fractional calculus of variations*. World Scientific Publishing Company, 2012.

[40] Meiss, J. D. *Differential dynamical systems*. SIAM, 2007.

[41] Odzijewicz, T., Malinowska, A. B., and Torres, D. F. Fractional variational calculus with classical and combined Caputo derivatives. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 75*, 3 (2012), 1507–1515.

[42] Odzijewicz, T., Malinowska, A. B., and Torres, D. F. Green's theorem for generalized fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis 16*, 1 (2013), 64–75.

[43] Oldham, K., and Spanier, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier, 1974.

[44] Podlubny, I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.

[45] Ross, B., Samko, S. G., and Love, E. R. Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all orders less than one. *Real Analysis Exchange 20*, 1 (1994), 140–157.

[46] Sethi, S. P. Nearest feasible paths in optimal control problems: Theory, examples, and counterexamples. *Journal of Optimization Theory and Applications 23*, 4 (1977), 563–579.

[47] van Brunt, B. *The Calculus of Variations*. Springer, 2004.

[48] Zelikin, M. I. *Control theory and optimization I: Homogeneous spaces and the Riccati equation in the calculus of variations*, vol. 86. Springer Science & Business Media, 2013.

[49] Zelikin, M. I., and Borisov, V. F. *Theory of chattering control: with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering*. Springer Science & Business Media, 2012.