



UNR Universidad Nacional de Rosario

Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Aproximación numérica de problemas de reacción–difusión. Mallas graduadas, normas balanceadas y aplicaciones.

por Cecilia Penessi

Director: Dr. Ariel L. Lombardi

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctora en Matemática

2025

Agradecimientos

Resumen

En esta tesis exploramos la implementación del método de elementos finitos para la resolución de problemas de reacción–difusión singularmente perturbados, con especial énfasis en la obtención de estimaciones de error en normas balanceadas mediante el uso de mallas graduadas. Analizamos diversos escenarios, incluyendo problemas bidimensionales, sistemas acoplados de ecuaciones y aplicaciones a problemas fraccionarios.

Comenzamos estudiando problemas de reacción–difusión singularmente perturbados en dos dimensiones, donde empleamos el método de elementos finitos sobre mallas graduadas para obtener aproximaciones robustas. Mostramos que una elección adecuada del parámetro de graduación permite obtener estimaciones de error cuasi–óptimas en una norma balanceada para elementos bilineales a trozos, siguiendo la formulación variacional con peso introducida en [43]. Asimismo, demostramos un resultado de *supercloseness*, estableciendo que la diferencia entre la solución numérica y la interpolación de Lagrange de la solución exacta, en esa misma norma, es de orden superior al error mismo.

A continuación, abordamos sistemas acoplados de ecuaciones unidimensionales de reacción–difusión singularmente perturbadas, utilizando elementos finitos lineales a trozos en mallas graduadas. Consideramos dos casos: ecuaciones con coeficientes variables y el mismo parámetro de perturbación singular para todas las ecuaciones y, por otro lado, ecuaciones con coeficientes constantes y con diferentes parámetros de perturbación singular. En ambos casos las soluciones pueden presentar capas límite en los extremos del dominio. Además, en el segundo caso, si los parámetros de perturbación singular tienen órdenes de magnitud distintos, pueden formarse capas exponenciales de diferentes anchos y/o superpuestas. Probamos que, en ambos casos, es posible elegir adecuadamente el parámetro de graduación, de manera de aproximar correctamente las capas límite y obtener estimaciones óptimas del error en una norma balanceada.

Finalmente, analizamos la discretización de problemas fraccionarios con condición de Dirichlet homogénea para potencias fraccionarias de operadores elípticos simétricos de segundo orden en un dominio bidimensional. Si bien se trata de un problema no local, el

mismo puede ser localizado a través de una ecuación elíptica no uniforme en un dominio con una dimensión espacial adicional. Esta estrategia fue introducida en [12] y posteriormente extendida por otros autores. En nuestro enfoque, empleamos la técnica de diagonalización propuesta en [6], la cual desacopla el problema en un sistema de ecuaciones independientes de reacción–difusión, muchas de ellas singularmente perturbadas. Estas ecuaciones pueden aproximarse en paralelo mediante elementos finitos bilineales sobre una misma malla convenientemente graduada. Demostramos la convergencia del esquema propuesto.

En cada uno de estos casos, presentamos ejemplos numéricos que validan eficazmente los métodos y resultados teóricos obtenidos.

Índice general

Introducción **1**

1. Preliminares **10**
1.1. Problemas de reacción–difusión singularmente perturbados 11
1.1.1. Estimaciones puntuales para la solución en el cuadrado unitario . . 12
1.1.2. Aproximación por elementos finitos 13
1.2. Mallas graduadas y estimaciones uniformes 16
1.3. Estimaciones en normas balanceadas 20

2. Estimaciones en normas balanceadas para problemas de reacción–difusión **24**
2.1. Formulación del problema 25
2.2. Algunos resultados previos 30
2.3. Estimaciones sobre mallas graduadas 35
2.4. Lemas técnicos 45
2.5. Supercloseness 56
2.5.1. Estimación de I 59
2.5.2. Estimación de II 60
2.5.3. Estimación de III 61
2.5.4. Estimación de IV 67
2.6. Ejemplos numéricos 67

3. Estimaciones en normas balanceadas para sistemas acoplados de ecuaciones de reacción–difusión **72**
3.1. Presentación del problema 73
3.2. Mallas graduadas y resultados preliminares 76
3.2.1. Mallas graduadas 76

3.2.2. Interpolación de Lagrange 77
3.2.3. Estabilidad H^1 de las proyecciones L^2 82
3.2.4. Resultado auxiliar para una ecuación de reacción–difusión 91
3.3. Estimaciones del error en normas balanceadas 94
3.3.1. Caso $\mu = \varepsilon$ 94
3.3.2. Caso $\mu \neq \varepsilon$ 96
3.4. Ejemplos numéricos 101
3.4.1. Primer Ejemplo: coeficientes variables, $\varepsilon = \mu$ 101
3.4.2. Segundo Ejemplo: coeficientes constantes, $\varepsilon \neq \mu$ 103

4. Superconvergencia para una ecuación de reacción–difusión 105
4.1. Resultados auxiliares 106
4.2. Aproximación por elementos finitos en mallas graduadas 107
4.3. Aproximación de orden superior mediante post–procesamiento 110
4.4. Ejemplo numérico 117

5. Aplicación a la discretización de problemas fraccionarios 119
5.1. El problema modelo 119
5.1.1. Potencias fraccionarias de operadores elípticos 120
5.1.2. El problema local extendido 121
5.1.3. Semidiscretización del problema extendido 123
5.1.4. La discretización completa 124
5.1.5. Algunas consideraciones preliminares para el análisis del error . . . 128
5.2. Análisis del error en el dominio extendido 129
5.3. Estimación del error en Ω 136
5.4. Ejemplos numéricos 138

Conclusiones 143

Bibliografía 147

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de gráficos de soluciones que presentan capas límite. 13
1.2. Mallas graduadas sobre $\Omega = (0,1)$ (izquierda) y $\Omega = (0,1)^2$ (derecha). . . . 17
1.3. *Mesh functions* para $\varepsilon = 0{,}1$, con $M = 17$ y $h = 0{,}4$ (izquierda) y $M = 39$ y $h = 0{,}2$ (derecha). 17
1.4. Mallas de Shishkin en $\Omega = (0,1)$ (izquierda) y $\Omega = (0,1)^2$ (derecha), para $N = 12$. 22

2.1. Descomposición de Ω para la demostración de la Observación 2.1 y del Teorema 2.2 27
2.2. Descomposición de Ω para la demostración de la Proposición 2.1. 37
2.3. Divisón de $\Omega_s = [0, \frac{1}{2}]^2$ usada en la demostración del Lema 2.5 47
2.4. Notación en Ω_s para la prueba del Lema 2.6 55
2.5. Descomposición de Ω para la prueba del Teorema 2.2. 59
2.6. Notación para los lados de un elemento y sus longitudes. 64
2.7. Solución del Ejemplo 2.1 con $\varepsilon = 10^{-6}$. 68
2.8. Solución del Ejemplo 2.2 con $\varepsilon = 10^{-6}$. 69
2.9. Solución del Ejemplo 2.2, para $\varepsilon = 10^{-3}$, utilizando una malla graduada diseñada con $h = 0{,}1$ y $\varepsilon = 10^{-8}$. 71

3.1. Soluciones numéricas u_1 (izquierda) y u_2 (derecha) del Ejemplo 3.4.1 para $\varepsilon = 10^{-6}$. 102
3.2. Solución numérica del Ejemplo 3.4.2 con $\varepsilon = 10^{-6}$ y $\mu = 10^{-2}$. 104

4.1. Elemento S_{ij}. 111
4.2. Partición del cuadrado unitario utilizada en la demostración del Lema 4.3. 114
4.3. Solución típica del problema (4.27). 118
4.4. Superconvergencia en la norma de la energía de la solución post–procesada del problema (4.27). 118

5.1. Soluciones numéricas para el Ejemplo 5.1 con $s = 0{,}25$ (izquierda) y $s = 0{,}75$ (derecha). 139
5.2. Errores numéricos para el Ejemplo 5.1. 140
5.3. Soluciones numéricas para el Ejemplo 5.2, caso unidimensional, con $s = 0{,}25$ (izquierda) y $s = 0{,}75$ (derecha). 140
5.4. Soluciones numéricas para el Ejemplo 5.2, caso bidimensional, con $s = 0{,}25$ (izquierda) y $s = 0{,}75$ (derecha). 141
5.5. Errores numéricos para el Ejemplo 5.2, caso unidimensional. 141
5.6. Errores numéricos para el Ejemplo 5.2, caso bidimensional. 141
5.7. Errores numéricos para el Ejemplo 5.2, caso bidimensional, utilizando particiones uniformes en Ω. 142

Índice de tablas

2.1. Registro de errores para el experimento numérico del Ejemplo 2.1 con $\varepsilon = 10^{-6}$. 68
2.2. Registro de errores para el experimento numérico del Ejemplo 2.1 con $\varepsilon = 10^{-8}$. 69
2.3. Registro de errores para el Ejemplo 2.2usando mallas graduadas hacia toda la frontera de Ω con $\varepsilon = 10^{-6}$. 70
2.4. Registro de errores para el Ejemplo 2.2 usando mallas graduadas hacia toda la frontera de Ω con $\varepsilon = 10^{-8}$. 70
2.5. Registro de errores correspondiente al Ejemplo 2.2 para dsitintos valores de ε, utilizando una malla graduada fija diseñada con $h = 0{,}1$ y $\varepsilon = 10^{-8}$. . . 70

3.1. Errores numéricos para el Ejemplo 3.4.1. 102
3.2. Comparación de los errores obtenidos en la norma balanceada para el Ejemplo 3.4.1, para diferentes valores de ε. Columna A: se utilizan mallas graduadas para cada valor particular de ε y $h = 0{,}1$. Columna B: se utiliza una sola malla graduada con $\varepsilon = 10^{-9}$ y $h = 0{,}1$ en todos los casos. 103
3.3. Errores numéricos y tasas de convergencia correspondientes en normas balanceadas para el Ejemplo 3.4.2. 104
3.4. Errores numéricos para el Ejemplo 3.4.2 con $\varepsilon = 10^{-9}$ y diferentes valores de μ. La malla graduada utilizada es la diseñada para $\varepsilon = 10^{-9}$ y $h = 0{,}1$. . 104

5.1. Valores de l_{min} y μ_{min} para los datos del Ejemplo 5.1. 139
5.2. Registro de errores para el Ejemplo 2.2 con mallas graduadas hacia $x = 0$ e $y = 0$ con $\varepsilon = 10^{-6}$. 144
5.3. Registro de errores para el Ejemplo 2.2 con mallas graduadas hacia $x = 0$ e $y = 0$ con $\varepsilon = 10^{-8}$. 144
5.4. Errores numéricos para el Ejemplo dado por (5.50). 145

Introducción

En esta tesis abordamos el análisis y la aproximación numérica de problemas de reacción–difusión y operadores fraccionarios utilizando el método de elementos finitos en mallas graduadas. Estos problemas presentan desafíos significativos debido a la presencia de perturbaciones singulares u operadores no locales, lo que exige el desarrollo de técnicas especializadas para garantizar estimaciones de error robustas y eficientes.

Comenzamos con el estudio de ecuaciones estacionarias de reacción–difusión singularmente perturbadas. Estas ecuaciones son esenciales en diversas aplicaciones, ya que emergen de manera natural en sistemas formados por múltiples componentes que interactúan entre sí, y se utilizan para describir fenómenos de formación de patrones en sistemas biológicos, químicos y físicos (véase, por ejemplo, [24, 49, 51]).

Es bien sabido que, cuando el parámetro de perturbación singular es muy pequeño, la solución de estos problemas presenta capas límite que dificultan la aproximación de la misma utilizando mallas uniformes o cuasi–uniformes. La aproximación de estas ecuaciones singularmente perturbadas mediante métodos de elementos finitos ha sido ampliamente estudiada (ver, por ejemplo, [29, 35, 40, 55] y las referencias allí citadas), con un enfoque en la obtención de estimaciones de error uniforme para diferentes normas, incluida la norma de la energía y la norma L^∞.

La norma de la energía natural asociada al problema no es balanceada, es decir, cuando el parámetro de perturbación singular tiende a cero, la norma de la energía de la contribución de la capa (la parte singular) desaparece, mientras que la norma de la energía de la componente suave de la solución se mantiene. Para reflejar con mayor precisión el comportamiento de las capas en el método de los elementos finitos para problemas de reacción–difusión singularmente perturbados, se introdujeron normas balanceadas. Este tema se aborda en profundidad en [31], donde se diseñaron una nueva forma bilineal y un método de elementos finitos para facilitar el análisis con una norma balanceada. Trabajos posteriores ampliaron este estudio mediante el desarrollo de nuevos métodos de elementos finitos cuya norma de la energía asociada sea balanceada (véase, por ejemplo,

[2, 3, 13, 31, 43]) y la obtención de mejores estimaciones en normas balanceadas para métodos estándar (por ejemplo, [23, 45, 48]).

En un trabajo reciente, N. Madden y M. Stynes [43] introdujeron una nueva formulación variacional con peso para el problema. La norma natural asociada a esta formulación, que es una norma pesada, resulta balanceada. Además, los autores obtuvieron una estimación del error de primer orden, robusta respecto del parámetro de perturbación singular (salvo por un factor logarítmico), para bilineales a trozos en el cuadrado unitario, utilizando mallas de Shishkin.

Los resultados obtenidos en esta tesis incluyen estimaciones robustas en normas balanceadas. Básicamente, consideramos la formulación bilineal y la norma balanceada con peso introducida en [43], y obtenemos una aproximación robusta de la ecuación de reacción–difusión singularmente perturbada, con condiciones de borde Dirichlet homogéneas, en dos dimensiones, mediante el uso de elementos bilineales a trozos en mallas graduadas. Presentamos estimaciones del error casi óptimas cuando se utilizan mallas graduadas con un parámetro de graduación apropiado. Además, obtenemos un resultado de *supercloseness* para la norma balanceada, es decir, demostramos que, bajo hipótesis adecuadas, la diferencia entre la solución aproximada y la interpolación de Lagrange de la solución exacta es de orden superior al propio error. En particular, para obtener el resultado de *supercloseness*, es necesario probar ciertas propiedades de la función peso que caracterizan la formulación discreta, como así también necesitamos demostrar algunas estimaciones sobre las derivadas de la solución.

En [17] también se utilizaron mallas graduadas con elementos finitos bilineales para obtener estimaciones robustas del error y casi óptimas en la norma de la energía para un problema de reacción–difusión similar al que nos ocupa. En ese trabajo, el parámetro (y, por lo tanto, las mallas) podía tomarse independientemente del parámetro de perturbación singular de la ecuación. Ajustando el parámetro de graduación, pero independiente del parámetro de perturbación singular, se obtuvieron resultados de *supercloseness* en la norma de la energía en [19]. En el presente trabajo, para obtener resultados casi uniformes en la norma balanceada, utilizamos mallas del mismo tipo que las introducidas en [17] pero con una graduación que depende del parámetro de perturbación singular.

Aunque los resultados numéricos obtenidos con las mallas de Shishkin y las mallas graduadas son similares, estas últimas presentan algunas ventajas adicionales. De hecho, cuando se aproxima un problema singularmente perturbado con una malla adaptada a priori, es natural esperar que una malla diseñada para un valor determinado del parámetro de perturbación funcione bien también para valores mayores a este (incluimos una prueba

numérica de este funcionamiento). Este es el caso de las mallas graduadas, como se menciona en [18, 19]. Este hecho podría ser una propiedad importante en problemas en los que el parámetro de difusión no es constante o, también, para tratar sistemas en los que las diferentes ecuaciones tienen perturbaciones singulares de distinto orden, como abordamos posteriormente.

En el capítulo siguiente, extendemos el análisis a sistemas acoplados de ecuaciones de reacción–difusión con distintos parámetros de perturbación. Estos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias singularmente perturbadas surgen con frecuencia en la modelización de diversos fenómenos físicos. Por ejemplo, como se menciona en [57], estos sistemas se utilizan para analizar procesos de difusión complicados por reacciones químicas, donde los parámetros asociados a las derivadas de mayor orden representan los coeficientes de difusión de las sustancias involucradas. Otra aplicación interesante se encuentra en la ecología, donde los sistemas de reacción–difusión pueden emplearse para describir la interacción entre especies predador–presa [27]. Existen diversos trabajos dedicados a la aproximación numérica de sistemas acoplados de ecuaciones de reacción–difusión singularmente perturbadas (véase, por ejemplo, [15, 32, 36–39, 42, 44, 47, 54]).

Los problemas con diferentes capas en una misma dirección coordenada o los sistemas de ecuaciones de reacción–difusión siguen planteando varios desafíos. En [37], los autores estudian un sistema de dos ecuaciones de reacción–difusión en una dimensión, con diferentes parámetros pequeños multiplicando a las derivadas de segundo orden en las ecuaciones. En dicho trabajo, analizan aproximaciones por elementos finitos utilizando mallas de Shishkin y Bakhvalov, y obtienen estimaciones de error en la norma de la energía.

Como mencionamos anteriormente, en los problemas de reacción–difusión singularmente perturbados, la norma de la energía natural asociada con los métodos de elementos finitos estándar no es balanceada (en el sentido de [31]). A pesar del interés que esto ha despertado y de los avances mencionados, la estimación del error en normas balanceadas para sistemas acoplados de dos ecuaciones de reacción–difusión con parámetros pequeños y distintos sigue presentando preguntas abiertas, incluso en el caso unidimensional. Entre ellas, se encuentran el diseño de mallas eficientes en función de los diferentes parámetros de perturbación y la construcción de mallas adecuadas cuando los parámetros de perturbación singular presentan diferentes órdenes de magnitud [34, 46, 54].

En este trabajo, analizamos la aproximación por elementos finitos de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias singularmente perturbadas, utilizando elementos finitos lineales a trozos en mallas graduadas. Comenzamos analizando el caso general, con

coeficientes variables, pero con un mismo coeficiente de difusión constante (o parámetro de perturbación singular) en ambas ecuaciones. Luego, consideramos el caso en el que los coeficientes de difusión son distintos, posiblemente con diferentes órdenes de magnitud, asumiendo coeficientes constantes en ambas ecuaciones.

Las mallas graduadas presentan propiedades interesantes, entre ellas, la simplicidad en su diseño. En nuestro enfoque, se construyen considerando únicamente el parámetro más pequeño del sistema, lo que permite obtener estimaciones óptimas del error, similares a las introducidas en [5]. A diferencia de las mallas de Shishkin, que requieren tener en cuenta ambos parámetros y una adecuada elección del punto de transición, lo que simplifica su implementación. No obstante, presentan la dificultad de que los intervalos cercanos a las capas límite pueden volverse demasiado pequeños, lo que exige especial cuidado en la implementación numérica.

Para alcanzar esas estimaciones óptimas del error, nuestro análisis requiere de la introducción de adecuadas proyecciones en L^2 y del estudio tanto de su estabilidad, como su capacidad de interpolación en mallas graduadas. En particular, utilizamos resultados de estabilidad para las proyecciones L^2 sobre el espacio de elementos finitos. Si bien estos resultados son relativamente sencillos de demostrar en el caso de mallas cuasi–uniformes, la situación es más compleja en mallas que no verifican esta propiedad, como las graduadas. En esta tesis, obtenemos un resultado en este sentido, abordando las dificultades adicionales que surgen en el análisis de estabilidad en este tipo de mallas.

Posteriormente, en el Capítulo 5, analizamos la aproximación mediante elementos finitos del problema de Dirichlet para potencias fraccionarias de un operador elíptico simétrico de segundo orden. Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un número real $s \in (0,1)$ y una función f, el problema modelo se formula como sigue: hallar u tal que

$$\mathcal{L}^s u = f \quad \text{en } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \tag{1}$$

Consideramos, por simplicidad, el operador diferencial $\mathcal{L}$ dado por

$$\mathcal{L}v = -\Delta v + \bar{c}(x)v,$$

donde $\bar{c}(x) \in L^\infty(\Omega)$ es una función no negativa definida en Ω. Más generalmente, se pueden considerar operadores con un coeficiente de difusión.

La principal dificultad para obtener métodos numéricos eficientes para (1) radica en la no localidad del operador $\mathcal{L}^s$ [11, 12]. Entre los operadores no locales más estudiados se encuentra el Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^s$, con $s \in (0,1)$ y condiciones de contorno

Dirichlet homogéneas, debido a sus aplicaciones físicas que implican difusión de largo alcance o anómala. Por ejemplo, se utiliza en la modelización del flujo de ciertas partículas en medios porosos [7].

El operador no local $(-\Delta)^s$ en todo el espacio $\mathbb{R}^n$ puede definirse mediante la transformada de Fourier (ver [16, Sección 3]): para una función $u \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$(-\Delta^s)u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathcal{F}u), \tag{2}$$

donde $\mathcal{F}$ denota la transformada de Fourier, o bien, una definición equivalente puede darse a través de la integral de Riesz [16].

Sin embargo, no existe una única manera de definir $(-\Delta)^s w$ para funciones w definidas en un dominio acotado Ω. Una posibilidad consiste en extender adecuadamente w a una función u en todo el espacio $\mathbb{R}^n$ y utilizar de manera equivalente las definiciones existentes, por ejemplo, la definición (2). En relación con esto, [1] considera la formulación integral de Riesz y la restringe a funciones w con soporte en Ω. El operador resultante se denomina Laplaciano fraccionario *integral* y se denota por $(-\Delta)^s_I w$. Otra posibilidad es considerar el denominado Laplaciano fraccionario *regional* $(-\Delta)^s_R w$, que se define restringiendo la integral de Riesz a Ω. Se sabe que este operador es el generador infinitesimal de los llamados procesos de Lévy estables con restricciones en su dominio (*censored*) [8, 26]. En este trabajo utilizamos un tercer enfoque, que conduce al Laplaciano fraccionario *espectral* y corresponde a las potencias fraccionarias del operador de Laplace Dirichlet en el sentido de la teoría espectral.

Caffarelli y Silvestre, en [12], utilizando ese mismo operador localizan el problema (1) para $\mathcal{L} = -\triangle$, mediante una ecuación diferencial parcial elíptica no uniforme planteada en una dimensión espacial más. Demostraron que cualquier potencia $s \in (0, 1)$ del Laplaciano fraccionario en $\mathbb{R}^d$ puede realizarse mediante la aplicación Dirichlet–to–Neumann de una extensión al semiespacio superior $\mathbb{R}^{d+1}_+$ que, en lo que sigue, llamamos el *problema local extendido*. Este resultado fue ampliado por Cabré y Tan [11] y por Stinga y Torrea [58] para considerar dominios acotados Ω y operadores más generales, obteniéndose así un problema extendido sobre el cilindro semi–infinito $\mathcal{C} := \Omega \times (0, \infty)$.

Nochetto, Otárola y Salgado [50] propusieron aproximar la solución $u(x)$ de (1) a partir de la traza en $\Omega \times \{0\}$ de una solución aproximada $\mathcal{U}$ del problema local extendido. Analizaron este problema en el marco de espacios de Sobolev con peso y, basándose en el rápido descenso de $\mathcal{U}$, consideraron un truncamiento $\mathcal{C}_\mathcal{Y} := \Omega \times (0, \mathcal{Y})$ del cilindro $\mathcal{C}$, donde aproximan $\mathcal{U}$ mediante una discretización por elementos finitos de primer orden

con productos tensoriales. Posteriormente, en [6], estos autores, junto con Banjai, Melenk y Schwab, extendieron los resultados anteriores en varias direcciones. En particular, desarrollaron una novedosa técnica de diagonalización que desacopla los grados de libertad introducidos por una (semi–)discretización de Galerkin en la variable extendida. Este procedimiento reduce la extensión y–semidiscreta de Caffarelli–Silvestre a la resolución de ecuaciones independientes de reacción–difusión de segundo orden en Ω, algunas de las cuales están singularmente perturbadas. Mediante una aproximación por elementos finitos de tipo hp, lograron establecer convergencia exponencial para datos analíticos f, sin imponer condiciones de compatibilidad en la frontera (ver [6, Sección 9]).

La principal motivación de esta parte de la tesis radica en la observación de que los problemas de reacción–difusión singularmente perturbados en un dominio cuadrado pueden ser aproximados de manera casi óptima en la norma de la energía mediante elementos finitos de tipo h, bilineales a trozos, en mallas apropiadas (mallas graduadas) diseñadas independientemente del parámetro de perturbación (véase Lema 1.2, [17] y [19]). Partiendo de la técnica de diagonalización de [6], proponemos una estrategia para diseñar una única malla graduada en $\Omega = (0,1)^2$, que permita aproximar la sucesión de problemas de reacción–difusión generados por la semidiscretización del problema extendido en el cilindro truncado $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}}$. Las soluciones numéricas de estos problemas se combinan como en [6] para obtener una aproximación de la solución de (1).

Nuestras estimaciones de error son lineales, hasta un factor logarítmico, en función del número de ecuaciones de reacción–difusión a resolver. No obstante, es fundamental analizar el error de aproximación en términos del número de grados de libertad. En particular, del Teorema 5.1 se deduce que, para alcanzar un error de orden casi $O(M^{-1})$, es necesario resolver M problemas de reacción–difusión, cada uno con $O(M^{3/2})$ grados de libertad. Por lo tanto, con un total de $O(M^{5/2})$ grados de libertad, se obtiene una precisión de $O(M^{-1})$ (hasta factores logarítmicos). Esto representa una ligera mejora respecto de la complejidad de la versión h del método de elementos finitos para un problema tridimensional regular.

Para obtener una convergencia casi lineal en h hacia la solución de (1), nuestro enfoque requiere aproximaciones *superlineales* de cada uno de los problemas de reacción–difusión. En este sentido, en la Proposición 4.1 mostramos que un posprocesamiento local de la solución mediante elementos finitos bilineales en mallas graduadas proporciona una aproximación superconvergente que es casi uniforme con respecto al parámetro de perturbación singular. Este resultado se obtiene como consecuencia de una propiedad de *supercloseness* demostrada en [19], cuando el parámetro de graduación que define las mallas graduadas es suficientemente grande. La técnica para obtener resultados

de superconvergencia robusta ha sido utilizada previamente en [18], en el contexto de problemas de convección–difusión singularmente perturbados. Resultados similares para problemas de convección–difusión o reacción–difusión singularmente perturbados en mallas de Shishkin fueron obtenidos en [33, 61, 62].

A lo largo de la tesis, acompañamos el análisis teórico con experimentos numéricos que validan los resultados obtenidos. Las técnicas desarrolladas no solo proporcionan herramientas robustas para la solución de problemas singularmente perturbados y operadores fraccionarios, sino que también pueden extenderse a otros problemas en los que la presencia de capas límite o términos no locales dificulta la aproximación numérica.

Difusión de resultados

Esta tesis doctoral fue realizada durante el período Abril 2020 - Abril 2025 con una Beca Interna Doctoral otorgada por el CONICET. Además, fue parcialmente financiada por los siguientes proyectos de investigación.

1. Proyecto de Investigación PID–UNR 80020190100020UR: *Desarrollo y análisis de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales de tipo elementos finitos*. Director: Dr. Ariel L. Lombardi. Período: 2020–2022.

2. Proyecto de Investigación PICT–2018-03017: *Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales y Ecuaciones No Locales*. Director: Dr. Gabriel Acosta. Período: 2020–2023.

3. Proyecto de Investigación PID–UNR 80020220700222UR: *Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Parciales: Elementos Finitos y Métodos relacionados*. Director: Dr. Ariel L. Lombardi, Codirectora: Dra. Melani Barrios. Período: 2023–2026.

4. Proyecto de Investigación PIP–11220220100246CO: *Métodos Numéricos Para Ecuaciones Diferenciales y Nolocales y Temas de Análisis Relacionados*. Director: Dr. Gabriel Acosta. Período: 2024–2026.

Algunos de los resultados que dan lugar a esta tesis fueron publicados en revistas científicas y proceedings de congresos, y presentados en eventos científicos de carácter nacional e internacional.

Revistas internacionales con referato:

- M.G. Armentano, A.L. Lombardi, C. Penessi (2023). *Robust Estimates in Balanced Norms for Singularly Perturbed Reaction–Diffusion Equations Using Graded Meshes.* J Sci Comput **96**, 18. https://doi.org/10.1007/s10915-023-02245-y

- M.G. Armentano, A.L. Lombardi, C. Penessi (2024). *A Finite Element Analysis in Balanced Norms for a Coupled System of Singularly Perturbed Reaction–Diffusion Equations.* Computational Methods in Applied Mathematics. https://doi.org/10.1515/cmam-2023-0219

Proceedings de congresos:

- A. L. Lombardi, C. Penessi (2023). *Sobre la aproximación por diagonalización de la ecuación de difusión fraccionaria espectral.* IX Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial MACI, ISSN: 2314–3282, pp 71-74.

Preprints en revisión:

- M. Barrios, A.L. Lombardi, C. Penessi. *A finite element discretization of fractional problems using graded meshes.* En revisión en Journal of Computational and Applied Mathematics (ELSCAM-D-24-01721). Preprint.

Eventos científicos:

- *Problemas de reacción-difusión singularmente perturbados. Aproximación robusta en normas balanceadas usando mallas graduadas.* M.G. Armentano, A.L. Lombardi (expositor), C. Penessi. X Congreso Internacional de Matemática Aplicada y Computacional – CIMAC 2021 (internacional). Virtual.

- *Estimaciones robustas de FEM sobre mallas graduadas en normas balanceadas para problemas de reacción difusión singularmente perturbados.* M.G. Armentano, A.L. Lombardi, C. Penessi (expositora). Reunión de Comunicaciones Científicas de la Reunión Anual de Unión Matemática Argentina virtUMA2021 (nacional). Virtual.

- *Robust error estimates ina balanced norm for the approximation of reation-diffusion equations on graded meshes.* M.G. Armentano, A.L. Lombardi, C. Penessi (expositora). International Conference on Boundary and Interior Layers – BAIL 2022 (internacional). Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.

- *Sobre la aproximación por diagonalización de la ecuación de difusión fraccionaria espectral.* A.L. Lombardi, C. Penessi (expositora). IX Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial – MACI 2023 (nacional). Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina.

- *Discretización de un problema fraccionario usando mallas graduadas.* M. Barrios, A.L. Lombardi, C. Penessi (expositora). LXXII Reunión de Comunicaciones Científicas – UMA 2023 (nacional). Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos la notación y algunos resultados preliminares que utilizaremos en el resto de la tesis.

Para un dominio D, utilizamos la notación estándar para los espacios L^p junto con su respectiva norma, a saber,

$$\|u\|_{L^p(D)} := \left(\int_D |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(D)} := \text{ínf} \left\{ C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ c. t. p.} \right\}.$$

Sea $m \in \mathbb{N}_0$, en el espacio de Sobolev de funciones en D con derivadas hasta orden m en $L^2(D)$, $H^m(D)$, también empleamos la notación usual para sus respectivas normas y seminormas, esto es,

$$\|u\|_{m,D} := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(D)} \right\}^{1/2}, \quad |u|_{m,D} := \left\{ \sum_{|\alpha| = m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(D)} \right\}^{1/2}.$$

En particular, la norma $\|u\|_{0,D}$ denota la norma en L^2 de u sobre D. Además, $(\cdot,\cdot)_D$ denota el producto interno en $L^2(D)$. Cuando $D = \Omega$ y no existe ambigüedad, escribiremos $\|u\|_0$ en lugar de $\|u\|_{0,\Omega}$. También denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno euclídeo en $\mathbb{R}^d$ y definimos $|\cdot|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Los espacios $P_k(D)$ y $Q_k(D)$ denotan, respectivamente, el espacio de polinomios de grado total menor o igual que k y el espacio de polinomios de grado menor o igual que k en cada variable, ambos definidos sobre D. Para un rectángulo genérico $R \subset \mathbb{R}^2$, observemos

que

$$p \in P_k(R) \Leftrightarrow p(x,y) = \sum_{0 \le i+j \le k} a_{ij} x^i y^j$$

y

$$p \in Q_k(R) \Leftrightarrow p(x,y) = \sum_{0 \le i,j \le k} a_{ij} x^i y^j.$$

En particular, para $k = 1$, el espacio $Q_1(R)$ corresponde al espacio de funciones bilineales en R, es decir, polinomios de la forma

$$p(x,y) = a + bx + cy + dxy, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

por lo que se tiene

$$Q_1(R) = \text{span}\{1, x, y, xy\}.$$

A lo largo de este trabajo, la letra C denota una constante positiva genérica, cuyo valor puede variar de una aparición a otra, y que es independiente tanto de los parámetros de perturbación singular como del tamaño de las mallas. Además, dadas dos cantidades A y B, utilizamos la notación $A \lesssim B$ para indicar que $A \le CB$, mientras que $A \sim B$ significa que $A \lesssim B$ y $B \lesssim A$.

En las siguientes secciones presentamos un problema modelo de reacción–difusión singularmente perturbado, recordamos resultados teóricos y definiciones relacionadas, su formulación variacional y su aproximación por elementos finitos. Discutimos algunas de las dificultades asociadas a la naturaleza singularmente perturbada del problema, que motivan el uso de mallas adaptadas y normas apropiadas, e incluimos estimaciones conocidas que serán de utilidad en las demostraciones de nuestros teoremas. Finalmente, introducimos algunas notaciones y convenciones que emplearemos a lo largo del trabajo.

1.1. Problemas de reacción–difusión singularmente perturbados

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^2$ y $\partial\Omega$ su frontera. Consideramos el siguiente problema modelo de reacción–difusión

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u + b(x,y)u &= f(x,y), && \text{en } \Omega, \\ u &= 0, && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde ε es un parámetro positivo, $b \in L^\infty(\Omega)$, $0 < b_0^2 < b(x,y) < b_1^2$ para casi todo $(x,y) \in \Omega$, con $b_0 > 0$, y f es una función suave en $\overline{\Omega}$. Estas hipótesis son habituales en problemas singularmente perturbados de este tipo (véase [35, 55, 59]

Podemos observar que, si $\varepsilon = 0$, este es un problema algebraico ($u = f/b$). Mientras que, para $\varepsilon > 0$, se trata de un problema elíptico que debe satisfacer las condiciones de borde. En este trabajo nos enfocamos en el caso de reacción dominante, es decir, cuando el parámetro de difusión ε es muy pequeño ($0 < \varepsilon \ll 1$).

En esta situación particular, las condiciones de borde impuestas generan la aparición de capas límite en la solución, es decir, regiones donde su derivada alcanza valores extremadamente grandes. En la siguiente subsección analizamos con mayor detalle este comportamiento, que representa una dificultad importante para la aproximación numérica cuando se utilizan mallas uniformes o cuasi-uniformes.

1.1.1. Estimaciones puntuales para la solución en el cuadrado unitario

Si consideramos ahora el dominio $\Omega = (0,1)^2$ y suponemos las condiciones de compatibilidad descritas en [29] y sus referencias, expresadas como

$$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = 0,$$

entonces se garantiza que la solución u pertenece a $\mathcal{C}^4(\Omega) \cap \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ ([30]). Bajo estas condiciones, son válidas las siguientes estimaciones puntuales para u y sus derivadas.

Lema 1.1 *Tenemos que, para $(x,y) \in \Omega$ y $0 \leq k \leq 2$,*

$$\left|\partial_x^k u(x,y)\right| \leq C\left(1 + \varepsilon^{-k} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-k} e^{-b_0 \frac{1-x}{\varepsilon}}\right),$$
$$\left|\partial_y^k u(x,y)\right| \leq C\left(1 + \varepsilon^{-k} e^{-b_0 \frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-k} e^{-b_0 \frac{1-y}{\varepsilon}}\right),$$

donde C depende de b, f y Ω, siendo independiente de ε.

Para $k \leq 2$, estas estimaciones se demuestran en [29, Lemas 3.1, 3.3 y 3.5].

Cabe señalar que, al tomar $k = 0$, se concluye que la solución u es uniformemente acotada en el dominio Ω. Sin embargo, para $k \geq 1$, las derivadas de u pueden alcanzar valores muy grandes cerca del borde, particularmente cuando ε es pequeño. En dichas regiones, la derivada k-ésima es del orden de $O(\varepsilon^{-k})$, aunque decae exponencialmente hacia el interior del dominio. Esta concentración de las variaciones de la solución en entornos

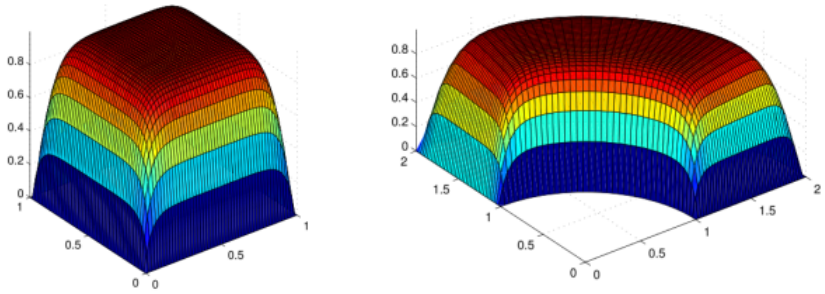


Figura 1.1: Ejemplos de gráficos de soluciones que presentan capas límite.

cercanos al borde del dominio da lugar a las denominadas capas límite. En la Figura 1.1 podemos ver algunos gráficos típicos de las soluciones de estos problemas.

1.1.2. Aproximación por elementos finitos

Sea $V = H_0^1(\Omega)$, multiplicando la ecuación de reacción–difusión en (1.1) por $v \in V$ e integrando por partes sobre Ω, la formulación variacional del problema presentado se expresa de la siguiente manera: hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u,v) := \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy + \int_\Omega b(x,y) v \, dxdy = \int_\Omega f(x,y) v \, dxdy, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.2}$$

Consideramos la norma de la energía natural asociada al problema dado

$$\|v\|_\varepsilon = \left(\varepsilon^2 \|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

que es la norma dada por la forma bilineal definida arriba.

Observemos que

$$\begin{aligned} B(v,v) &= \varepsilon^2 \|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2 + (bv, v) \\ &\geq \text{mín}\{1, b_0^2\} \left(\varepsilon^2 \|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2\right) \\ &= \text{mín}\{1, b_0^2\} \|v\|_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

y, por la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned} B(v,w) &\leq \varepsilon^2 \|\nabla v\|_0 \|w\|_0 + b_1^2 \|v\|_0 \|w\|_0 \\ &\leq \|v\|_\varepsilon \|w\|_\varepsilon + b_1^2 \|v\|_\varepsilon \|w\|_\varepsilon \\ &\leq \text{máx}\{1, b_1^2\} \|v\|_\varepsilon \|w\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

Notemos, además, que la aplicación $v \mapsto (f, v)$ es un funcional acotado en $H_0^1(\Omega)$. En efecto, alicando nuevamente la desigualdad de Cauchy–Schawarz y recordando que $f \in L^\infty(\Omega)$, tenemos que

$$|(f, v)| \leq \|f\|_0 \|v\|_0 \leq \|f\|_\infty^2 \|v\|_\varepsilon.$$

Combinando este resultado con las dos desigualdades de arriba, por el Teorema de Lax–Milgram tenemos que (1.2) tiene una única solución u en $H_0^1(\Omega)$.

También observamos que las constantes que aparecen al demostrar la continuidad y coercitividad de la forma bilineal B no dependen del parámetro ε. Si, en cambio, se trabajara con la norma H^1, que es equivalente a la norma de la energía pero con constantes de equivalencia que sí dependen de ε, se obtendrían constantes en las estimaciones de continuidad y coercitividad que también dependerían de ε, lo cual no resulta deseable.

Ahora, definiendo un espacio discreto $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, planteamos la formulación por elementos finitos como sigue: hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$B(u_h, v_h) = \int_\Omega f(x, y) v_h \, dxdy, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{1.3}$$

Como V_h así definido es un espacio de elementos finitos conforme, nuevamente por el Teorema de Lax–Milgram podemos afirmar que el problema discreto (1.3) también tiene una única solución, en este caso, $u_h \in V_h$.

Además, combinando (1.2) y (1.3), se obtiene la propiedad de ortogonalidad de Galerkin:

$$B(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall \, v_h \in V_h. \tag{1.4}$$

Más aún, si $w_h \in V_h$, por la coercitividad y continuidad de B, y la propiedad (1.4), obtenemos

$$\begin{aligned} \min\{1, b_0^2\} \|u - u_h\|_\varepsilon^2 &\leq B(u - u_h, u - u_h) \\ &= B(u - u_h, u - w_h) \\ &\leq 2 \max\{1, b_1^2\} \|u - u_h\|_\varepsilon \|u - w_h\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente estimación del error de aproximación

$$\|u - u_h\|_\varepsilon \leq 2 \frac{\max\{1, b_1^2\}}{\min\{1, b_0^2\}} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_\varepsilon. \tag{1.5}$$

Ahora, dada una familia de mallas triangulares (o rectangulares) $\{\mathcal{T}_h\}$ de Ω tales que, si denotamos con h_K al diámetro de K entonces, $h = \max\{\text{diam } K, K \in \mathcal{T}_h\}$. Sea ρ_K el

diámetro interior del elemento K (esto es, el diámetro de la circunferencia más grande contenida en K), decimos que la familia de mallas $\{\mathcal{T}_h\}$ es regular si existe una constante $\sigma > 0$ tal que

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall h > 0.$$

Asociado a $\mathcal{T}_h$, consideramos el espacio de elementos finitos

$$V_0^1(\mathcal{T}_h) = \{v \in \mathcal{C}(\Omega) : v|_K \in P_1(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

para mallas triangulares, o

$$V_0^1(\mathcal{T}_h) = \{v \in \mathcal{C}(\Omega) : v|_K \in Q_1(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h, v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$$

en el caso de mallas rectangulares, que denotaremos por simplicidad como V_h. De manera análoga, denotamos por $u_h = u_{\mathcal{T}_h}$ a la aproximación por elementos finitos seccionalmente lineales (o bilineales) de u.

Luego, para probar la convergencia del método cuando $h \to 0$, teniendo en cuenta (1.5), es suficiente demostrar que existen buenas aproximaciones de u en el espacio V_h con la norma de la energía. Una forma natural y habitual de lograrlo es mediante la interpolación de Lagrange.

Para cada elemento K y $u \in H^2(K)$, se conocen las siguientes estimaciones de error para la interpolación de Lagrange ([10, 14]):

$$\begin{aligned} \|u - u_I\|_{0,K} &\leq C h_K^2 |u|_{2,K}, \\ \|u - u_I\|_{1,K} &\leq C h_K |u|_{2,K}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde C es una constante positiva que depende de σ, pero es independiente de u y h_K.

Sumando las estimaciones dadas en (1.6) sobre todos los elementos K de $\mathcal{T}_h$, se obtienen las siguientes estimaciones globales del error de interpolación, para toda $u \in H^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|u - u_I\|_0 &\leq C h^2 |u|_2, \\ \|u - u_I\|_1 &\leq C h |u|_2, \end{aligned}$$

donde C es una constante positiva independiente de u y h.

Luego, juntando estas estimaciones con el hecho de que $|u|_2 \leq C\varepsilon^{-3/2}$ (Lema 1.1),

obtenemos que

$$\|u - u_I\|_\varepsilon \leq C\left(\varepsilon\|\nabla(u - u_I)\|_0 + \|u - u_I\|_0\right) \leq C\left(\varepsilon h|u|_2 + h^2|u|_2\right) \leq C(h\varepsilon^{-1/2} + h^2\varepsilon^{-3/2}).$$

Con lo cual,

$$\|u - u_h\|_\varepsilon \leq C(h\varepsilon^{-1/2} + h^2\varepsilon^{-3/2}).$$

Observamos que, al mantener fija la malla y considerar distintos problemas con $\varepsilon \to 0$, esta estimación pierde precisión. En este sentido, decimos que la estimación no es robusta con respecto al parámetro ε. En nuestro análisis, nos interesan estimaciones que sí sean robustas en la norma de la energía frente a este parámetro, es decir, estimaciones de la forma

$$\|u - u_h\|_\varepsilon \leq Ch,$$

donde C sea una constante uniforme respecto de ε.

Existe una extensa literatura dedicada al desarrollo de técnicas para obtener estimaciones robustas, tanto en el contexto de problemas de reacción–difusión como en el de problemas de reacción–convección–difusión, que presentan mayores dificultades analíticas (ver [35, 53] y sus referencias). En lo que sigue, nos centramos en el uso de mallas adaptadas a las capas límite. En particular, consideramos las denominadas *mallas graduadas*, tal como se definen en [17].

1.2. Mallas graduadas y estimaciones uniformes

Dado un parámetro $h > 0$, relacionado con el tamaño de la malla (ver Observación 1.1), y un parámetro de graduación $\alpha \in (0, 1)$, introducimos la partición $\{\xi_i\}_{i=0}^{mid}$ del intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ dada por

$$\begin{cases} \xi_0 = 0, \\ \xi_1 = h^s, \quad \text{con } s := \dfrac{1}{1-\alpha} \\ \xi_{i+1} = \xi_i + h\xi_i^\alpha, \quad i = 2, \ldots, mid - 1, \\ \xi_{mid} = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

donde mid es tal que $\xi_{\text{mid}\,-1} < \frac{1}{2}$ y $\xi_{\text{mid}\,-1} + h\xi_{\text{mid}\,-1}^\alpha \geq \frac{1}{2}$. Suponemos que el intervalo $(\xi_{\text{mid}\,-1}, \xi_{\text{mid}})$ no es demasiado pequeño en comparación con el anterior $(\xi_{\text{mid}\,-2}, \xi_{\text{mid}\,-1})$ (si este no es el caso, simplemente eliminamos el nodo $\xi_{\text{mid}\,-1}$). Extendemos esta grilla a una

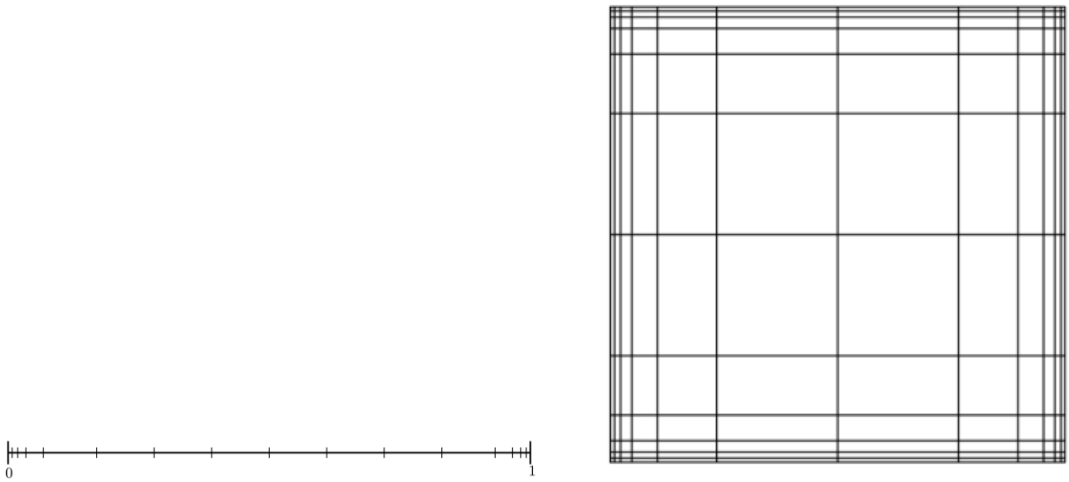


Figura 1.2: Mallas graduadas sobre $\Omega = (0,1)$ (izquierda) y $\Omega = (0,1)^2$ (derecha).

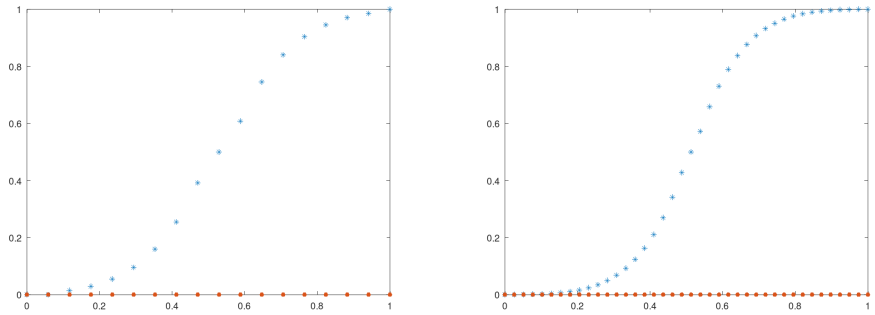


Figura 1.3: *Mesh functions* para $\varepsilon = 0{,}1$, con $M = 17$ y $h = 0{,}4$ (izquierda) y $M = 39$ y $h = 0{,}2$ (derecha).

partición $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{mid}, \ldots, \xi_M\}$ con $M = 2mid$, de $[0,1]$, fijando $\xi_i = 1 - \xi_{M-i}$ para $i = mid + 1, \ldots, M$.

Considerando $\Omega = (0,1)^2$, introducimos una malla bidimensional $\mathcal{T}_h = \{R\}$ sobre Ω, construida como un producto tensorial y compuesta por rectángulos $R = R_{ij}$, definidos como:

$$R_{ij} = (\xi_{i-1}, \xi_i) \times (\xi_{j-1}, \xi_j), \qquad 1 \leq i, j \leq M.$$

La Figura 1.2 muestra la estructura característica de estas mallas tanto en una como en dos dimensiones.

Para mostrar el comportamiento de las mallas graduadas cerca de las capas, en la Figura 1.3 graficamos los nodos x_i contra i/M para $i = 0, \ldots, M$.

Sea $h_k = \xi_k - \xi_{k-1}$, las longitudes de los lados de R_{ij} son h_i y h_j. A lo largo de esta

tesis, utilizaremos repetidamente la siguiente propiedad de las mallas $\mathcal{T}_h$.

Para $R_{ij} \in \mathcal{T}_h$ con $1 < i < M$, se cumple que

$$h_i \leq h \,\text{mín}\{x, 1-x\}^\alpha, \qquad \forall (x,y) \in R_{ij}. \tag{1.7}$$

Análogamente, para $R_{ij} \in \mathcal{T}_h$ con $1 < j < M$, se cumple que

$$h_j \leq h \,\text{mín}\{y, 1-y\}^\alpha, \qquad \forall (x,y) \in R_{ij}. \tag{1.8}$$

Por otro lado, observemos que, dado que $\xi_i - \xi_{i-1} = h\xi_{i-1}^\alpha$ para $i = 1, \ldots, \text{mid} - 1$, la longitud máxima de los subintervalos es $h(1/2)^\gamma \sim h$. Por lo tanto, como M representa la cantidad de intervalos de la malla, se tiene que $M \gtrsim 1/h$.

Además, se demuestra en [17, demostración del Corolario 4.5] que

$$M \lesssim \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{h} \log\left(\frac{1}{h}\right),$$

y, usando que $M \gtrsim 1/h$, también se obtiene

$$h \lesssim \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{M} \log M,$$

lo cual da lugar a la siguiente observación.

Observación 1.1 *El número de puntos $M+1$ en la malla a lo largo de los ejes x e y está relacionado con el parámetro h, que define la malla $\mathcal{T}_h$, mediante la siguiente desigualdad:*

$$\frac{1}{M} \lesssim h \lesssim \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{M} \log M.$$

Esta relación entre el parámetro h y la cantidad de nodos de la malla es similar a la que se obtiene en el caso de mallas cuasi–uniformes, salvo por la presencia del factor logarítmico $\log M$.

La motivación para introducir este tipo de mallas surge de la idea de aplicar, a problemas singularmente perturbados, técnicas similares a las que se emplean en problemas elípticos con singularidades puntuales. Dichas técnicas se basan en estimaciones de la solución en espacios de Sobolev con peso ([25]). En nuestro caso, las estimaciones con peso

que utilizamos son las siguientes ([17, Lemas 4.1 y 4.2]): si $\alpha \geq \frac{1}{2}$ entonces

$$\left\| x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{0,\left(0,\frac{3}{4}\right)^2} \leq C, \quad \left\| y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{0,\left(0,\frac{3}{4}\right)^2} \leq C,$$

$$\varepsilon \left\| x^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{0,\left(0,\frac{3}{4}\right)^2} \leq C, \quad \varepsilon \left\| y^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_{0,\left(0,\frac{3}{4}\right)^2} \leq C,$$

donde C es una constante independiente de ε.

Observemos que, cambiando x o y por $1-x$ o $1-y$ según corresponda, se obtienen estimaciones análogas para los subdominios $\left(\frac{1}{4},1\right)\times\left(0,\frac{3}{4}\right)$, $\left(0,\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4},1\right)$, $\left(\frac{1}{4},1\right)\times\left(\frac{1}{4},1\right)$.

Entonces, utilizando estas estimaciones y las mallas graduadas presentadas al comienzo de esta sección, con un parámetro de graduación α arbitrario en el intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right)$, es posible demostrar que tanto el error de interpolación como, en consecuencia, el error de aproximación en la norma de la energía, se encuentra acotado de manera robusta respecto del parámetro ε ([17, Corolario 4.5]).

Lema 1.2 *Sea u la solución de (1.1) y u_h su aproximaión por elementos finitos Q_1 obtenida utilizando la malla graduada $\mathcal{T}_h$, con $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$. Entonces existe una constante C independiente de ε y de h tal que*

$$\|u - u_h\|_\varepsilon \leq Ch.$$

Observemos que, como estamos empleando elementos bilineales, se obtiene el orden esperado en h.

Recordemos que la malla se define a partir del parámetro h, pero en general lo que se busca es tener controlada la cantidad de nodos de la malla en función de dicho parámetro. Sin embargo, a partir de la relación dada en la Observación 1.1, se obtiene la siguiente estimación:

$$\|u - u_h\|_\varepsilon \leq C \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{M} \log M.$$

Si bien esta estimación no es óptima debido a la aparición del factor logarítmico, se trata de una estimación casi–óptima el error de aproximación en la norma de la energía. Lo más relevante es que resulta ser robusta con respecto al parámetro de perturbación singular ε.

Sin embargo, existe una dificultad asociada al uso de la norma de la energía. A partir de las estimaciones a priori del Lema 1.1, se puede probar que $\|u\|_0$ se comporta como $O(1)$, mientras que el otro término que interviene en la norma de la energía, $\varepsilon\|\nabla u\|_\varepsilon$, es

de orden $O(\varepsilon^{1/2})$. En efecto, se sigue del Lema 1.1 que una solución típica u verifica

$$\begin{aligned} |u(x,y)| &\leq C, \\ |\partial_x u(x,y)| &\leq C\left(1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon}e^{-b_0\frac{1-x}{\varepsilon}}\right), \\ |\partial_y u(x,y)| &\leq C\left(1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-b_0\frac{y}{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon}e^{-b_0\frac{1-y}{\varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

Luego, claramente tenemos

$$\|u\|_0 \leq C.$$

Además,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2\|\partial_x u\|_0^2 &\leq C\varepsilon^2\int_0^1\int_0^1\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-2b_0\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-2b_0\frac{1-x}{\varepsilon}}\right)dy\,dx \\ &= C\varepsilon^2\int_0^1\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-2b_0\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-2b_0\frac{1-x}{\varepsilon}}\right)dx. \end{aligned}$$

Haciendo los cambios de variables $z=\frac{x}{\varepsilon}$ y $z=\frac{1-x}{\varepsilon}$ para integrar el segundo y tercer término respectivamente, obtenemos

$$\varepsilon^2\|\partial_x u\|_0^2 \leq C\varepsilon^2 + 2C\varepsilon\int_0^{+\infty} e^{-2b_0 x} \leq C\varepsilon.$$

Claramente, una acotación similar vale para $\varepsilon^2\|\partial_y u\|^2$. Así, vemos que las componentes de la norma de la energía son, en general, de distintos órdenes respecto de ε:

$$\|u\|_0 = O(1), \qquad \varepsilon\|\nabla u\|_0 = O(\varepsilon^{1/2}).$$

Esto implica que, al disminuir ε, la norma de la energía queda esencialmente dominada por el término en norma L^2. Por esta razón, decimos que dicha norma no es balanceada con respecto al parámetro ε. En consecuencia, cuando ε tiende a cero, acotar el error en la norma de la energía resulta prácticamente equivalente a hacerlo en la norma L^2, lo cual conduce a estimaciones relativamente débiles y, en general, no satisfactorias desde el punto de vista del análisis numérico.

1.3. Estimaciones en normas balanceadas

En la última década, se han desarrollado numerosos trabajos que apuntan a obtener estimaciones en normas balanceadas, es decir, normas en las que ambos términos

(típicamente asociados a la parte difusiva y a la parte reactiva del problema) se comportan como $O(1)$, independientemente del parámetro de perturbación ε (véase, por ejemplo, [2, 3, 13, 31, 33, 35, 45, 54, 59, 61]). Estas normas se denominan *balanceadas* precisamente porque buscan equilibrar las contribuciones de las distintas partes del problema. Un ejemplo muy estudiado en la literatura está dado por una versión más fuerte y balanceada de la norma de la energía:

$$\|v\|_{bal} = \left(\varepsilon\|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.9}$$

Observemos que, en comparación con la norma de la energía clásica, esta incluye un término ponderado con una potencia menor de ε, lo cual resulta clave para obtener estimaciones de error uniformemente acotadas respecto del parámetro de perturbación, como se discute en detalle en [55, Capítulo 5]. Esta elección se justifica también a partir de los cálculos realizados previamente con la norma de la energía, donde observamos que los errores correspondientes a los términos difusivo y reactivo se comportan de manera desigual en presencia de una capa límite. Al introducir este tipo de ponderación, se equilibran las contribuciones de ambos términos, y se obtiene una norma que refleja con mayor fidelidad el comportamiento global de la solución en todo el dominio. En este sentido, la norma $\|\cdot\|_{bal}$ resulta claramente *balanceada*.

Esta norma ha sido utilizada exitosamente en combinación con mallas adaptadas, como las mallas de Shishkin, para obtener estimaciones robustas en problemas singularmente perturbados (véase, por ejemplo, [35, 45, 48, 53, 59, 60, 64]). Este enfoque permite que el error del método numérico se mantenga controlado incluso en presencia de capas límite estrechas.

Las *mallas de Shishkin*, introducidas originalmente en [56], son mallas adaptadas diseñadas específicamente para capturar las capas límite que aparecen en este tipo de problemas. Se construyen a partir de una partición del intervalo $[0, 1]$ que concentra los nodos cerca de los bordes del dominio, es decir, en las regiones donde la solución presenta gradientes "pronunciados". Dado un número entero positivo N divisible por tres, se considera una partición que asigna $N/3$ subintervalos uniformes a los intervalos $[0, \tau]$ y $[1 - \tau, 1]$, y $N/3$ subintervalos uniformes al intervalo interior $[\tau, 1 - \tau]$, donde

$$\tau := \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \sigma\frac{\varepsilon}{b_0^2}\log N\right\},$$

es el denominado *parámetro de transición*, y $\sigma > 0$ es una constante arbitraria

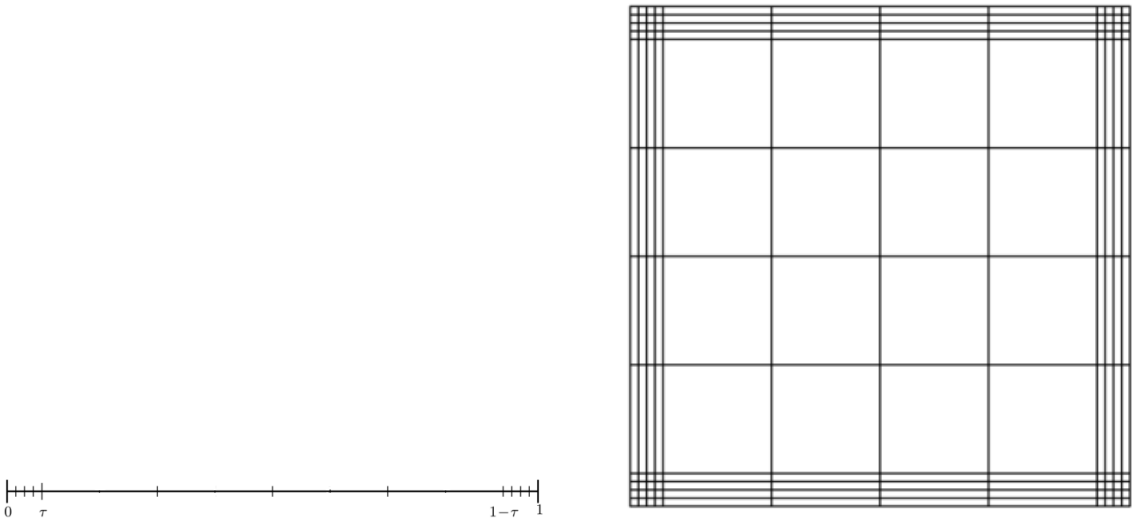


Figura 1.4: Mallas de Shishkin en $\Omega = (0,1)$ (izquierda) y $\Omega = (0,1)^2$ (derecha), para $N = 12$.

(típicamente, $\sigma \geq 2$) ([55, Capítulo 5]). Este parámetro determina la ubicación de la transición entre las regiones de malla fina (cercanas a las fronteras) y gruesa (en el interior del dominio), y constituye uno de los elementos más delicados en el diseño de este tipo de mallas, ya que depende explícitamente de ε.

La malla en $\Omega = (0,1)^2$ se define entonces como el producto tensorial de las particiones unidimensionales en ambas direcciones coordenadas. La Figura 1.4 muestra la disposición característica de estas mallas, tanto en el caso unidimensional como bidimensional.

Observemos que las mallas graduadas que definimos anteriormente son sustancialmente diferentes de las mallas de Shishkin. En particular, las mallas graduadas utilizadas en el Lema 1.2 son independientes del parámetro de perturbación ε, lo que representa una ventaja significativa tanto desde el punto de vista computacional como en el diseño de mallas.

Volviendo a las mallas de Shishkin, existen numerosos artículos donde se analiza su desempeño en normas balanceadas. Por ejemplo, si denotamos por u la solución exacta y por u^N la solución numérica correspondiente sobre una malla de Shishkin con $N \times N$ elementos, tal como fue definida anteriormente, entonces en [23, Teorema 2.3] se obtiene la estimación

$$\|u - u^N\|_{bal} \leq C \frac{1}{N} (\log N)^{\frac{3}{2}},$$

la cual es robusta respecto al parámetro ε, para la norma $\|\cdot\|_{bal}$ definida en (1.9). La

demostración se basa en estimaciones de error para la proyección L^2 sobre el espacio de elementos finitos, un tipo de resultados que suele ser difícil de obtener cuando se utilizan mallas no uniformes. En el caso particular de las mallas de Shishkin, tales estimaciones son posibles gracias a que estas mallas son uniformes a trozos, lo que permite acotar el error de la proyección L^2 en norma L^∞ mediante un error de interpolación.

Mallas de tipo Shishkin también fueron empleadas en [45] para la aproximación de problemas de reacción–difusión en una y dos dimensiones mediante un método *hp*. En ese trabajo, se obtiene convergencia exponencial con respecto al grado de aproximación, bajo la hipótesis de que los datos del problema son analíticos (ver [45, Corolarios 2.7 y 3.7]). La estabilidad en norma H^1 de la proyección L^2 sobre el espacio de elementos finitos resulta fundamental para la obtención de estos resultados.

Capítulo 2

Estimaciones en normas balanceadas para problemas de reacción–difusión

En este capítulo, proponemos y analizamos un método de elementos finitos para resolver problemas estacionarios de reacción–difusión singularmente perturbados mediante el uso de mallas graduadas.

En las primeras secciones, presentamos el problema y la formulación con peso introducida en [43], considerando elementos bilineales a trozos en mallas graduadas. Obtenemos estimaciones de error robustas y casi óptimas en la norma balanceada, además de demostrar un resultado de *supercloseness*, que indica que la diferencia entre la solución aproximada y la interpolación de Lagrange de la solución exacta, en la norma balanceada con peso, es de orden superior al propio error. Para ello, analizamos propiedades específicas de la función peso utilizada en la formulación discreta y demostramos ciertas estimaciones sobre las derivadas de la solución.

Comparando con enfoques previos basados en mallas de Shishkin, observamos que las mallas graduadas ofrecen ventajas adicionales, en particular, una mejor respuesta a variaciones en el parámetro de perturbación. Finalmente proporcionamos ejemplos numéricos que validan los resultados obtenidos.

2.1. Formulación del problema

En este capítulo retomamos el problema de reacción–difusión (1.1), introducido en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u + b(x,y)u &= f(x,y), && \text{en } \Omega, \\ u &= 0, && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $0 < \varepsilon < 1$, $b \in L^\infty(\Omega)$, $0 < b_0^2 < b(x,y) < b_1^2$ para casi todo $(x,y) \in \Omega$, con $b_0, b_1 > 0$, y f función suave en $\overline{\Omega}$.

En un trabajo reciente, Madden y Stynes [43] proponen la formulación variacional del problema (2.1) que describimos a continuación. Sea

$$\beta(x,y) = 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\gamma d(x,y)}{\varepsilon}}$$

una función peso, donde γ es un parámetro positivo fijo (por el momento arbitrario) y $d(x,y)$ es la distancia euclidea a la frontera $\partial\Omega$. Esta función peso es básicamente la misma que la utilizada en Adler et al. [3], aunque en dicho trabajo los autores reformulan el problema de reacción–difusión como un sistema de ecuaciones. Satisface la siguiente propiedad

$$|\nabla \beta(x,y)| \leq \frac{\gamma}{\varepsilon} \beta(x,y) \quad \text{ p. c. t. } (x,y) \in \Omega, \tag{2.2}$$

que será de gran utilidad a lo largo del capítulo y demostramos a continuación.

En primer lugar, podemos observar que si $(x',y') \in \Omega$ y tomamos $(x'_d, y'_d) \in \partial\Omega$ tal que $d(x',y') = |(x',y') - (x'_d, y'_d)|$, entonces por la desigualdad triangular tenemos que

$$d(x,y) \leq |(x,y) - (x'_d, y'_d)| \leq |(x,y) - (x',y')| + |(x',y') - (x'_d, y'_d)| = |(x,y) - (x',y')| + d(x',y').$$

Análogamente, obtenemos que $d(x',y') \leq |(x',y') - (x,y)| + d(x,y)$. Por lo tanto,

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq |(x,y) - (x',y')|, \quad \forall (x,y), (x',y') \in \Omega.$$

Esto es, $d(\cdot)$ es una función Lipschitz en $\overline{\Omega}$, con constante $L = 1$. Luego, por el Teorema de Rademacher [22, p. 296], resulta que d es diferenciable casi todo punto en Ω, y

$$|\nabla d(x,y)| \leq 1 \quad \text{ p. c. t. } (x,y) \in \Omega.$$

Más precisamente, en el caso $\Omega = (0,1)^2$, que es el que nos interesará más adelante, tenemos que d es continua en Ω y diferenciable en todo punto salvo sobre las rectas $x = y$

y $x+y=1$. Luego, si β es diferenciable en (x,y) tenemos

$$\nabla\beta(x,y)=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\gamma d(x,y)}{\varepsilon}}\left(\frac{-\gamma\nabla d(x,y)}{\varepsilon}\right)=-\frac{\gamma\nabla d(x,y)}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\gamma d(x,y)}{\varepsilon}}\quad \text{p. c. t. } (x,y)\in\Omega,$$

y resulta

$$|\nabla\beta(x,y)|\leq\frac{\gamma}{\varepsilon^2}e^{-\frac{\gamma d(x,y)}{\varepsilon}}\leq\frac{\gamma}{\varepsilon}\beta(x,y)\quad \text{p. c. t. } (x,y)\in\Omega,$$

obteniendo así la propiedad enunciada.

Ahora, consideramos la norma con peso

$$|||v|||_\beta=\left(\varepsilon^2\|\nabla v\|_\beta^2+\|v\|_\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $\|v\|_\beta=(\beta v,v)^{\frac{1}{2}}$. Usamos la notación $|||\cdot|||_{\beta,D}$ y $\|\cdot\|_{\beta,D}$, para denotar las normas con peso β en el subdominio D. Cuando $D=\Omega$, omitimos el subíndice del dominio.

Observación 2.1 *La norma con peso $|||\cdot|||_\beta$ es balanceada [43, Observación 3]. De hecho, si consideramos $u(x,y)=e^{-\frac{x+y}{\varepsilon}}$ (una componente de una solución típica de (2.1)), sus componentes $\varepsilon^2\|\nabla u\|_\beta^2$ y $\|u\|_\beta^2$ son ambas $O(1)$, como podemos ver a continuación.*

$$\begin{aligned}\|u\|_\beta^2&=(\beta u,u)^{\frac{1}{2}}\\&=\int_\Omega e^{-2\frac{x+y}{\varepsilon}}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}\right)dxdy\\&\leq 1+\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}dxdy\\&=1+\sum_{i=1}^4\int_{\Omega_i}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}dxdy\sim C,\end{aligned}$$

donde $\Omega=\cup_{i=1}^4\Omega_i$ como se muestra en la Figura 2.1 y $\int_{\Omega_i}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}\sim C\ \forall i$, puesto que $d(x,y)|_{\Omega_1}=y, d(x,y)|_{\Omega_2}=1-x, d(x,y)|_{\Omega_3}=1-y, d(x,y)|_{\Omega_4}=x\ y$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}dxdy&=\int_{\Omega_1}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{y}{\varepsilon}}dxdy\leq\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{y}{\varepsilon}}dxdy\\&=\int_0^1\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{y}{\varepsilon}}dy=\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma z}\varepsilon\,dz\leq\int_0^\infty e^{-\gamma z}dz=\frac{1}{\gamma},\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $z=\frac{y}{\varepsilon}$. Para las demás integrales sobre Ω_i, $i=2,3,4$, se puede obtener el mismo resultado aplicando adecuados cambios de variable en cada caso.

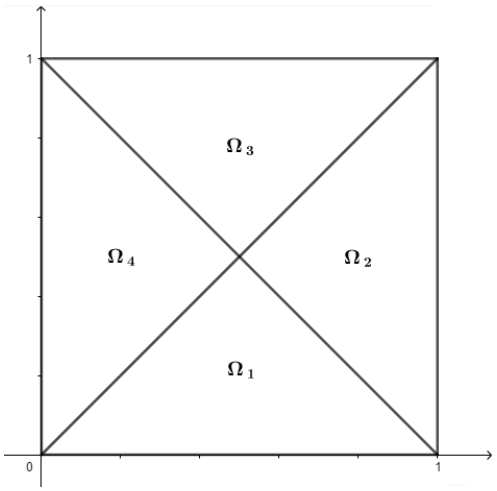


Figura 2.1: Descomposición de Ω para la demostración de la Observación 2.1 y del Teorema 2.2

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2\|\nabla u\|_\beta^2 &= \varepsilon^2\left(\beta\nabla u, \nabla u\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \varepsilon^2 \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-2\frac{x+y}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}\right) dxdy \\
&= \int_\Omega e^{-2\frac{x+y}{\varepsilon}} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}\right) dxdy \\
&= \int_\Omega e^{-2\frac{x+y}{\varepsilon}}\, dxdy + \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{2(x+y)+\gamma d(x,y)}{\varepsilon}}\, dxdy \\
&\leq 1 + \sum_{i=1}^{4} \int_{\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{2(x+y)+\gamma d(x,y)}{\varepsilon}}\, dxdy \sim C,
\end{aligned}$$

donde tomamos $\Omega = \cup_{i=1}^4 \Omega_i$ *como antes y entonces siguiendo el mismo razonamiento tenemos que* $\int_{\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{2(x+y)+\gamma d(x,y)}{\varepsilon}}\, dxdy \sim C\, \forall i$*, en efecto, por ejemplo,*

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{2(x+y)+\gamma d(x,y)}{\varepsilon}}\, dxdy &= \int_{\Omega_1} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{2(x+y)+\gamma y}{\varepsilon}}\, dxdy = \int_{\Omega_1} \frac{1}{\varepsilon} e^{-(2+\gamma)\frac{y}{\varepsilon} - 2\frac{x}{\varepsilon}}\, dxdy \\
&\leq \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} e^{-(2+\gamma)\frac{y}{\varepsilon} - 2\frac{x}{\varepsilon}}\, dxdy = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} e^{-(2+\gamma)\frac{y}{\varepsilon}}\, dy \int_0^1 e^{-2\frac{x}{\varepsilon}}\, dx \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} e^{-(2+\gamma)\frac{y}{\varepsilon}}\, dy = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-(2+\gamma)z}\, dz \leq \int_0^\infty e^{-(2+\gamma)z}\, dz = \frac{1}{2+\gamma},
\end{aligned}$$

aplicando nuevamente el cambio de variable $z = \frac{y}{\varepsilon}$*.*

Con lo cual, podemos concluir que ambos términos de $|||u|||_\beta$ *son* $O(1)$*.*

Sea $V := H_0^1(\Omega)$, definimos la forma bilineal con peso $B_\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ como

$$B_\beta(v, w) := \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla(\beta w)\, dx\, dy + \int_\Omega b(x, y) v(\beta w)\, dx\, dy.$$

Entonces, multiplicando la ecuación de reacción–difusión en (2.1) por βv con $v \in V$ e integrando por partes sobre Ω, la formulación variacional del problema presentado se expresa de la siguiente manera: hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B_\beta(u, v) = \int_\Omega f(x, y)(\beta v)\, dx\, dy, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

Como puede verse, toda solución $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ del problema original (2.1) es también una solución débil de (2.3).

Siguiendo [43], suponemos $0 < \gamma \leq b_0$. En este caso, la forma bilineal $B_\beta(\cdot, \cdot)$ es coercitiva y continua en $H_0^1(\Omega)$ con la norma $|||\cdot|||_\beta$. En efecto, si $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
B_\beta(v, v) &= \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla(\beta v)\, dxdy + \int_\Omega b(x, y) v(\beta v)\, dxdy \\
&= \varepsilon^2 \int_\Omega \left(\nabla v \cdot (\nabla \beta)\, v + \beta \nabla v\right)\, dxdy + \int_\Omega b(x, y) v(\beta v)\, dxdy \\
&\geq \varepsilon^2 \int_\Omega \nabla v \cdot (\nabla \beta)\, v\, dxdy + \varepsilon^2 \int_\Omega \beta \nabla v \cdot \nabla v\, dxdy + b_0^2 \int_\Omega \beta v^2\, dxdy \\
&= \varepsilon^2 \left(\nabla v, v \nabla \beta\right) + \varepsilon^2 \|\nabla v\|_\beta^2 + b_0^2 \|v\|_\beta^2.
\end{aligned}$$

De (2.2), la desigualdad de Cauchy–Schwarz y la desigualdad de Young, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\varepsilon^2 \left(\nabla v, v \nabla \beta\right)| &= |\left(\varepsilon \nabla v, \varepsilon v \nabla \beta\right)| \leq (\varepsilon |\nabla v|, \varepsilon |v| |\nabla \beta|) \\
&\leq (\varepsilon |\nabla v|, \gamma \beta |v|) \leq \varepsilon \|\nabla v\|_\beta \gamma \|v\|_\beta \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \|\nabla v\|_\beta^2 + \frac{\gamma^2}{2} \|v\|_\beta^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\gamma \leq b_0$, resulta

$$\begin{aligned}
B_\beta(v, v) &\geq -\frac{\varepsilon^2}{2} \|\nabla v\|_\beta^2 - \frac{\gamma^2}{2} \|v\|_\beta^2 + \varepsilon^2 \|\nabla v\|_\beta^2 + b_0^2 \|v\|_\beta^2 \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2} \|\nabla v\|_\beta^2 + \left(b_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right) \|v\|_\beta^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{2} \|\nabla v\|_\beta^2 + \frac{b_0^2}{2} \|v\|_\beta^2 \geq C_c |||v|||_\beta^2,
\end{aligned}$$

con $C_c = \min\{1/2, b_0^2/2\}$. Para la continuidad, si tomamos $v, w \in H_0^1(\Omega)$, usando (2.2), que $b(x, y) < b_1^2$ y la desiguladad de Cauchy–Schwarz en reiteradas ocasiones podemos

observar que

$$\begin{aligned}
B_\beta(v,w) &= \left(\varepsilon^2\nabla v, \nabla(\beta w)\right) + (bv, \beta w)\\
&= \left(\varepsilon^2\nabla v, (\nabla\beta)w\right) + \left(\varepsilon^2\nabla v, \beta\nabla w\right) + (bv, \beta w)\\
&= \left(\varepsilon^2\nabla v, w\nabla\beta\right) + \left(\varepsilon^2\beta\nabla v, \nabla w\right) + (bv, \beta w)\\
&\leq \gamma\varepsilon\left(|\nabla v|, w|\beta|\right) + \left(\varepsilon^2\beta\nabla v, \nabla w\right) + b_1^2\,(v, \beta w)\\
&\leq \gamma\varepsilon\|\nabla v\|_\beta\|w\|_\beta + \varepsilon^2\|\nabla v\|_\beta\|\nabla w\|_\beta + b_1^2\|v\|_\beta\|w\|_\beta\\
&\leq C_b\left(\varepsilon\|\nabla v\|_\beta\|w\|_\beta + \varepsilon^2\|\nabla v\|_\beta\|\nabla w\|_\beta + \|v\|_\beta\|w\|_\beta\right)\\
&\leq C_b\left(\varepsilon^2\|\nabla v\|_\beta\|\nabla w\|_\beta + \varepsilon\|\nabla v\|_\beta\|w\|_\beta + \varepsilon\|v\|_\beta\|\nabla w\|_\beta + \|v\|_\beta\|w\|_\beta\right)\\
&\leq 2C_b\left[\left(\varepsilon^2\|\nabla v\|_\beta^2 + \|v\|_\beta^2\right)\left(\varepsilon^2\|\nabla w\|_\beta^2 + \|w\|_\beta^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= 2C_b|||v|||_\beta|||w|||_\beta,
\end{aligned}$$

donde $C_b = \max\{\gamma, 1, b_1^2\}$.

Ahora, si consideramos el funcional lineal $L : V \to \mathbb{R}$ definido por el lado derecho de la formulación variacional (2.3), a saber, $L(v) := \int_\Omega f(x,y)(\beta v)\,dx\,dy$ para todo $v \in V$, podemos ver que es continuo en $H_0^1(\Omega)$ con la norma $|||\cdot|||_\beta$. En efecto, si $v \in H_0^1(\Omega)$, aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz tenemos

$$|L(v)| \leq \int_\Omega |f(x,y)(\beta v)|\;dx\,dy = \int_\Omega \left|\beta^{\frac{1}{2}} f(x,y)(\beta^{\frac{1}{2}} v)\right|\;dx\,dy \leq \|\beta^{\frac{1}{2}} f\|_0\|\beta^{\frac{1}{2}} v\|_0.$$

Como estamos asumiendo $f \in L^\infty$, usando la descomposición de Ω dada en la Figura 2.1 y el hecho de que $\int_{\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}\,dxdy \leq \frac{1}{\gamma}$ (demostración de la Observación 2.1), se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\beta^{\frac{1}{2}} f\|_0^2 &\leq \|f\|_\infty^2 \int_\Omega 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}\,dxdy = \|f\|_\infty^2 + \|f\|_\infty^2 \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}\,dxdy\\
&= \|f\|_\infty^2 \left(1 + \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma\frac{d(x,y)}{\varepsilon}}\,dxdy\right) \leq \|f\|_\infty^2 \left(1 + \frac{4}{\gamma}\right) = C_L^2,
\end{aligned}$$

siendo $C_L := \|f\|_\infty\sqrt{1 + \frac{4}{\gamma}}$. Con lo cual,

$$|L(v)| \leq C_L\|\beta^{\frac{1}{2}} v\|_0 = C_L\|v\|_\beta \leq C_L|||v|||_\beta.$$

Luego, por el Teorema de Lax–Milgram, el problema (2.3) tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$.

Si $V_h \subseteq H_0^1(\Omega)$ es un espacio de elementos finitos, definimos la formulación por elementos finitos como sigue: hallar $u_h \in V_h$ tal que

$$B_\beta(u_h, v_h) = \int_\Omega f(x,y)(\beta v_h)\, dx\, dy, \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{2.4}$$

Como V_h así definido es un espacio de elementos finitos conforme, nuevamente por el Teorema de Lax–Milgram podemos afirmar que el problema discreto (2.4) también tiene una única solución, en este caso, $u_h \in V_h$.

Además, combinando (2.3) y (2.4), se obtiene la propiedad de ortogonalidad de Galerkin:

$$B_\beta(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{2.5}$$

Más aún, si $w_h \in V_h$, por la coercitividad y continuidad de B_β, y la propiedad (2.5), obtenemos

$$C_c |||u - u_h|||_\beta^2 \leq B_\beta(u - u_h, u - u_h) = B_\beta(u - u_h, u - w_h) \leq 2C_b |||u - u_h|||_\beta |||u - w_h|||_\beta.$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente estimación del error de aproximación

$$|||u - u_h|||_\beta \leq 2\frac{C_b}{C_c} \inf_{w_h \in V_h} |||u - w_h|||_\beta. \tag{2.6}$$

De esto se deduce que, para estimar el error en la norma balanceada $|||\cdot|||_\beta$, basta con comparar u con algún interpolante $\Pi u \in V_h$.

En las próximas secciones introducimos un espacio discreto V_h y acotamos el error de interpolación correspondiente cuando Ω es el cuadrado unitario.

2.2. Algunos resultados previos

Consideremos un rectángulo genérico R con lados de longitudes h_x y h_y. Definimos $\mathcal{Q}_1 : H^2(R) \to H^1(R)$ como el operador de interpolación clásico en R, esto es, como el interpolante bilineal que satisface

$$\mathcal{Q}_1 u(x_i, y_j) = u(x_i, y_j), \quad \text{para } (x_i, y_j) \text{ vértices de } R.$$

En otras palabras, $\mathcal{Q}_1 u$ es la única función en $Q_1(R)$ que coincide con u en los cuatro vértices del rectángulo R. Para este operador son bien conocidas las estimaciones de error

(ver [4, Teorema 2.7]):

$$\|v - \mathcal{Q}_1 v\|_{\infty,R} \lesssim \|v\|_{\infty,R}, \tag{2.7}$$

$$\|v - \mathcal{Q}_1 v\|_{0,R} \lesssim \left(h_x^2 \|\partial_x^2 v\|_{0,R} + h_y^2 \|\partial_y^2 v\|_{0,R}\right) \tag{2.8}$$

y

$$\begin{aligned} \|\partial_x (v - \mathcal{Q}_1 v)\|_{0,R} &\lesssim \left(h_x \|\partial_x^2 v\|_{0,R} + h_y \|\partial_x \partial_y v\|_{0,R}\right), \\ \|\partial_y (v - \mathcal{Q}_1 v)\|_{0,R} &\lesssim \left(h_x \|\partial_x \partial_y v\|_{0,R} + h_y \|\partial_y^2 v\|_{0,R}\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

También presentamos los siguientes resultados que serán útiles más adelante.

Lema 2.1 *Sea $R = (a,b) \times (c,d)$ un rectángulo con lados de longitudes $h_x = b - a$ y $h_y = d - c$. Entonces, para toda $f \in \mathcal{C}^1(\overline{R})$, se cumple que*

$$\|\nabla \left(\mathcal{Q}_1 f\right)\|_{\infty,R} \leq 2\sqrt{2} \|\nabla f\|_{\infty,R}.$$

Demostración

Sean $A(a,c)$, $B(b,c)$, $C(b,d)$ y $D(a,d)$ los vértices de R, consideremos las funciones de base de Lagrange bilineales

$$\begin{aligned} \lambda_A(x,y) &= \frac{(x-b)(y-d)}{h_x h_y}, \qquad & \lambda_B(x,y) &= -\frac{(x-a)(y-d)}{h_x h_y}, \\ \lambda_C(x,y) &= \frac{(x-a)(y-c)}{h_x h_y}, \qquad & \lambda_D(x,y) &= -\frac{(x-b)(y-c)}{h_x h_y}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{Q}_1 f = f(A)\lambda_A + f(B)\lambda_B + f(C)\lambda_C + f(D)\lambda_D$$

y

$$\partial_x \left(\mathcal{Q}_1 f\right)(x,y) = \frac{f(A) - f(B)}{h_x} \frac{y-d}{h_y} + \frac{f(C) - f(D)}{h_x} \frac{y-c}{h_y}.$$

Luego, como $f \in \mathcal{C}^1(\overline{R})$, por el Teorema del Valor Medio tenemos que existen x_{m_1}, $x_{m_2} \in (a,b)$ tales que

$$\partial_x \left(\mathcal{Q}_1 f\right)(x,y) = -\partial_x f(x_{m_1}, c) \frac{y-d}{h_y} + \partial_x f(x_{m_2}, d) \frac{y-c}{h_y}.$$

Puesto que, para $(x,y) \in R$ se cumple que $|y-c|$, $|y-d| \leq h_y$, resulta

$$\left|\partial_x \left(\mathcal{Q}_1 f\right)(x,y)\right| \leq |\partial_x f(x_{m_1}, c)| + |\partial_x f(x_{m_2}, d)| \leq 2\|\nabla f\|_{\infty,R}. \tag{2.10}$$

De manera análoga, se obtiene que

$$|\partial_y \left(\mathcal{Q}_1 f\right)(x,y)| \leq 2\|\nabla f\|_{\infty,R}. \tag{2.11}$$

Por lo tanto, de (2.10) y (2.11), surge que

$$\begin{aligned}\|\nabla \left(\mathcal{Q}_1 f\right)\|_{\infty,R} &= \sup_{(x,y)\in R} \sqrt{|\partial_x \left(\mathcal{Q}_1 f\right)(x,y)|^2 + |\partial_y \left(\mathcal{Q}_1 f\right)(x,y)|^2} \\ &\leq \sup_{(x,y)\in R} \sqrt{\left(2\|\nabla f\|_{\infty,R}\right)^2 + \left(2\|\nabla f\|_{\infty,R}\right)^2} = 2\sqrt{2}\|\nabla f\|_{\infty,R}\end{aligned}$$

y se concluye la prueba.

□

Lema 2.2 *Sea $R = (a,b)\times(c,d)$ un rectángulo con lados de longitudes $h_x = b-a$ y $h_y = d-c$. Si $0<\alpha\leq 1$ entonces, para todo $v\in H^2(R)$, tenemos que*

$$\|\partial_x(v-\mathcal{Q}_1 v)\|_{0,R} \lesssim \left(h_x^{1-\alpha}\|(x-a)^\alpha \partial_x^2 v\|_{0,R} + h_y\|\partial_x\partial_y v\|_{0,R}\right), \tag{2.12}$$

$$\|\partial_y(v-\mathcal{Q}_1 v)\|_{0,R} \lesssim \left(h_x\|\partial_x\partial_y v\|_{0,R} + h_y^{1-\alpha}\|(y-c)^\alpha \partial_y^2 v\|_{0,R}\right). \tag{2.13}$$

Demostración

Sean $\hat{R} = (0,1)^2$ el cuadrado unitario y $\hat{\mathcal{Q}}_1 : H^2(\hat{R}) \to H^1(\hat{R})$ el operador de interpolación bilineal. Para una función $v\in H^2(\hat{R})$, se define

$$\Pi v(x,y) = v(0,y)(1-x) + xv(1,y), \qquad (x,y)\in\hat{R}.$$

Notemos que $\Pi v(\cdot,y)$ es la interpolación lineal de $v(\cdot,y)$ para cada $y\in[0,1]$. Luego, de [41, Corolario 1.2.3], si $v\in\mathcal{C}^2(\hat{R})$ sabemos que

$$\|\partial_x[v(\cdot,y)-\Pi v(\cdot,y)]\|_{0,(0,1)} \leq C\|x^\alpha\partial_x^2 v(\cdot,y)\|_{0,(0,1)}, \qquad \forall\, y\in(0,1),$$

donde la constante C es independiente de α y de v. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|\partial_x(v-\Pi v)\|_{0,\hat{R}}^2 &= \int_0^1 \|\partial_x[v(\cdot,y)-\Pi v(\cdot,y)]\|_{0,(0,1)}^2\, dy \\ &\leq C\int_0^1 \|x^\alpha\partial_x^2 v(\cdot,y)\|_{0,(0,1)}^2\, dy = C\|x^\alpha\partial_x^2 v\|_{0,\hat{R}}^2.\end{aligned}$$

Ahora, como $\hat{\mathcal{Q}}_1 v = \hat{\mathcal{Q}}_1(\Pi v)$,

$$\begin{aligned} v - \hat{\mathcal{Q}}_1 v &= (v - \Pi v) + (\Pi v - \hat{\mathcal{Q}}_1 v) \\ &= (v - \Pi v) + [\Pi v - \hat{\mathcal{Q}}_1(\Pi v)] \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left\|\partial_x(v - \hat{\mathcal{Q}}_1 v)\right\|_{0,\hat{R}} &\leq \|\partial_x(v - \Pi v)\|_{0,\hat{R}} + \left\|\partial_x\left[\Pi v - \hat{\mathcal{Q}}_1(\Pi v)\right]\right\|_{0,\hat{R}} \\ &\leq C\left\|x^\alpha \partial_x^2 v\right\|_{0,\hat{R}} + \left\|\partial_x\left[\Pi v - \hat{\mathcal{Q}}_1(\Pi v)\right]\right\|_{0,\hat{R}} \\ &\leq C\left(\left\|x^\alpha \partial_x^2 v\right\|_{0,\hat{R}} + \left\|\partial_x^2 \Pi v\right\|_{0,\hat{R}} + \|\partial_x \partial_y \Pi v\|_{0,\hat{R}}\right) \\ &= C\left(\left\|x^\alpha \partial_x^2 v\right\|_{0,\hat{R}} + \|\partial_x \partial_y \Pi v\|_{0,\hat{R}}\right), \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde usamos la estimación (2.9) para $\hat{\mathcal{Q}}_1$ y el hecho de que $\partial_x^2 \Pi v = 0$. Por otro lado, como $\partial_x \Pi v(x,y) = v(1,y) - v(0,y)$, si v es una función suave, se deduce que

$$\partial_x \partial_y \Pi v(x,y) = \partial_y \partial_x \Pi v(x,y) = \partial_y v(1,y) - \partial_y v(0,y) = \int_0^1 \partial_x \partial_y v(t,y)\, dt.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|\partial_x \partial_y \Pi v\|_{0,\hat{R}}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left|\int_0^1 \partial_x \partial_y v(t,y)\, dt\right|^2 dy\, dx \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |\partial_x \partial_y v(t,y)|^2 \, dt\, dy\, dx = \|\partial_x \partial_y v\|_{0,\hat{R}}^2, \end{aligned}$$

y de (2.14) obtenemos que

$$\left\|\partial_x(v - \hat{\mathcal{Q}}_1 v)\right\|_{0,\hat{R}} \leq C\left(\left\|x^\alpha \partial_x^2 v\right\|_{0,\hat{R}} + \|\partial_x \partial_y v\|_{0,\hat{R}}\right). \tag{2.15}$$

Por la densidad de $\mathcal{C}^2(\hat{R})$ en $H^2(\hat{R})$, la validez de la desigualdad anterior se extiende para toda función $v \in H^2(\hat{R})$. Finalmente, para obtener la desigualdad (2.12) en R, usamos un argumento de rescale. Sean $v \in H^2(R)$ y $(x,y) \in R$, consideramos

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x-a}{h_x}, \frac{y-c}{h_y}\right) \in \hat{R} \quad \text{y} \quad \hat{v} \in H^2(\hat{R}),\ \hat{v}(\hat{x},\hat{y}) = v(x,y).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|\partial_x(v-\mathcal{Q}_1 v)\|_{0,R} &= \left(\int_c^d\int_a^b |\partial_x(v-\mathcal{Q}_1 v)|^2\, dxdy\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_0^1\int_0^1 \left|\partial_{\hat{x}}(\hat{v}-\hat{\mathcal{Q}}_1\hat{v})\frac{1}{h_x}\right|^2 h_x h_y\, d\hat{x}d\hat{y}\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{h_y}{h_x}\right)^{1/2} \left\|\partial_{\hat{x}}(\hat{v}-\hat{\mathcal{Q}}_1\hat{v})\right\|_{0,\hat{R}} \\
&\leq \left(\frac{h_y}{h_x}\right)^{1/2} C\left\{\underbrace{\left\|\hat{x}^\alpha\partial_{\hat{x}}^2\hat{v}\right\|_{0,\hat{R}}}_{(I)} + \underbrace{\|\partial_{\hat{x}}\partial_{\hat{y}}\hat{v}\|_{0,\hat{R}}}_{(II)}\right\},
\end{aligned}$$

donde usamos que $dx = h_x d\hat{x}$, $dy = h_y\hat{y}$, $\partial_x v(x,y) = \partial_{\hat{x}}\hat{v}(\hat{x},\hat{y})\,(\partial_x\hat{x}+\partial_x\hat{y}) = \partial_{\hat{x}}\hat{v}(\hat{x},\hat{y})\frac{1}{h_x}$ y (2.15). Analicemos ahora los términos (I) y (II):

$$\begin{aligned}
(I) &= \left(\int_0^1\int_0^1 \left|\hat{x}^\alpha\partial_{\hat{x}}^2\hat{v}(\hat{x},\hat{y})\right|^2 d\hat{x}d\hat{y}\right)^2 \\
&= \left(\int_c^d\int_a^b \left|\left(\frac{x-a}{h_x}\right)^\alpha h_x^2\partial_x^2 v(x,y)\right|^2 \frac{dxdy}{h_x h_y}\right)^{1/2} \\
&= \frac{h_x^{\frac{3}{2}-\alpha}}{h_y^{\frac{1}{2}}}\left\|(x-a)^\alpha\partial_x^2 v\right\|_{0,R}, \\
(II) &= \left(\int_0^1\int_0^1 |\partial_{\hat{x}}\partial_{\hat{y}}\hat{v}(\hat{x},\hat{y})|^2\, d\hat{x}d\hat{y}\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_c^d\int_a^b |h_x h_y\partial_x\partial_y v(x,y)|^2\, \frac{dxdy}{h_x h_y}\right)^{1/2} \\
&= h_x^{\frac{1}{2}} h_y^{\frac{1}{2}}\left\|\partial_x\partial_y v\right\|_{0,R},
\end{aligned}$$

pues

$$\partial_{\hat{x}}^2\hat{v}(\hat{x},\hat{y}) = \partial_{\hat{x}}\left(h_x\partial_x v(x,y)\right) = h_x\partial_x^2 v(x,y)\,(\partial_{\hat{x}}x+\partial_{\hat{x}}y) = h_x^2\partial_x^2 v(x,y)$$

y

$$\partial_{\hat{x}}\partial_{\hat{y}}\hat{v}(\hat{x},\hat{y}) = \partial_{\hat{y}}\left(h_x\partial_x v(x,y)\right) = h_x\partial_y\partial_x v(x,y)\,(\partial_{\hat{y}}x+\partial_{\hat{y}}y) = h_x h_y\partial_x\partial_y v(x,y).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|\partial_x (v - \mathcal{Q}_1 v)\|_{0,R} &\leq \left(\frac{h_y}{h_x}\right)^{1/2} C \left(\frac{h_x^{\frac{3}{2}-\alpha}}{h_y^{\frac{1}{2}}} \left\|(x-a)^\alpha \partial_x^2 v\right\|_{0,R} + h_x^{\frac{1}{2}} h_y^{\frac{1}{2}} \|\partial_x \partial_y v\|_{0,R} \right) \\ &= C \left(h_x^{1-\alpha} \left\|(x-a)^\alpha \partial_x^2 v\right\|_{0,R} + h_y \|\partial_x \partial_y v\|_{0,R} \right).\end{aligned}$$

La desigualdad (2.13) se obtiene análogamente, y se concluye la prueba.

□

El símbolo $\mathcal{Q}_1$ también lo usaremos para denotar al operador de interpolación global continuo bilineal a trozos $H^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$.

2.3. Estimaciones sobre mallas graduadas

Sea $\Omega = (0,1)^2$. En esta sección, obtenemos estimaciones del error de interpolación en la norma β utilizando las mallas graduadas introducidas en la Sección 1.2, con parámetro de graduación

$$\alpha := 1 - \frac{1}{2\log\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{2.16}$$

Es decir, usamos mallas graduadas $\mathcal{T}_h = \{R\}$ sobre Ω, compuestas por rectángulos $R = R_{ij}$ de la forma:

$$R_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (x_{j-1}, x_j), \qquad 1 \leq i, j \leq M,$$

donde

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_1 = h^s, \quad \text{con } s := \dfrac{1}{1-\alpha} \\ x_{i+1} = x_i + h x_i^\alpha, \quad i = 2, \ldots, mid - 1, \\ x_{mid} = \dfrac{1}{2}, \\ x_i = 1 - x_{M-i}, \quad i = mid + 1 \ldots, M. \end{cases}$$

Observación 2.2 *Considerando ahora que el parámetro de graduación α está dado por* (2.16)*, a partir de la Observación 1.1, resulta que el número de puntos $M+1$ en la malla a lo largo de los ejes x e y está relacionado con el parámetro h de la siguiente manera:*

$$\frac{1}{M} \lesssim h \lesssim \frac{1}{M} \log\frac{1}{\varepsilon} \log M.$$

Por lo tanto, se observa que h está acotado casi uniformemente con respecto a ε, debido al factor $\log(1/\varepsilon)$*, en términos de la cantidad de elementos. Además, como antes, esta relación es similar a la que se obtiene en el caso de mallas cuasi–uniformes, salvo por la presencia del factor logarítmico* $\log M$*. A partir de este punto, y con el objetivo de simplificar la notación, expresaremos las estimaciones del error en términos de h, el cual puede vincularse con el número de grados de libertad mediante la relación previamente mencionada.*

Observación 2.3 *Observamos que, con este parámetro de graduación, la malla resulta dependiente de ε. Recordemos que, para obtener estimaciones en la norma de la energía, como mencionamos anteriormente, era posible usar mallas independientes de ε. Sin embargo, para los resultados más fuertes que buscamos demostrar, nuestra teoría requiere una leve dependencia respecto de ε.*

Nuevamente, suponemos las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$f(0,0) = f(1,0) = f(1,1) = f(0,1) = 0.$$

Bajo dichas condiciones, son válidas las estimaciones puntuales establecidas en el Lema 1.1. Además, pueden extenderse para los casos $k = 3$ y $k = 4$ (véase [30, Lema 4.1]), y resultarán de gran utilidad en la demostración de los resultados que presentamos en el capítulo.

Lema 2.3 *Tenemos que, para $(x, y) \in \Omega$ y $0 \leq k \leq 4$,*

$$\left|\partial_x^k u(x,y)\right| \leq C\left(1 + \varepsilon^{-k} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-k} e^{-b_0 \frac{1-x}{\varepsilon}}\right),$$
$$\left|\partial_y^k u(x,y)\right| \leq C\left(1 + \varepsilon^{-k} e^{-b_0 \frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-k} e^{-b_0 \frac{1-y}{\varepsilon}}\right),$$

donde C depende de b, f y Ω, siendo independiente de ε.

En nuestro análisis, planteamos la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1 *Supongamos que $h < e^{-\frac{3}{2}}$ y $\varepsilon < h$.*

Observemos que la misma no es restrictiva, ya que, de lo contrario, el problema no resulta singularmente perturbado y el análisis puede realizarse mediante técnicas estándar.

En primer lugar, consideramos la parte L^2 de la norma β del error de interpolación.

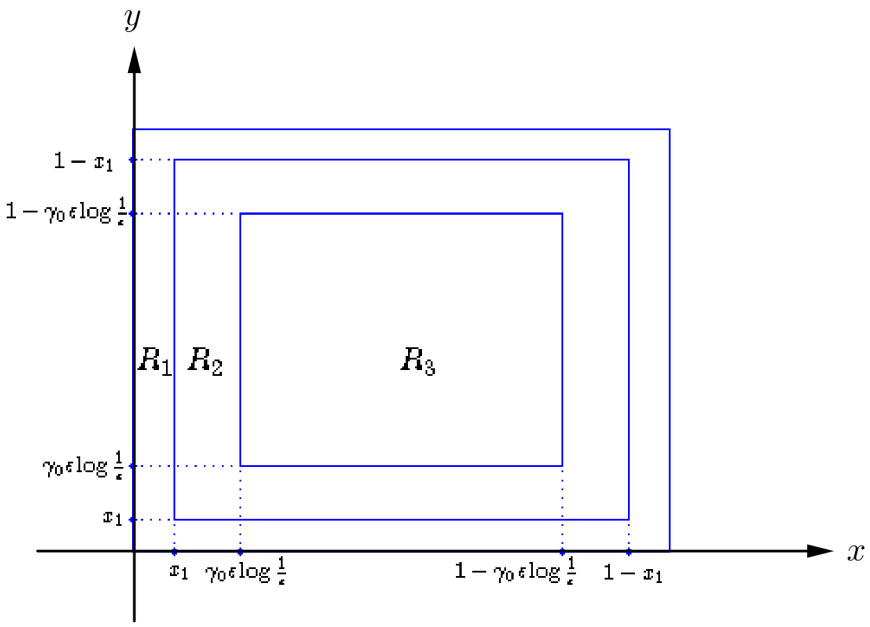


Figura 2.2: Descomposición de Ω para la demostración de la Proposición 2.1.

Proposición 2.1 *Sea u la solución de (2.1) y $\mathcal{Q}_1 u$ la interpolación bilineal a trozos de u en la malla $\mathcal{T}_h$. Entonces, bajo la Hipótesis 1, existe una constante C tal que*

$$\|u - \mathcal{Q}_1 u\|_\beta \leq Ch^2 \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración

Definamos

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{[(0, x_1) \cup (1 - x_1, 1)] \times (0, 1)\} \cup \{(0, 1) \times [(0, x_1) \cup (1 - x_1, 1)]\}, \\
R_2 &= \left\{ \left[\left(x_1, \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \cup \left(1 - \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}, 1 - x_1 \right) \right] \times (x_1, 1 - x_1) \right\} \\
&\quad \bigcup \left\{ (x_1, 1 - x_1) \times \left[\left(x_1, \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \cup \left(1 - \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}, 1 - x_1 \right) \right] \right\}, \\
R_3 &= \left(\gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}, 1 - \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} \right)^2,
\end{aligned}$$

donde γ_0 se toma mayor o igual que máx $\left\{ \frac{2}{b_0}, \frac{1}{\gamma} \right\}$ y de manera tal que $\gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$ y $1 - \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$ sean puntos de la malla. Entonces, $\Omega = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ (véase la Figura 2.2).

Sea $S_1 = (0, x_1) \times (0, 1)$. Nótese que, como

$$1 - \alpha = 1 - \left(1 - \frac{1}{2\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right) = \frac{1}{-2\log\varepsilon}$$

y

$$\varepsilon = e^{\log\varepsilon} = e^{\log h \frac{\log\varepsilon}{\log h}} = h^{\frac{\log\varepsilon}{\log h}},$$

tenemos que

$$\frac{x_1}{\varepsilon} = \frac{h^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\varepsilon} = \frac{h^{-2\log\varepsilon}}{\varepsilon} = h^{\frac{\log\varepsilon}{\log h}[2(-\log h)-1]}.$$

Por la Hipótesis 1, como $\varepsilon < h < 1$ y $h < e^{-\frac{3}{2}}$, resulta $\frac{\log\varepsilon}{\log h} > 1$ y $-\log h > \frac{3}{2}$, y entonces se sigue que

$$\frac{\log\varepsilon}{\log h}\,[2(-\log h) - 1] > 2(-\log h) - 1 > 2.$$

Por lo tanto, como $0 < h < 1$,

$$\frac{x_1}{\varepsilon} \leq h^2.$$

Luego, teniendo en cuenta (2.7), que u está acotada uniformemente y $\beta \leq C\varepsilon^{-1}$ en S_1, surge que

$$\|u - \mathcal{Q}_1 u\|^2_{\beta,S_1} = \int_0^{x_1}\int_0^1 \beta(u - \mathcal{Q}_1 u)^2\,dydx \leq C x_1\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\|u\|^2_{\infty,S_1} \leq C\frac{x_1}{\varepsilon} \leq Ch^2.$$

Entonces, por argumentos de simetría tenemos que

$$\|u - \mathcal{Q}_1 u\|^2_{\beta,R_1} \leq Ch^2. \tag{2.17}$$

Sea ahora $S_2 = \left(x_1, \gamma_0\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \times (x_1, 1 - x_1)$, tenemos nuevamente que $\beta \leq C\varepsilon^{-1}$. Luego, usando la estimación del error de interpolación anisotrópica (2.8), obtenemos que

$$\begin{aligned}\|u - \mathcal{Q}_1 u\|^2_{\beta,S_2} &= \int_{S_2} \beta(u - \mathcal{Q}_1 u)^2\,dxdy \leq C\varepsilon^{-1}\|u - \mathcal{Q}_1 u\|^2_{0,S_2} \\ &= C\varepsilon^{-1}\sum_{R_{ij}\subset S_2}\|u - \mathcal{Q}_1 u\|^2_{0,R_{ij}} \leq C\varepsilon^{-1}\sum_{R_{ij}\subset S_2}\left(h_i^4\|\partial_x^2 u\|^2_{0,R_{ij}} + h_j^4\|\partial_y^2 u\|^2_{0,R_{ij}}\right).\end{aligned}$$

Con las estimaciones a priori del Lema (2.3) y el hecho de que $x \leq 1 - x$ para todo

$(x,y) \in S_2$, resulta

$$\begin{aligned}\|\partial_x^2 u\|_{0,R_{ij}}^2 &\leq C \int_{R_{ij}} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0 \frac{1-x}{\varepsilon}}\right)^2 dxdy \\ &\leq C \int_{R_{ij}} 1 + \frac{1}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{x}{\varepsilon}}\, dxdy\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\|\partial_y^2 u\|_{0,R_{ij}}^2 &\leq C \int_{R_{ij}} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0 \frac{y}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0 \frac{1-y}{\varepsilon}}\right)^2 dxdy \\ &\leq C \int_{R_{ij}} 1 + \frac{1}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{y}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{1-y}{\varepsilon}}\, dxdy.\end{aligned}$$

Observemos además que, si $R_{ij} \subset S_2$, $h_i \leq h x^\alpha$ y $h_j \leq h\, \mín\{y, 1-y\}^\alpha$ para todo $(x,y) \in R_{ij}$. Usando esto y que $h_i, h_j \leq h$ obtenemos

$$\begin{aligned}&\|u - \mathcal{Q}_1 u\|_{\beta,S_2}^2 \\ &\leq C\varepsilon^{-1} \sum_{R_{ij} \subset S_2} \int_{R_{ij}} h_i^4 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{x}{\varepsilon}}\right) + h_j^4 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{y}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{1-y}{\varepsilon}}\right) dxdy \\ &\leq C\varepsilon^{-1} h^4 \sum_{R_{ij} \subset S_2} \int_{R_{ij}} 1 + \frac{x^{4\alpha}}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{x}{\varepsilon}} + \frac{\mín\{y, 1-y\}^{4\alpha}}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{y}{\varepsilon}} \\ &\qquad\qquad + \frac{\mín\{y, 1-y\}^{4\alpha}}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{1-y}{\varepsilon}}\, dxdy \\ &\leq C\varepsilon^{-1} h^4 \int_{S_2} 1 + \frac{x^{4\alpha}}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{x}{\varepsilon}} + \frac{y^{4\alpha}}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{y}{\varepsilon}} + \frac{(1-y)^{4\alpha}}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{1-y}{\varepsilon}}\, dxdy.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $|S_2| \leq \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$ tenemos

$$C\varepsilon^{-1} h^4 \int_{S_2} dxdy \leq C h^4 \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}&C\varepsilon^{-1} h^4 \int_{S_2} \frac{x^{4\alpha}}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{x}{\varepsilon}} + \frac{y^{4\alpha}}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{y}{\varepsilon}}\, dxdy \\ &\quad = Ch^4 (1 - 2x_1) \varepsilon^{4(\alpha-1)} \int_{x_1}^{\gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}} (x\varepsilon^{-1})^{4\alpha} e^{-2b_0 x/\varepsilon} \frac{dx}{\varepsilon} \\ &\qquad + Ch^4 (\gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} - x_1) \varepsilon^{4(\alpha-1)} \int_{x_1}^{1-x_1} (y\varepsilon^{-1})^{4\alpha} e^{-2b_0 y/\varepsilon} \frac{dy}{\varepsilon} \leq Ch^4 \leq Ch^4 \log \frac{1}{\varepsilon},\end{aligned}$$

donde usamos que $\varepsilon^{4(\alpha-1)} = e^2$, que para $\delta \in [0,4]$ las integrales $\int_0^\infty x^\delta e^{-2b_0 x}\,dx$ son acotadas uniformemente y que $\varepsilon < e^{-\frac{3}{2}}$. De manera similar, tenemos que

$$C\varepsilon^{-1}h^4 \int_{S_2} (1-y)^4 \varepsilon^{-4} e^{-2b_0 \frac{1-y}{\varepsilon}}\,dxdy \leq Ch^4 \log\frac{1}{\varepsilon}.$$

Luego, de (2.18) obtenemos

$$\|u - \mathcal{Q}_1 u\|_{\beta,S_2} \leq Ch^2 \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora, con argumento de simetría obtenemos que

$$\|u - \mathcal{Q}_1 u\|_{\beta,R_2} \leq Ch^2 \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.19}$$

Finalmente, si $(x,y) \in R_3$, como $x, 1-x, y, 1-y \geq \gamma_0\,\varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon}$ y $\gamma_0 \geq \frac{2}{b_0}$, se sigue del Lema 2.3 que

$$|\partial_x^2 u(x,y)| + |\partial_y^2 u(x,y)| \leq C.$$

Además, $\beta(x,y) \leq 2$ pues $\gamma_0 > \frac{1}{\gamma}$ y $d(x,y) \geq \gamma_0 \varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon}$. Entonces, teniendo en cuenta también la estimación del error de interpolación (2.8) para el operador $\mathcal{Q}_1$ y que $h_i, h_j \leq h$ para todo i,j, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|u - \mathcal{Q}_1 u\|^2_{\beta,R_3} &= \int_{R_3} \beta(u - \mathcal{Q}_1 u)^2\,dxdy \\
&\leq C\|u - \mathcal{Q}_1 u\|^2_{0,R_3} \\
&\leq C\left(h_i^2 \|\partial_x^2 u\|_{0,R_3} + h_j^2 \|\partial_y^2 u\|_{0,R_3}\right)^2 \\
&\leq Ch^4 |R_3| \\
&= Ch^4 \left(1 - 2\gamma_0 \varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 \leq Ch^4.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|u - \mathcal{Q}_1 u\|_{0,R_3} \leq Ch^2. \tag{2.20}$$

Como $\Omega = R_1 \cup R_2 \cup R_3$, de (2.17), (2.19) y (2.20), obtenemos el resultado deseado.

□

Observemos que la constante C involucrada en la Proposición 2.1 depende únicamente

de las constantes que aparecen en el Lema 2.3.

Además, podemos demostrar el siguiente resultado que involucra la seminorma H^1.

Proposición 2.2 *Sea u la solución de (2.1) y $\mathcal{Q}_1 u$ la interpolación bilineal a trozos de u en la malla $\mathcal{T}_h$. Entonces, bajo la Hipótesis 1, tenemos que*

$$\|\nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)\|_0 \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} h.$$

Demostración

Estimemos $\|\nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)\|_{0,\Omega_s}$ donde $\Omega_s = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Luego, la estimación en el resto del dominio se sigue por simetría. Introduzcamos la notación

$$\Omega_i = \cup_{j=1}^{mid} R_{ij}, \qquad \Omega^j = \cup_{i=1}^{mid} R_{ij}.$$

Observemos que $\cup_{i=1}^{mid} \Omega_i = \cup_{j=i}^{mid} \Omega^j = \Omega_s$.

Usando la desigualdad (2.9) en cada elemento R_{ij} con $j = 1, \ldots, mid, i = 2, \ldots, mid$ y (2.12) en cada elemento R_{1j} con $j = 1, \ldots, mid$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x(u - \mathcal{Q}_1 u)\|^2_{0,\Omega_s} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{mid} \sum_{i=1}^{mid} \|\partial_x(u - \mathcal{Q}_1 u)\|^2_{0,R_{ij}} \\
&\quad \leq C \left(\sum_{j=1}^{mid} \|\partial_x(u - \mathcal{Q}_1 u)\|^2_{0,R_{1j}} + \sum_{j=1}^{mid} \sum_{i=2}^{mid} \|\partial_x(u - \mathcal{Q}_1 u)\|^2_{0,R_{ij}} \right) \\
&\quad \leq C \left(\sum_{j=1}^{mid} h_1^{2-2\alpha} \|x^\alpha \partial_x^2 u\|^2_{0,R_{1j}} + \sum_{j=1}^{mid} \sum_{i=2}^{mid} \left[h_i^2 \|\partial_x^2 u\|^2_{0,R_{ij}} + h_j^2 \|\partial_x \partial_y u\|^2_{0,R_{ij}} \right] \right) \\
&\quad \leq C \Bigg(h^2 \|x^\alpha \partial_x^2 u\|^2_{0,\Omega_1} + \sum_{i=2}^{mid} h^2 \|x^\alpha \partial_x^2 u\|^2_{0,\Omega_i} \\
&\qquad\qquad + h_1^2 \|\partial_x \partial_y u\|^2_{0,\Omega^1} + \sum_{j=2}^{mid} h^2 \|y^\alpha \partial_x \partial_y u\|^2_{0,\Omega^j} \Bigg) \\
&\quad = C \left(h^2 \|x^\alpha \partial_x^2 u\|^2_{0,\Omega_s} + h_1^2 \|\partial_x \partial_y u\|^2_{0,\Omega^1} + h^2 \|y^\alpha \partial_x \partial_y u\|^2_{0,\Omega_s \setminus \Omega^1} \right),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

donde además usamos que

$$h_i \leq hx^\alpha, \qquad \forall (x,y) \in R_{ij}, 2 \leq i \leq mid,$$
$$h_j \leq hy^\alpha, \qquad \forall (x,y) \in R_{ij},\ 2 \leq j \leq mid,$$

y

$$h_1^{2-2\alpha} = (h^s)^{2-2\alpha} = h^{\frac{1}{1-\alpha}2(1-\alpha)} = h^2.$$

Entonces, necesitamos acotar cada término en la última desigualdad.

En primer lugar, aplicando las estimaciones del Lema 2.3, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x^\alpha \partial_x^2 u\|_{0,\Omega_s}^2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} (x^\alpha \partial_x^2 u)^2 \, dy \, dx \\
&\leq C \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}}\right)^2 dy \, dx \\
&\leq C \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^4} e^{-2b_0 \frac{x}{\varepsilon}}\right) dx \\
&= C \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2\alpha} \, dx + \frac{1}{\varepsilon^4} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2\alpha} e^{-2b_0 \frac{x}{\varepsilon}} \, dx \right) \\
&\leq C + C\varepsilon^{2\alpha - 3} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^{2\alpha} e^{-2b_0 \frac{x}{\varepsilon}} \frac{dx}{\varepsilon} \\
&\leq C\varepsilon^{-1},
\end{aligned}$$

donde usamos nuevamente que para $\delta \in [0,4]$, las integrales $\int_0^\infty x^\delta e^{-2b_0 x} \, dx$ son acotadas uniformemente y que $\varepsilon < 1$. Así,

$$h^2 \|x^\alpha \partial_x^2 u\|_{0,\Omega}^2 \leq C h^2 \varepsilon^{-1}. \tag{2.22}$$

Por otro lado, aplicando integración por partes dos veces, usando nuevamente el Lema 2.3 y utilizando que

$$\partial_y u = 0 \quad \text{en } x = 0 \text{ y } x = 1, \qquad \partial_x^2 u = 0 \quad \text{en } y = 0, \tag{2.23}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x \partial_y u\|_{0,\Omega^1}^2 &\leq \|\partial_x \partial_y u\|_{0,[0,1]\times[0,x_1]}^2 \\
&= \int_0^{x_1} \int_0^1 (\partial_x \partial_y u)^2 \, dx \, dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{x_1} \partial_x\partial_y u\, \partial_y u|_0^1\, dy - \int_0^1 \int_0^{x_1} \partial_y u\, \partial_y\partial_x^2 u\, dy\, dx \\
&= -\int_0^1 \int_0^{x_1} \partial_y u\, \partial_y\partial_x^2 u\, dy\, dx \\
&= -\int_0^1 \partial_y u\, \partial_x^2 u|_0^{x_1}\, dx + \int_0^1 \int_0^{x_1} \partial_y^2 u\, \partial_x^2 u\, dy\, dx \\
&\leq \|\partial_y u\|_{\infty,[0,1]\times\{x_1\}} \int_0^1 |\partial_x^2 u(x,x_1)|\, dx \\
&\quad + \|\partial_y^2 u\|_{\infty,[0,1]\times[0,x_1]} \int_0^1 \int_0^{x_1} |\partial_x^2 u|\, dy\, dx \\
&\leq C\varepsilon^{-1} \int_0^1 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}}\, dx \\
&\quad + C\varepsilon^{-2} x_1 \int_0^1 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}}\, dx \\
&= C\left(\varepsilon^{-1} + x_1\varepsilon^{-2}\right) \int_0^1 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}}\, dx \leq C\varepsilon^{-3}.
\end{aligned}
$$

Por la Hipótesis 1 resulta, en particular, que $\varepsilon, h < e^{-1}$, por lo tanto

$$
h_1^2 = h^{2s} = h^{4\log\frac{1}{\varepsilon}} = h^{2\log\frac{1}{\varepsilon}} h^{2\log\frac{1}{\varepsilon}} \leq h^2 (e^{-1})^{2\log\frac{1}{\varepsilon}} = h^2\varepsilon^2,
$$

con lo cual,

$$
h_1^2 \|\partial_x\partial_y u\|_{0,\Omega^1}^2 \leq h^2\varepsilon^2 C\varepsilon^{-3} \leq Ch^2\varepsilon^{-1}. \tag{2.24}
$$

Finalmente, con los mismos argumentos (integración por partes, Lema 2.3 y (2.23)), surge que

$$
\begin{aligned}
\|y^\alpha \partial_x\partial_y u\|_{0,\Omega_s\setminus\Omega^1}^2 &\leq \|y^\alpha \partial_x\partial_y u\|_{0,[0,1]\times[0,\frac{1}{2}]}^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(y^\alpha \partial_x\partial_y u\right)^2\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} y^{2\alpha} \left[(\partial_x\partial_y u)\partial_y u|_0^1\right]\, dy - \int_0^{\frac{1}{2}} y^{2\alpha} \int_0^1 \partial_x^2\partial_y u \partial_y u\, dx\, dy \\
&= -\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^1 y^{2\alpha} \partial_y u \partial_y\partial_x^2 u\, dx\, dy \\
&= -\int_0^1 y^{2\alpha} \partial_y u \partial_x^2 u|_0^{\frac{1}{2}}\, dx + \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} 2\alpha y^{2\alpha-1} \partial_y u \partial_x^2 u\, dy\, dx \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} y^{2\alpha} \partial_y^2 u \partial_x^2 u\, dy\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha} \int_0^1 \partial_y u\left(x, \frac{1}{2}\right) \partial_x^2 u\left(x, \frac{1}{2}\right) dx \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} 2\alpha y^{2\alpha-1} \partial_y u\, \partial_x^2 u\, dy\, dx + \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}} y^{2\alpha} \partial_y^2 u \partial_x^2 u\, dy\, dx \\
&\leq C \int_0^1 1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}}\, dx \\
&\quad + C \int_0^{\frac{1}{2}} y^{2\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-b_0 \frac{y}{\varepsilon}}\right) dy \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}}\right) dx \\
&\quad + C \int_0^{\frac{1}{2}} y^{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0 \frac{y}{\varepsilon}}\right) dy \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}}\right) dx \\
&\leq C(1 + \varepsilon^{-2}) + C\varepsilon^{2\alpha-1}(1 + \varepsilon^{-2}) + C\varepsilon^{2\alpha-1}(1 + \varepsilon^{-2}) \leq C\varepsilon^{-1},
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
h^2 \|y^\alpha \partial_x \partial_y u\|^2_{0,\Omega_s \setminus \Omega^1} \leq C h^2 \varepsilon^{-1}. \tag{2.25}
$$

Ahora, introduciendo (2.22), (2.24) y (2.25) en (2.21) obtenemos

$$
\|\partial_x (u - \mathcal{Q}_1 u)\|_{0,\Omega_s} \leq C h \varepsilon^{-\frac{1}{2}},
$$

y por simetría se sigue que

$$
\|\partial_x (u - \mathcal{Q}_1 u)\|_{0,\Omega} \leq C h \varepsilon^{-\frac{1}{2}}.
$$

Similarmente, se puede obtener la estimación

$$
\|\partial_y (u - \mathcal{Q}_1 u)\|_{0,\Omega} \leq C h \varepsilon^{-\frac{1}{2}},
$$

concluyendo así la demostración.

□

Proposición 2.3 *Sea u la solución de (2.1) y $\mathcal{Q}_1 u$ la interpolación bilineal a trozos de u en la malla $\mathcal{T}_h$. Entonces, en virtud de la Hipótesis 1, tenemos*

$$
|||u - \mathcal{Q}_1 u|||_\beta \leq C h \left(1 + h \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right).
$$

Demostración

Dado que $\beta \leq \frac{C}{\varepsilon}$, a partir de las Proposiciones 2.1 y 2.2, se obtiene

$$\begin{aligned}
|||u - \mathcal{Q}_1 u|||_\beta^2 &= \varepsilon^2 \|\nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)\|_\beta^2 + \|u - \mathcal{Q}_1 u\|_\beta^2 \\
&= \varepsilon^2 \int_\Omega \beta(\nabla(u - \mathcal{Q}_1 u))^2 \, dxdy + \|u - \mathcal{Q}_1 u\|_\beta^2 \\
&\leq \varepsilon^2 \frac{C}{\varepsilon} \|\nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)\|_0^2 + \|u - \mathcal{Q}_1 u\|_\beta^2 \\
&\leq C\varepsilon\varepsilon^{-1} h^2 + Ch^4 \log \frac{1}{\varepsilon} = Ch^2 \left(1 + h^2 \log \frac{1}{\varepsilon}\right),
\end{aligned}$$

con lo cual, $|||u - \mathcal{Q}_1 u|||_\beta \leq Ch \left(1 + h \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$.

□

Definimos ahora el espacio V_h como el conjunto de funciones continuas que son bilineales en cada elemento de la malla $\mathcal{T}_h$. Considerando la solución u_h del problema (2.4) con este espacio discreto, la proposición anterior nos permite derivar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.1 *Sea u la solución de (2.1) y u_h la solución de (2.4). Existe una constante C tal que*

$$|||u - u_h|||_\beta \leq Ch \left(1 + h \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Demostración

Como consecuencia de la estimación del error de aproximación dada en (2.6) y de la Proposición 2.3, surge que

$$|||u - u_h|||_\beta \leq C \inf_{w_h \in V_h} |||u - w_h|||_\beta \leq C|||u - \mathcal{Q}_1 u|||_\beta \leq Ch \left(1 + h \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

obteniéndose así la estimación del error deseada.

□

2.4. Lemas técnicos

En esta sección presentamos algunos resultados técnicos, como la demostración de estimaciones a priori puntuales de la solución y propiedades de β en cada elemento, que aplicaremos fuertemente en lo que resta del capítulo.

Para empezar, denotemos por β_{min} y β_{max} a las funciones constantes a trozos tales que, en cada elemento $R \in \mathcal{T}_h$, se cumple:

$$\beta_{min}|_R = \min_{(x,y)\in R} \beta(x,y), \qquad \beta_{max}|_R = \max_{(x,y)\in R} \beta(x,y).$$

Claramente, β_{min} y β_{max} dependen de la malla $\mathcal{T}_h$, pero esta dependencia se omite por simplicidad de la notación.

El siguiente Lema es una consecuencia de [40, Lema 1.1 y 1.2]. Además de las condiciones de compatibilidad de la sección anterior, asumimos aquí que las derivadas de cuarto orden de f y b son Hölder continuas hasta el borde. También se asume que $b(x,y) \geq 2b_0^2$.

Lema 2.4 *Sea u la solución de (2.1). Entonces, para todo $x \in (0,\frac{3}{4}) \times (0,\frac{3}{4})$ y $k \leq 2$, se cumple que*

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x \partial_y^k u(x,y)\right| &\lesssim \left(1+\varepsilon^{1-k}\right) + \varepsilon^{-1} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-k} e^{-b_0 \frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-1-k} e^{-b_0 \frac{x+y}{\varepsilon}}, \\
\left|\partial_y \partial_x^k u(x,y)\right| &\lesssim \left(1+\varepsilon^{1-k}\right) + \varepsilon^{-k} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-1} e^{-b_0 \frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-1-k} e^{-b_0 \frac{x+y}{\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Estimaciones similares son válidas en los subdominios $\left(0,\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4},1\right)$ (reemplazando y por $1-y$), $\left(\frac{1}{4},1\right) \times \left(0,\frac{3}{4}\right)$ (reemplazando x por $(1-x)$) y $\left(\frac{1}{4},1\right) \times \left(\frac{1}{4},1\right)$ (reemplazando x por $1-x$ e y por $1-y$).

Este Lema nos permite obtener el siguiente resultado.

Lema 2.5 *Sea u la solución de (2.1). Entonces, bajo la Hipótesis 1, tenemos que existe una constante C tal que*

$$\varepsilon \left[\sum_{i,j=1}^{M} \beta_{min} \left(h_i^2 \|\partial_x^3 u\|_{0,R_{ij}} + h_i h_j \|\partial_x^2 \partial_y u\|_{0,R_{ij}} + h_j^2 \|\partial_x \partial_y^2 u\|_{0,R_{ij}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} h^2. \tag{2.26}$$

<u>*Demostración*</u>

Es claro que, por argumentos de simetría, basta obtener (2.26) cuando la suma en el lado izquierdo se restringe a los índices $i,j = 1,\ldots,mid$, es decir, con $R_{ij} \subseteq \Omega_s = [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}]$. Dividamos Ω_s como se indica en la Figura 2.3. Más precisamente,

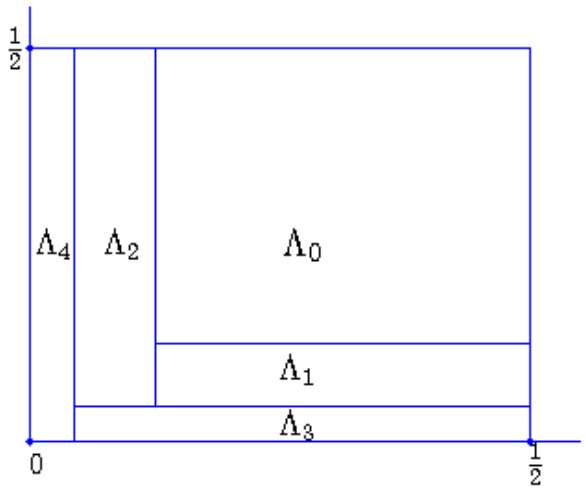


Figura 2.3: Divisón de $\Omega_s = [0, \frac{1}{2}]^2$ usada en la demostración del Lema 2.5

definimos

$$\Lambda_0 = \left(x_{\bar{m}}, \tfrac{1}{2}\right) \times \left(x_{\bar{m}}, \tfrac{1}{2}\right), \qquad \Lambda_1 = \left(x_{\bar{m}}, \tfrac{1}{2}\right) \times (x_1, x_{\bar{m}}),$$

$$\Lambda_2 = (x_1, x_{\bar{m}}) \times \left(x_1, \tfrac{1}{2}\right), \qquad \Lambda_3 = \left(x_1, \tfrac{1}{2}\right) \times (0, x_1),$$

$$\Lambda_4 = (0, x_1) \times \left(0, \tfrac{1}{2}\right),$$

donde $x_{\bar{m}}$ es un punto de la grilla $\{x_i\}$ con $x_{\bar{m}} = \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$, siendo γ_0 como consideramos en la demostración de la Proposición 2.1 $\left(\gamma_0 \geq \text{máx}\left\{\frac{2}{b_0}.\frac{1}{\gamma}\right\}\right)$. Usamos la notación

$$A(\Lambda_k) := \varepsilon \left[\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_k} \beta_{min} \left(h_i^2 \|\partial_x^3 u\|_{0,R_{ij}} + h_i h_j \|\partial_x^2 \partial_y u\|_{0,R_{ij}} + h_j^2 \|\partial_x \partial_y^2 u\|_{0,R_{ij}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Estimaremos separadamente $A(\Lambda_k)$ para $k = 0, \ldots, 4$.

$k = 0$. Teniendo en cuenta la elección de $x_{\bar{m}}$, como $\gamma_0 \geq \frac{2}{b_0}$, de los Lemas 2.3 y 2.4 obtenemos que

$$|D^3 u(x, y)| \leq C\varepsilon^{-1},$$

y dado que $\gamma_0 \geq \frac{1}{\gamma}$, también se tiene que

$$\beta_{min} \leq \beta(x,y) \leq C, \quad \forall (x,y) \in \Lambda_0.$$

Como $h_i \leq h$ para todo i, se obtiene fácilmente que

$$A(\Lambda_0) = \varepsilon \left[\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_0} \beta_{min} \left(h_i^2 \|\partial_x^3 u\|_{0,R_{ij}} + h_i h_j \|\partial_x^2 \partial_y u\|_{0,R_{ij}} + h_j^2 \|\partial_x \partial_y^2 u\|_{0,R_{ij}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \varepsilon \left[\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_0} C \left(h^2 C\varepsilon^{-1} + h^2 C\varepsilon^{-1} + h^2 C\varepsilon^{-1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq Ch^2.$$

$k = 1$. En Λ_1 usamos que

$$\beta(x,y) \leq C\varepsilon^{-1}.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $|\Lambda_1| \leq C\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$ puesto que la longitud de Λ_1 en la dirección y está acotada por $C\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$, que $h_i \leq hx^\alpha$ para $(x,y) \in R_{ij} \subseteq \Lambda_1$ por la propiedad (1.7) de las mallas graduadas, y usando el Lema 2.3, obtenemos

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subseteq\Lambda_1} \beta_{min} \left(h_i^2 \|\partial_x^3 u\|_{0,R_{ij}} \right)^2 \leq C\varepsilon^{-1} h^4 \log \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.27}$$

Luego, considerando nuevamente la estimación del Lema 2.4 con $k = 2$ resulta

$$\left| \partial_y \partial_x^2 u(x,y) \right| \leq C \left(1 + \varepsilon^{-1} \right) + \varepsilon^{-2} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-1} e^{-b_0 \frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-3} e^{-b_0 \frac{x+y}{\varepsilon}}. \tag{2.28}$$

Además, sabemos que $h_i, h_j \leq h$, $h_j \leq hy^\alpha$ para $(x,y) \in R_{ij} \subseteq \Lambda_1$ por la propiedad (1.8) de las mallas graduadas, y, usando que $\gamma_0 \geq \frac{2}{b_0}$, tenemos que $\varepsilon^{-2} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}} \leq C$ en Λ_1.

Con todos los argumentos previos, obtenemos

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_1} \beta_{min} \left(h_i h_j \|(1 + \varepsilon^{-1})\|_{0,R_{ij}} \right)^2 \leq Ch^4 \varepsilon^{-2} \log \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_1} \beta_{min} \left(h_i h_j \|\varepsilon^{-2} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}} \right)^2 \leq Ch^4 \log \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_1} \beta_{min} \left(h_i h_j \|\varepsilon^{-1} e^{-b_0 \frac{y}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}} \right)^2 \leq Ch^4,$$

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_1} \beta_{min}\left(h_i h_j \|\varepsilon^{-3} e^{-b_0\frac{(x+y)}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4.$$

Entonces, junto con (2.28) llegamos a

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_1} \beta_{min}\left(h_i h_j \|\partial_x^2\partial_y u\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^{-2}\log\frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.29}$$

Ahora, nuevamente a partir del Lema 2.4 con $k=2$, tenemos

$$\left|\partial_x\partial_y^2 u(x,y)\right| \leq C\left(1+\varepsilon^{-1}\right) + \varepsilon^{-1}e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-2}e^{-b_0\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-3}e^{-b_0\frac{x+y}{\varepsilon}}. \tag{2.30}$$

Con lo cual, recordando además que $h_j \leq h$, $|\Lambda_1| \leq C\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon^{-2}e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}} \leq C$ en Λ_1 y $h_j \leq hy^\alpha$ para $(x,y)\in R_{ij}\subseteq\Lambda_1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_1} \beta_{min}\left(h_j^2\|(1+\varepsilon^{-1}) + \varepsilon^{-1}e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^{-2}\log\frac{1}{\varepsilon},\\
&\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_1} \beta_{min}\left(h_j^2\|\varepsilon^{-2}e^{-b_0\frac{y}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4,\\
&\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_1} \beta_{min}\left(h_j^2\|\varepsilon^{-3}e^{-b_0\frac{x+y}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

que junto con (2.30) nos lleva a

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_1} \beta_{min}\left(h_j^2\|\partial_x\partial_y^2 u\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^{-2}\log\frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.31}$$

Las desigualdades (2.27), (2.29) y (2.31) conducen a

$$A(\Lambda_1) \leq C\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} h^2.$$

$k=2$. En Λ_2 también tenemos que

$$\beta(x,y) \leq C\varepsilon^{-1}.$$

Además, dado que $h_i \leq hx^\alpha$ para $(x,y)\in R_{ij}\subseteq\Lambda_2$, se sigue del Lema 2.3 con $k=3$ que

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_2} \beta_{min}\left(h_i^2\|\partial_x^3 u\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^{-2}. \tag{2.32}$$

Usando nuevamente la estimación (2.28) y teniendo en cuenta que, para $R_{ij} \subseteq \Lambda_2$, se cumplen las desigualdades $h_i, h_j \leq h$, $h_i \leq hx^\alpha$, $h_j \leq hy^\alpha$ para $(x,y) \in R_{ij}$ y $h_i \leq Ch\varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon}$, y $|\Lambda_2| \leq C\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}$, se puede verificar que

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_2} \beta_{min}h_i^2h_j^2\|(1+\varepsilon^{-1})\|_{0,R_{ij}}^2 \leq C\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^3 h^4,$$

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_2} \beta_{min}h_i^2h_j^2\|\varepsilon^{-2}e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}}^2 \leq C\varepsilon^{-2}h^4,$$
$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_2} \beta_{min}h_i^2h_j^2\|\varepsilon^{-1}e^{-b_0\frac{y}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}}^2 \leq Ch^4,$$
$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_2} \beta_{min}h_i^2h_j^2\|\varepsilon^{-3}e^{-b_0\frac{(x+y)}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}}^2 \leq C\varepsilon^{-1}h^4.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_2} \beta_{min}\left(h_ih_j\|\partial_x^2\partial_y u\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^{-2}. \tag{2.33}$$

Ahora, usamos la estimación (2.30) y recordamos que, para $R_{ij} \subseteq \Lambda_2$, se cumple que $h_j \leq h$ y $h_j \leq hy^\alpha$ para $(x,y) \in R_{ij}$, y $|\Lambda_2| \leq C\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}$. Con esto, se sigue que

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_2} \beta_{min}\left(h_j^2\|(1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-1}e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}})\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^{-2}\log\frac{1}{\varepsilon},$$
$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_2} \beta_{min}\left(h_j^2\|\varepsilon^{-2}e^{-b_0\frac{y}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4,$$
$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_2} \beta_{min}\left(h_j^2\|\varepsilon^{-3}e^{-b_0\frac{x+y}{\varepsilon}}\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq C\varepsilon^{-2}h^4.$$

De lo anterior entonces, obtenemos que

$$\sum_{i,j:R_{ij}\subset\Lambda_2} \beta_{min}\left(h_j^2\|\partial_x\partial_y^2 u\|_{0,R_{ij}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^{-2}\log\frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.34}$$

Finalmente, recopilando (2.32)–(2.34), tenemos que

$$A(\Lambda_2) \leq C \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} h^2.$$

$k = 3$. Notemos que R_{11} está fuera de Λ_3 y, por lo tanto, tenemos que $h_i \leq hx^\alpha$ para todo $(x, y) \in R_{i1} \subseteq \Lambda_3$. Dado que $h \leq e^{-1}$, resulta

$$h_1 = h^{2\log\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon^{2\log\frac{1}{h}} < \varepsilon^2$$

y, en consecuencia, se cumple que $|\Lambda_3| \leq C\varepsilon^2$. Además, utilizaremos que $\beta(x, y) \leq C\varepsilon^{-1}$ en Λ_3. Luego, a partir de la estimación para $|\partial_x^3 u|$ del Lema 2.3, obtenemos

$$\sum_{i:R_{i1}\subset\Lambda_3} \beta_{min} \left(h_i^2 \|_{0,R_{i1}} \partial_x^3 u\|\right)^2 \leq Ch^4 \int_0^{h_1} \int_0^1 \left(1 + \varepsilon^{-3} x^{2\alpha} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}}\right)^2 dx\, dy \leq Ch^4. \quad (2.35)$$

Ahora, tomamos nuevamente en cuenta la estimación (2.28). Siguiendo el argumento previo y dado que $h_i \leq h$ y $h_1 \leq h\varepsilon$, tenemos

$$\sum_{i:R_{i1}\subset\Lambda_3} \beta_{min} \left(h_i h_1 \|1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1} e^{-b_0 \frac{y}{\varepsilon}} \|_{0,R_{i1}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon,$$
$$\sum_{i:R_{i1}\subset\Lambda_3} \beta_{min} \left(h_i h_1 \|\varepsilon^{-2} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}} \|_{0,R_{i1}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^2,$$

y, dado que $h_i \leq hx^\alpha$ para todo $(x, y) \in R_{i1} \subseteq \Lambda_3$, también se cumple que

$$\sum_{i:R_{i1}\subset\Lambda_3} \beta_{min} \left(h_i h_1 \|\varepsilon^{-3} e^{-b_0 \frac{x+y}{\varepsilon}} \|\right)^2 \leq Ch^4.$$

Así, llegamos a

$$\sum_{i:R_{i1}\subset\Lambda_3} \beta_{min} \left(h_i h_1 \|\partial_x^2 \partial_y u\|_{0,R_{i1}}\right)^2 \leq h^4. \quad (2.36)$$

Por otro lado, utilizando ahora la estimación (2.30) y dado que nuevamente $h_1 \leq h\varepsilon$, obtenemos

$$\sum_{i:R_{i1}\subset\Lambda_3} \beta_{min} \left(h_1^2 \|1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1} e^{-b_0 \frac{x}{\varepsilon}} \|_{0,R_{i1}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^3,$$

$$\sum_{i:R_{i1}\subset\Lambda_3} \beta_{min}\left(h_1^2\|\varepsilon^{-2}e^{-b_0\frac{y}{\varepsilon}}\|_{0,R_{i1}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon.$$

Con todos los argumentos previos, podemos verificar que

$$\sum_{i:R_{i1}\subset\Lambda_3} \beta_{min}\left(h_1^2\|\varepsilon^{-3}e^{-b_0\frac{x+y}{\varepsilon}}\|\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^4.$$

Las tres últimas desigualdades nos llevan a concluir que

$$\sum_{i:R_{i1}\subset\Lambda_3} \beta_{min}\left(h_1^2\|\partial_x\partial_y^2 u\|_{0,R_{i1}}\right)^2 \leq h^4\varepsilon. \tag{2.37}$$

Finalmente, combinando (2.35)–(2.37), obtenemos que

$$A(\Lambda_3) \leq Ch^2\varepsilon.$$

$k = 4$. Finalmente, consideramos la estimación en Λ_4.

Notamos que

$$h_1 = h^{2\log\frac{1}{\varepsilon}} = h^{\log\frac{1}{\varepsilon}}h^{\log\frac{1}{\varepsilon}} = h^{\log\frac{1}{\varepsilon}}\varepsilon^{\log\frac{1}{h}} \leq h\varepsilon.$$

Además, como demostramos en el ítem anterior, también se cumple que $h_1 < \varepsilon^2$ y, como consecuencia, $|\Lambda_4| \leq \varepsilon^2$. Luego, podemos usar directamente que $|\partial_x^3 u(x,y)| \leq C\varepsilon^{-3}$, lo cual se sigue del Lema 2.3, para obtener

$$\sum_{\substack{j:R_{1j}\subset\Lambda_4\\ j\neq 1}} \beta_{min}\left(h_1^2\|\partial_x^3 u\|_{0,R_{1j}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^{-1}. \tag{2.38}$$

Ahora, usamos nuevamente la estimación (2.28). En primer lugar, notemos que, dado que $h_j \leq h$, se cumple que

$$\sum_{\substack{j:R_{1j}\subset\Lambda_4\\ j\neq 1}} \beta_{min}\left(h_1h_j\|(1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-1}e^{-b_0\frac{y}{\varepsilon}})\|_{0,R_{1j}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon,$$

$$\sum_{\substack{j:R_{1j}\subset\Lambda_4\\ j\neq 1}} \beta_{min}\left(h_1h_j\|\varepsilon^{-2}e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}}\|_{0,R_{1j}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^{-1}.$$

En segundo lugar, dado que $h_j \leq hy^\alpha$ para todo $(x,y) \in R_{1j} \subseteq \Lambda_4$, con $j \neq 1$,

también se cumple que

$$\sum_{\substack{j:R_{1j}\subset\Lambda_4\\ j\neq 1}} \beta_{min}\left(h_1h_j\|\varepsilon^{-3}e^{-b_0\frac{x+y}{\varepsilon}}\|_{0,R_{1j}}\right)^2 \leq Ch^4.$$

A partir de las tres desigualdades anteriores, obtenemos que

$$\sum_{\substack{j:R_{1j}\subset\Lambda_4\\ j\neq 1}} \beta_{min}\left(h_1h_j\|\partial_x^2\partial_y u\|_{0,R_{1j}}\right) \leq Ch^4\varepsilon^{-1}. \tag{2.39}$$

Ahora, utilizando la estimación (2.30) y dado que $|\Lambda_4| \leq \varepsilon^2$ y $h_j \leq h$, se cumple que

$$\sum_{\substack{j:R_{1j}\subset\Lambda_4\\ j\neq 1}} \beta_{min}\left(h_j^2\|(1+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-1}e^{-b_0\frac{x}{\varepsilon}})\|_{0,R_{1j}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^{-1}.$$

También tenemos que

$$\sum_{\substack{j:R_{1j}\subset\Lambda_4\\ j\neq 1}} \beta_{min}\left(h_j^2\|\varepsilon^{-2}e^{-b_0\frac{y}{\varepsilon}}\|_{0,R_{1j}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon^2,$$

$$\sum_{\substack{j:R_{1j}\subset\Lambda_4\\ j\neq 1}} \beta_{min}\left(h_j^2\|\varepsilon^{-3}e^{-b_0\frac{x+y}{\varepsilon}}\|_{0,R_{1j}}\right)^2 \leq Ch^4,$$

donde nuevamente usamos que $h_1 \leq \varepsilon^2$ y $h_j \leq hy^\alpha$ para $(x,y) \in R_{1j} \subseteq \Lambda_4$, con $j \neq 1$. Luego, obtenemos que

$$\sum_{\substack{j:R_{1j}\subset\Lambda_4\\ j\neq 1}} \beta_{min}\left(h_j^2\|\partial_x\partial_y^2 u\|_{0,R_{1j}}\right) \leq Ch^4\varepsilon^{-1}. \tag{2.40}$$

Finalmente, dado que

$$|\partial_x^3 u(x,y)|, |\partial_x^2\partial_y u(x,y)|, |\partial_x\partial_y^2 u(x,y)| \leq C\varepsilon^{-3}, \quad \forall (x,y) \in \Lambda_4$$

y usando que $h_1 \leq h\varepsilon$ y $h_1 \leq \varepsilon^2$, además de que $|R_{11}| \leq \varepsilon^4$, obtenemos que

$$\beta_{min}h_1^4\left(\|\partial_x^3 u\|_{0,R_{11}} + \|\partial_x^2\partial_y u\|_{0,R_{11}} + \|\partial_x\partial_y^2\|_{0,R_{11}}\right)^2 \leq Ch^4\varepsilon. \tag{2.41}$$

Por lo tanto, las desigualdades (2.38)–(2.41) nos llevan a concluir que

$$A(\Lambda_4) \leq Ch^2\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

De este modo, obtenemos (2.26) cuando los índices i, j están restringidos a aquellos para los cuales $R_{ij} \subset \Omega_s$. La demostración concluye por argumentos de simetría.

□

Por último, el siguiente Lema presenta una estimación de la relación entre β_{min} y β_{max} dentro de los elementos de la malla, la cual es fundamental para nuestras estimaciones.

Lema 2.6 *Existe una constante positiva η, independiente de h y ε, tal que en mallas graduadas $\mathcal{T}_h$, suponiendo que $h < e^{-1}$, se obtiene:*

$$\frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \leq C\varepsilon^{-\eta h} \qquad \text{en } \Omega.$$

Demostración

Debido a la simetría del problema, es suficiente estimar β_{max}/β_{min} para los elementos contenidos en $\Omega_s = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$. En los elementos R_{1j} o $R_{i1}, i, j = 1, \ldots, mid$, tenemos que

$$\beta_{min} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}d_{max}} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}h^s},$$
$$\beta_{max} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}d_{min}} = 1 + \frac{1}{\varepsilon},$$

donde naturalmente d_{max} y d_{min} representan el máximo y el mínimo de la distancia al borde en ese elemento. No obstante,

$$h^s = h^{-2\log\varepsilon} = \varepsilon^{2\log\frac{1}{h}},$$

entonces, dado que $h < e^{-1}$,

$$-\frac{\gamma}{\varepsilon}h^s = -\gamma\varepsilon^{2\log\frac{1}{h}-1} > -\gamma\varepsilon$$

y por lo tanto,

$$\beta_{min} > 1 + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\varepsilon}.$$

Con esto podemos concluir que

$$\frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} < \frac{1 + \frac{1}{\varepsilon}}{1 + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\varepsilon}} < C.$$

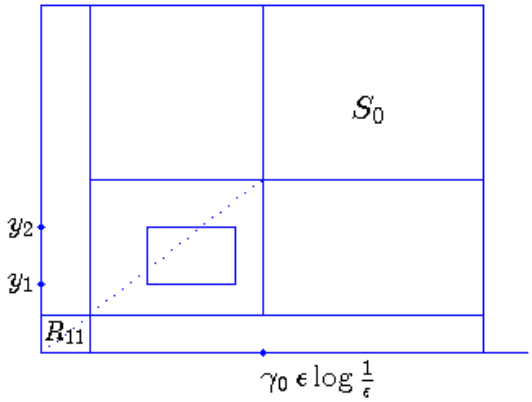


Figura 2.4: Notación en Ω_s para la prueba del Lema 2.6

Ahora, consideramos un rectángulo R_{ij} con

$$i > 1 \qquad \text{y} \qquad x_j \leq \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$$

ó

$$j > 1 \qquad \text{y} \qquad x_i \leq \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon},$$

donde γ_0 es una constante como consideramos en la Proposición 2.1 y en el Lema 2.5 ($\gamma_0 \geq \text{máx}\,\{2/b_0, 1/\gamma\}$ de manera tal que $\gamma_0 \varepsilon \log 1/\varepsilon$ y $1 - \gamma_0 \varepsilon \log 1/\varepsilon$ sean puntos de la malla).

Observemos que es suficiente considerar un caso como en la Figura 2.4, y utilicemos la notación introducida en la misma. Tenemos que

$$d_{min} = y_1, \qquad d_{max} = y_2,$$

y entonces $\beta_{min} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma \frac{y_2}{\varepsilon}}$ y $\beta_{max} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma \frac{y_1}{\varepsilon}}$. Luego,

$$\frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} = \frac{1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{d_{min}}{\varepsilon}}}{1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{d_{max}}{\varepsilon}}} = 1 + \frac{\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{d_{max}}{\varepsilon}}}{1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{d_{max}}{\varepsilon}}}\left(e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}(d_{min}-d_{max})}-1\right)$$
$$= 1 + \frac{\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{y_2}{\varepsilon}}}{1+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\gamma\frac{y_2}{\varepsilon}}}\left(e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}(y_1-y_2)}-1\right) \leq 1 + e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}(y_2-y_1)} - 1 = e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}hy_1^\alpha}.$$

Sin embargo, dado que $\varepsilon^{\frac{1}{\log\varepsilon}} = e$, obtenemos

$$hy_1^\alpha \leq h\left(\gamma_0\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1-\frac{1}{2\log\frac{1}{\varepsilon}}} = h\gamma_0\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}\left(\gamma_0\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\log\varepsilon}}$$
$$= h\varepsilon e^{\frac{1}{2}}\gamma_0^{1+\frac{1}{2\log\varepsilon}}\log\frac{1}{\varepsilon}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\log\varepsilon}} \leq Ch\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon},$$

donde usamos que $\gamma_0^{1+\frac{1}{2\log\varepsilon}} \leq C$ y $\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\log\varepsilon}} \leq C$. Así, resulta

$$e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}hy_1^\alpha} \leq e^{Ch\gamma\log\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon^{-\gamma Ch}.$$

Finalmente, es claro que en los rectángulos R_{ij} con x_i o x_j mayores que $\gamma_0\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}$ tenemos que

$$\frac{\beta_{max}}{\beta_{min}} \sim 1$$

y esto concluye la demostración.

□

2.5. Supercloseness

En esta sección, demostramos el siguiente resultado de *supercloseness*, que nos dice que la norma β de la diferencia entre la interpolación de la solución exacta u y la aproximación por elementos finitos u_h es de mayor orden que la norma β del error $u - u_h$.

Teorema 2.2 *Existen constantes positivas C y η, independientes de ε y h, tales que, en mallas graduadas $\mathcal{T}_h$, al suponer que $h < e^{-\frac{3}{2}}$ y $\varepsilon < ch^3$ para una constante fija $c \geq 1$, se obtiene*

$$\left|\!\left|\!\left| u_h - \mathcal{Q}_1 u \right|\!\right|\!\right|_\beta \leq C\varepsilon^{-\eta h}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)h^2.$$

Demostración

Para las mallas $\mathcal{T}_h$, introducimos la función constante a trozos h_{min} que, en cada rectángulo $R \in \mathcal{T}_h$, toma el mínimo de las longitudes de los lados de R.

Teniendo en cuenta las propiedades de la función distancia al borde d vistas en la Sección 2.1, se puede comprobar que, dado un elemento $R \in T_h$ y un punto $(x, y) \in R$, existe $(x_{int}, y_{int}) \in R$ tal que

$$|\beta(x, y) - \beta_{min}| \leq C h_{min} |\nabla \beta(x_{int}, y_{int})|. \tag{2.42}$$

Para esto, si $R \in \mathcal{T}_h$, consideremos $(x_{min}, y_{min}) \in R$ tal que $\beta_{min}|_R = \beta(x_{min}, y_{min})$ y dividamos a Ω como vimos en la Figura 2.1. Si $R \subset \Omega_4$ y $(x, y) \in R$, como $d \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, por Teorema de Lagrange tenemos que existe $(x_{int}, y_{int}) \in R$ tal que

$$\begin{aligned} |\beta(x, y) - \beta_{min}(x, y)| &= \left| \nabla \beta(x_{int}, y_{int}) \frac{(x, y) - (x_{min}, y_{min})}{|(x, y) - (x_{min}, y_{min})|} \right| |(x, y) - (x_{min}, y_{min})| \\ &= |\nabla \beta(x_{int}, y_{int})| \, |(x, y) - (x_{min}, y_{min})| \\ &\leq C \, |\nabla \beta(x_{int}, y_{int})| \, h_{min}. \end{aligned}$$

Observemos ahora que, si $(x, y) \in R$, donde R es un elemento de $\mathcal{T}_h$ contenido en $\Omega_3 \cup \Omega_4$ que intersecta a la recta $x + y = 1$, no podemos asegurar que d sea suave en todo R. En particular, puede ocurrir que, por ejemplo, $(x, y) \in \Omega_4$ mientras que $(x_{min}, y_{min}) \in \Omega_3$, y en tal caso, no es válido aplicar el Teorema de Lagrange como lo hicimos anteriormente. No obstante, podemos considerar el punto de R con coordenadas (x, y_{min}), el cual se encuentra sobre la recta $x + y = 1$, y notar que $\beta(x, y_{min}) = \beta(x_{min}, y_{min})$, ya que la distancia al borde es la misma para ambos puntos. Esto nos permite obtener la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} |\beta(x, y) - \beta_{min}(x, y)| &= |\beta(x, y) - \beta(x, y_{min})| \\ &\leq \left| \nabla \beta(x_{int}, y_{int}) \frac{(x, y) - (x, y_{min})}{|(x, y) - (x, y_{min})|} \right| |(x, y) - (x, y_{min})| \\ &= |\nabla \beta(x_{int}, y_{int})| \, |(x, y) - (x, y_{min})| \\ &\leq C \, |\nabla \beta(x_{int}, y_{int})| \, h_{min}, \end{aligned}$$

donde $(x_{int}, y_{int}) \in R \cap \Omega_4$ es un punto obtenido al aplicar el Teorema de Lagrange en la región $R \cap \Omega_4$. Un razonamiento análogo puede realizarse para los demás casos, ya sea cuando $R \subset \Omega_i, i = 1, 2, 3$, o cuando $R \subset \Omega_i \cap \Omega_j$, siempre que esta intersección tenga sentido.

Basándonos en la coercitividad y la ortogonalidad de Galerkin de la forma bilineal $B_\beta(\cdot,\cdot)$, obtenemos

$$\begin{aligned} C|||u_h - \mathcal{Q}_1 u|||_\beta^2 &\leq B_\beta(u_h - \mathcal{Q}_1 u, u_h - \mathcal{Q}_1 u) \\ &= B_\beta(u - \mathcal{Q}_1 u, u_h - \mathcal{Q}_1 u). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Luego, para cualquier $w \in V_h$, tenemos que

$$\begin{aligned} B_\beta(u - \mathcal{Q}_1 u, w) &= \int_\Omega \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u) \cdot \nabla(\beta w)\, dxdy + \int_\Omega b(x,y)(u - \mathcal{Q}_1 u)\,(\beta w)\, dxdy \\ &= \int_\Omega \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)\beta \cdot \nabla(w)\, dxdy + \int_\Omega \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u) \cdot \nabla(\beta) w\, dxdy \\ &\quad + \int_\Omega b(x)(u - \mathcal{Q}_1 u)\,(\beta w)\, dxdy \\ &= \int_\Omega \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)(\beta - \beta_{min}) \cdot \nabla w\, dxdy + \int_\Omega \varepsilon^2 \beta_{min} \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u) \cdot \nabla w\, dxdy \\ &\quad + \int_\Omega \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u) \cdot \nabla(\beta) w\, dxdy + \int_\Omega b(x)(u - \mathcal{Q}_1 u)\beta w\, dxdy \\ &=: I + II + III + IV \end{aligned} \tag{2.44}$$

En las subsecciones siguientes, demostraremos las estimaciones que se detallan a continuación para los términos I, II, III y IV.

$$|I|, |III| \leq C\varepsilon^{-\eta h} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) h^2 |||w|||_\beta \quad \text{y} \quad |II|, |IV| \leq C\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} h^2 |||w|||_\beta. \tag{2.45}$$

Con esto , de (2.43), la descomposición (2.44) con $w = u_h - \mathcal{Q}_1 u \in V_h$ y las estimaciones dadas en (2.45), obtenemos

$$|||u_h - \mathcal{Q}_1 u|||_\beta^2 \leq C\varepsilon^{-\eta h} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) h^2 |||u_h - \mathcal{Q}_1 u|||_\beta,$$

de donde se concluye la demostración.

□

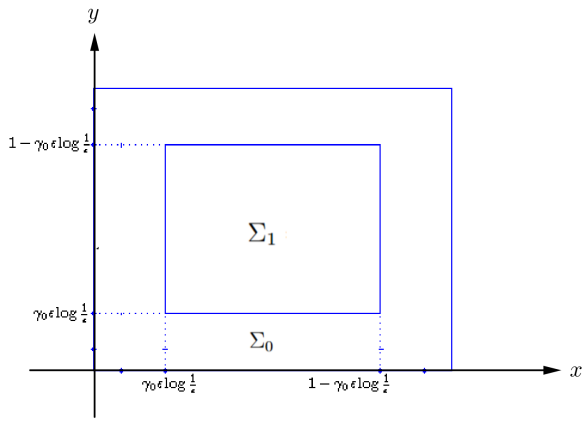


Figura 2.5: Descomposición de Ω para la prueba del Teorema 2.2.

2.5.1. Estimación de I

Estimemos

$$I = \int_\Omega \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)(\beta - \beta_{min}) \cdot \nabla w \, dxdy.$$

Usando las propiedades (2.2) y (2.42) y el Lema 2.6, tenemos que

$$\begin{aligned} |\beta(x,y) - \beta_{min}| &\leq C h_{min} \, |\nabla \beta(x_{int}, y_{int})| \\ &\leq C h_{min} \varepsilon^{-1} \beta(x_{int}, y_{int}) \\ &\leq C h_{min} \varepsilon^{-1} \varepsilon^{-\eta h} \beta(x,y). \end{aligned}$$

Definamos

$$\Sigma_0 = \left\{ (x,y) \in \Omega : \text{mín}\{x, y, 1-x, 1-y\} \leq \gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} \right\},$$

como se muestra en la Figura 2.5. Para los elementos $R \subset \Sigma_0$, tenemos que $h_{\text{mín},R} \leq \gamma_0 \, h\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$ y, por lo tanto,

$$|\beta(x,y) - \beta_{min}| \leq C h \varepsilon^{-\eta h} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right) \beta(x,y).$$

Así, se obtiene que

$$\left| \int_{\Sigma_0} \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)(\beta - \beta_{min}) \cdot \nabla w \, dxdy \right|$$

$$\leq Ch\varepsilon^{-\eta h}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\left[\varepsilon\|\beta^{\frac{1}{2}}\nabla(u-\mathcal{Q}_1u)\|_{0,\Sigma_0}\right]\left[\varepsilon\|\beta^{\frac{1}{2}}\nabla w\|_{0,\Sigma_0}\right]$$
$$\leq Ch^2\varepsilon^{-\eta h}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)|||w|||_{\beta,\Sigma_0},$$

donde en la última desigualdad usamos la estimación

$$\varepsilon\|\nabla(u-\mathcal{Q}_1u)\|_{\beta,\Omega}\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\nabla(u-\mathcal{Q}_1u)\|_{0,\Omega}\leq Ch, \tag{2.46}$$

que se puede obtener a partir de la definición de la norma β, la Proposición 2.2 y el hecho de que $\beta\leq C\varepsilon^{-1}$.

Ahora, definamos $\Sigma_1=\Omega\setminus\Sigma_0$. Como $\gamma_0\geq\frac{2}{b_0}$, se tiene que

$$\beta(x,y),|\nabla\beta(x,y)|\leq C,\qquad\forall(x,y)\in\Sigma_1.$$

Por lo tanto, es fácil verificar que

$$|\beta(x,y)-\beta_{min}|\leq Ch\qquad(x,y)\in R,\quad R\subset\Sigma_1.$$

Como $\beta\geq 1$, tenemos que $\|\cdot\|_{\beta,\Sigma_1}\sim\|\cdot\|_{0,\Sigma_1}$. Entonces, usando nuevamente la estimación (2.46) obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Sigma_1}\varepsilon^2\nabla(u-\mathcal{Q}_1u)(\beta-\beta_{min})\cdot\nabla w\,dxdy\right|&\leq Ch\varepsilon\|\nabla(u-\mathcal{Q}_1u)\|_{0,\Sigma_1}\varepsilon\|\nabla w\|_{0,\Sigma_1}\\&\leq Ch\varepsilon\|\nabla(u-\mathcal{Q}_1u)\|_{\beta,\Sigma_1}\varepsilon\|\nabla w\|_{\beta,\Sigma_1}\\&\leq Ch^2|||w|||_{\beta,\Sigma_1}.\end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos que

$$|I|\leq C\varepsilon^{-\eta h}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)h^2|||w|||_\beta. \tag{2.47}$$

2.5.2. Estimación de II

Ahora, consideramos

$$II=\int_\Omega\beta_{min}\varepsilon^2\nabla(u-\mathcal{Q}_1u)\cdot\nabla w\,dxdy.$$

Dado que β_{min} es constante a trozos, podemos seguir el argumento propuesto por

Zlamal [65], como en [19, Lema 4.5], para obtener que, para cada elemento R_{ij}, se cumple que

$$\begin{aligned}
&\left|\varepsilon^2 \int_{R_{ij}} \beta_{min}\partial_x(u-\mathcal{Q}_1 u)\partial_x w\, dxdy\right| \\
&\leq C\varepsilon\beta_{min}^{\frac{1}{2}}\left(h_i^2\|\partial_{xxx}u\|_{0,R_{ij}} + h_ih_j\|\partial_{xxy}u\|_{0,R_{ij}} + h_j^2\|\partial_{xyy}u\|_{0,R_{ij}}\right)\varepsilon\beta_{min}^{\frac{1}{2}}\|\partial_x w\|_{0,R_{ij}} \\
&\leq C\varepsilon\beta_{min}^{\frac{1}{2}}\left(h_i^2\|\partial_{xxx}u\|_{0,R_{ij}} + h_ih_j\|\partial_{xxy}u\|_{0,R_{ij}} + h_j^2\|\partial_{xyy}u\|_{0,R_{ij}}\right)|||w|||_{\beta,R_{ij}}
\end{aligned}$$

En el Lema 2.5, demostramos que

$$\varepsilon\left[\sum_{i,j=1}^{M}\beta_{min}\left(h_i^2\|\partial_x^3 u\|_{0,R_{ij}} + h_ih_j\|\partial_x^2\partial_y u\|_{0,R_{ij}} + h_j^2\|\partial_x\partial_y^2 u\|_{0,R_{ij}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}h^2,$$

de lo cual podemos concluir que

$$II \leq C\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}h^2|||w|||_{\beta}. \tag{2.48}$$

2.5.3. Estimación de III

Ahora nos ocupamos de la estimación de III. Consideramos nuevamente $\Omega_s = \left[0,\frac{1}{2}\right]^2$. Queda claro entonces que, por razones de simetría, basta con estimar III_s, que se define de manera análoga a III, pero con la integral restringida a Ω_s. Así se tiene

$$\begin{aligned}
III_s &= \int_{\Omega_s}\varepsilon^2\nabla(u-\mathcal{Q}_1u)\cdot(\nabla\beta)\,w\,dxdy \\
&= \int_{D_1}\varepsilon^2\nabla(u-\mathcal{Q}_1u)\cdot(\nabla\beta)\,w\,dxdy + \int_{D_2}\varepsilon^2\nabla(u-\mathcal{Q}_1u)\cdot(\nabla\beta)\,w,dxdy \\
&=: III_1 + III_2
\end{aligned}$$

con

$$D_1 = \bigcup\{R : \nabla d \text{ es discontinuo en } R\subset\Omega_s\}, \quad D_2 = \Omega_s\setminus D_1.$$

Definimos los subconjuntos $S_A = \left[0,\gamma_0\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^2$ y $S_B = \left[\gamma_0\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{2}\right]^2$, de modo que

$$D_1 = (D_1\cap S_A)\cup(D_1\cap S_B).$$

Entonces, podemos escribir

$$III_{1,A} := \int_{D_1 \cap S_A} \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u) \cdot (\nabla \beta)\, w\, dxdy,$$
$$III_{1,B} := \int_{D_1 \cap S_B} \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u) \cdot (\nabla \beta)\, w\, dxdy.$$

Utilizaremos el hecho de que

$$|\nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)| \leq C \|\nabla u\|_\infty \leq C\varepsilon^{-1},$$

lo cual se deduce del Lema 2.1 y de las estimaciones a priori del Lema 2.3. Luego, usando la propiedad (2.2), tenemos que

$$|III_{1,A}| = \left| \int_{D_1 \cap S_A} \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u) \cdot (\nabla \beta)\, w\, dxdy \right| \leq C \int_{D_1 \cap S_A} \beta |w|\, dxdy$$

$$\leq C \left(\int_{D_1 \cap S_A} \beta\, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \|\beta^{\frac{1}{2}} w\|_{0, D_1 \cap S_A} \leq C \left(\int_{D_1 \cap S_A} \beta, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} |||w|||_\beta.$$

Dado que la longitud de los lados de los rectángulos en $D_1 \cap S_A$ es $O\left(h\left(\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}\right)^\alpha\right)$, podemos comprobar que

$$\int_{D_1 \cap S_A} \beta\, dxdy \leq Ch \left(\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} \right)^\alpha \int_0^{\gamma_0 \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma x/\varepsilon}\, dx + |D_1 \cap S_A|$$
$$\leq Ch \left(\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon} \right)^\alpha \leq Ch\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon},$$

donde para la última desigualdad recordamos que $\alpha = 1 - \frac{1}{2 \log \frac{1}{\varepsilon}}$. Se sigue entonces que

$$|III_{1,A}| \leq Ch^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} |||w|||_\beta \leq Ch^2 \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} |||w|||_\beta,$$

si $\varepsilon \leq ch^3$.

Por otro lado, en S_B, tenemos a $|\nabla \beta|, |\nabla u|$ y $|\nabla \mathcal{Q}_1 u|$ acotados independientemente de ε. También tenemos que $|D_1 \cap S_B| \leq Ch$. Entonces,

$$|III_{1,B}| = \left| \int_{D_1 \cap S_B} \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u) \cdot (\nabla \beta)\, w\, dxdy \right|$$
$$\leq C\varepsilon^2 |D_1 \cap S_B|^{\frac{1}{2}} \|w\|_{0, D_1 \cap S_B} \leq C\varepsilon^2 h^{\frac{1}{2}} |||w|||_\beta \leq Ch^2 |||w|||_\beta,$$

si $\varepsilon \leq ch$.

Entonces hemos obtenido que, si $\varepsilon \leq ch^3$,

$$III_1 \leq C\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} h^2 |||w|||_\beta. \tag{2.49}$$

Ahora, consideramos

$$III_2 = \int_{D_2} \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)\cdot(\nabla\beta)\, w\, dxdy.$$

En cada elemento R, consideramos $(\nabla\beta)_{min,R}$ el mínimo valor componente a componente de $\nabla\beta$ en R. Escribimos

$$III_2 = \int_{D_2} \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)\cdot(\nabla\beta - (\nabla\beta)_{min})\, w\, dxdy + \int_{D_2} \varepsilon^2 \nabla(u - \mathcal{Q}_1 u)\cdot(\nabla\beta)_{min}\, w\, dxdy$$

$$=: III_{21} + III_{22}.$$

Sea $D_{2A}^1 = D_2 \cap \{(x,y) : x \leq y \leq 1-x, x \leq \gamma_0 \varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon}\}$. Notemos que $d(x,y) = x$ en D_{2A}^1. Se sigue que

$$\nabla\beta(x,y) = \left(-\frac{\gamma}{\varepsilon^2} e^{-\gamma\frac{x}{\varepsilon}}, 0\right) \qquad \text{en } D_{2A}^1.$$

Por el Teorema del Valor Medio, ya que $\nabla\beta$ depende solamente de x y que, para los elementos rectangulares en D_{2A}^1, los lados horizontales tienen longitud mínima, tenemos

$$\nabla\beta(x,y) - (\nabla\beta)_{min,R} = \left(\frac{\gamma}{\varepsilon^3} e^{-\gamma\frac{x_{int}}{\varepsilon}}(x - x_{min,R}), 0\right)$$

con $x_{int} \in (x_{min,R}, x)$ y $x_{min,R}$ el mínimo valor de x en R. Ahora, como $\frac{1}{\varepsilon} e^{-\gamma\frac{x_{int}}{\varepsilon}} \leq \beta(x_{int}, y) \leq \beta_{max}$, a partir del Lema 2.6 obtenemos que

$$|\nabla\beta(x,y) - (\nabla\beta)_{min,R}| \leq C\varepsilon^{-\eta h}\varepsilon^{-2}\beta_{min,R} h_{min,R}.$$

Pero $h_{min,R} \leq Ch(\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon})^\alpha \leq Ch\varepsilon\log\frac{1}{\varepsilon}$ (en elementos que tienen intrsección con $x = 0$ también tenemos $h_{min} \leq Ch\varepsilon$). Entonces

$$|\nabla\beta(x,y) - (\nabla\beta)_{min,R}| \leq C\varepsilon^{-\eta h}\varepsilon^{-1}\beta_{min,R} h \log\frac{1}{\varepsilon}.$$

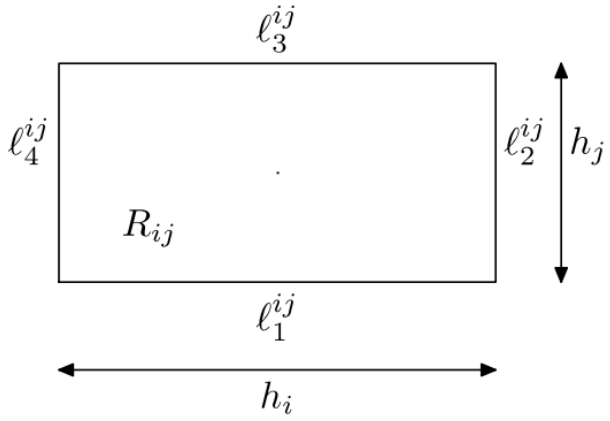


Figura 2.6: Notación para los lados de un elemento y sus longitudes.

Luego,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{D_{2A}^1} \varepsilon^2 \nabla(u-\mathcal{Q}_1 u)\cdot(\nabla\beta-(\nabla\beta)_{min})\,w\,dxdy\right| \\
&\leq C\varepsilon^{-\eta h} h\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_{D_{2A}^1}\left[\varepsilon\beta^{\frac{1}{2}}|\nabla(u-\mathcal{Q}_1 u)|\right]\left[\beta^{\frac{1}{2}}|w|\right]\,dxdy \\
&\leq C\varepsilon^{-\eta h} h^2\log\frac{1}{\varepsilon}|||w|||_\beta,
\end{aligned}$$

donde usamos (2.46).

En $D_{2A}^2 = D_2 \cap \{(x,y) : x \leq y \leq 1-x, x > \gamma_0 \varepsilon \log\frac{1}{\varepsilon}\}$ también tenemos que β y $|D^\delta(\beta)|$, con $0 \leq |\delta| \leq 2$, están acotados uniformemente con respecto a ε y también tenemos que $\beta \geq 1$, por lo que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{D_{2A}^2} \varepsilon^2 \nabla(u-\mathcal{Q}_1 u)\cdot(\nabla\beta-(\nabla\beta)_{min})\,w\,dxdy\right| &\leq Ch\varepsilon\|\varepsilon\beta^{\frac{1}{2}}\nabla(u-\mathcal{Q}_1 u)\|_{0,\Omega}\|\beta^{\frac{1}{2}}w\|_{0,\Omega} \\
&\leq Ch^2\varepsilon|||w|||_\beta.
\end{aligned}$$

Claramente, argumentos similares se pueden usar en $D_2 \setminus (D_{2A}^1 \cup D_{2A}^2)$ para obtener

$$|III_{21}| \leq C\varepsilon^{-\eta h} h^2\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)|||w|||_\beta. \tag{2.50}$$

Ahora, debemos estimar III_{22}. Llamemos $(\nabla\beta)_{min,R_{ij}} = q_{ij} = (q_{ij}^1, q_{ij}^2)$. Entonces

estimaremos

$$\sum_{R_{ij}\subset D_2}\int_{R_{ij}}\varepsilon^2 q_{ij}^1\partial_x(u-\mathcal{Q}_1u)w\,dxdy.$$

Seguiremos una técnica utilizada en [18, 63], y adoptaremos la notación de la Figura 2.6 para referirnos a los lados de un elemento y a sus respectivas longitudes. Definimos

$$K_{ij}(u,w)=\int_{R_{ij}}\partial_x(u-\mathcal{Q}_1u)w\,dxdy-\frac{h_i^2}{12}\left(\int_{\ell_2^{ij}}(\partial_{xx}u)w\,dy-\int_{\ell_4^{ij}}(\partial_{xx}u)w\,dy\right).$$

Entonces podemos escribir

$$\sum_{R_{ij}\subset D_2}\int_{R_{ij}}\varepsilon^2 q_{ij}^1\partial_x(u-\mathcal{Q}_1u)w\,dxdy=$$
$$\sum_{R_{ij}\subset D_2}\varepsilon^2 q_{ij}^1K_{ij}(u,w)+\sum_{R_{ij}\subset D_2}\varepsilon^2 q_{ij}^1\frac{h_i^2}{12}\left(\int_{\ell_2^{ij}}(\partial_{xx}u)w\,dy-\int_{\ell_4^{ij}}(\partial_{xx}u)w\,dy\right)$$

De [18, ec. (3.14)] sabemos que

$$|K_{ij}(u,w)|\leq C\left(h_i^2\|\partial_x^3u\|_{0,R_{ij}}+h_ih_j\|\partial_x^2\partial_yu\|_{0,R_{ij}}+h_j^2\|\partial_x\partial_y^2\|_{0,R_{ij}}\right)\|w\|_{0,R_{ij}}$$

entonces, dado que

$$|q_{ij}|\leq|\nabla\beta|\leq C\frac{\beta}{\varepsilon}\leq C\varepsilon^{-\eta h}\frac{\beta_{min}}{\varepsilon},$$

utilizando el Lema 2.5 se sigue que

$$\begin{aligned}&\sum_{R_{ij}\subset D_2}\varepsilon^2 q_{ij}^1K_{ij}(u,w)\\&\leq C\varepsilon^{-\eta h}\sum_{ij}\varepsilon\beta_{min}^{\frac{1}{2}}\left(h_i^2\|\partial_x^3u\|_{0,R_{ij}}+h_ih_j\|\partial_x^2\partial_yu\|_{0,R_{ij}}+h_j^2\|\partial_x\partial_y^2\|_{0,R_{ij}}\right)\|\beta^{\frac{1}{2}}w\|_{0,R_{ij}}\\&\leq C\varepsilon^{-\eta h}h^2\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\|\beta^{\frac{1}{2}}w\|_{0,\Omega}.\end{aligned}$$

Queda por trabajar con

$$\Xi:=\sum_{R_{ij}\subset D_2}\varepsilon^2 q_{ij}^1\frac{h_i^2}{12}\left(\int_{\ell_2^{ij}}(\partial_{xx}u)w\,dy-\int_{\ell_4^{ij}}(\partial_{xx}u)w\,dy\right),$$

lo cual puede escribirse como

$$\begin{aligned}\Xi &= -\sum_{R_{ij}\subset D_2} \varepsilon^2 q_{ij}^1 \frac{h_i^2}{12} \int_{R_{ij}} \partial_x \left[(\partial_x^2 u)w\right]\, dxdy \\ &= -\sum_{R_{ij}\subset D_2} \varepsilon^2 q_{ij}^1 \frac{h_i^2}{12} \int_{R_{ij}} (\partial_x^3 u)w\, dxdy - \sum_{R_{ij}\subset D_2} \varepsilon^2 q_{ij}^1 \frac{h_i^2}{12} \int_{R_{ij}} \partial_x^2 u \partial_x w\, dxdy \\ &=: \Xi_1 + \Xi_2.\end{aligned}$$

Ahora, tomemos en cuenta que

$$|q_{ij}^1| \leq |\nabla\beta| \leq C\frac{\beta}{\varepsilon} \leq C\varepsilon^{-\eta h}\frac{\beta_{min}}{\varepsilon}.$$

Entonces,

$$|\Xi_1| \leq C\varepsilon^{-\eta h} \sum_{R_{ij}\subset D_2} \left(\varepsilon\beta_{min}^{\frac{1}{2}} h_i^2 \|\partial^3 u\|_{0,R_{ij}}\right) \left(\beta_{min}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{0,R_{ij}}\right).$$

Por lo tanto, después de aplicar la desigualdad de Cauchy–Schwarz y usando el Lema 2.5, se sigue que

$$|\Xi_1| \leq C\varepsilon^{-\eta h} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} h^2 |||w|||_\beta.$$

De manera análoga, tenemos

$$|\Xi_2| \leq C\varepsilon^{-\eta h} \sum_{R_{ij}\subset D_2} \left(\beta_{min}^{\frac{1}{2}} h_i^2 \|\partial_x^2 u\|_{0,R_{ij}}\right) \left(\varepsilon\beta_{min}^{\frac{1}{2}} \|\partial_x w\|_{0,R_{ij}}\right).$$

Con argumentos similares, obtenemos fácilmente que

$$|\Xi_2| \leq C\varepsilon^{-\eta h} h^2 |||w|||_\beta.$$

Entonces, llegamos a

$$|\Xi| \leq C\varepsilon^{-\eta h} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} h^2 |||w|||_\beta.$$

Esta desigualdad, junto con (2.5.3), nos da

$$\left|\sum_{R_{ij}\subset D_2} \int_{R_{ij}} \varepsilon^2 q_{ij}^1 \partial_x (u - \mathcal{Q}_1 u) w\, dxdy\right| \leq C\varepsilon^{-\eta h} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} h^2 |||w|||_\beta.$$

Un argumento similar nos permite concluir que

$$|III_{22}| \leq C\varepsilon^{-\eta h} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} h^2 |||w|||_\beta. \tag{2.51}$$

Finalmente, con las desigualdades (2.49), (2.50) y (2.51), obtenemos

$$|III| \leq C\varepsilon^{-\eta h} \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) h^2 |||w|||_\beta. \tag{2.52}$$

2.5.4. Estimación de IV

De la Proposición 2.1 tenemos que

$$\begin{aligned} |IV| &\leq C\|\beta^{\frac{1}{2}}(u - \mathcal{Q}_1 u)\|_{0,\Omega} \|\beta^{\frac{1}{2}} w\|_{0,\frac{1}{2}} \\ &\leq C\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} h^2 |||w|||_\beta. \end{aligned} \tag{2.53}$$

2.6. Ejemplos numéricos

Consideramos el problema

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \tag{2.54}$$

con $\Omega = (0,1)^2$ para dos elecciones distintas de la función f. La primera se toma de [19] y la segunda fue introducida por Kopteva [28] y es ampliamente utilizada en la literatura (ver, por ejemplo, [2, 43]). En ambos casos consideramos $\varepsilon = 10^{-6}$ y $\varepsilon = 10^{-8}$. Todos los resultados numéricos fueron obtenidos utilizando Firedrake [52]. En las Tablas 2.1-5.2 informamos la estimación del orden de convergencia (eoc) de distintas cantidades con respecto a M, el número de puntos de malla en las direcciones x e y. Recordamos que el número de grados de libertad es del orden de M^2.

Ejemplo 2.1 *Tomamos f dada por*

$$f(x,y) = -2\frac{1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}}} \left(e^{-\frac{x}{\sqrt{2}\varepsilon}} + e^{-\frac{1-x}{\sqrt{2}\varepsilon}} + e^{-\frac{y}{\sqrt{2}\varepsilon}} + e^{-\frac{1-y}{\sqrt{2}\varepsilon}}\right) + 4.$$

Al definir

$$u_0(t) = -2\frac{1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}}} \left(e^{-\frac{t}{\sqrt{2}\varepsilon}} + e^{-\frac{1-t}{\sqrt{2}\varepsilon}}\right)$$

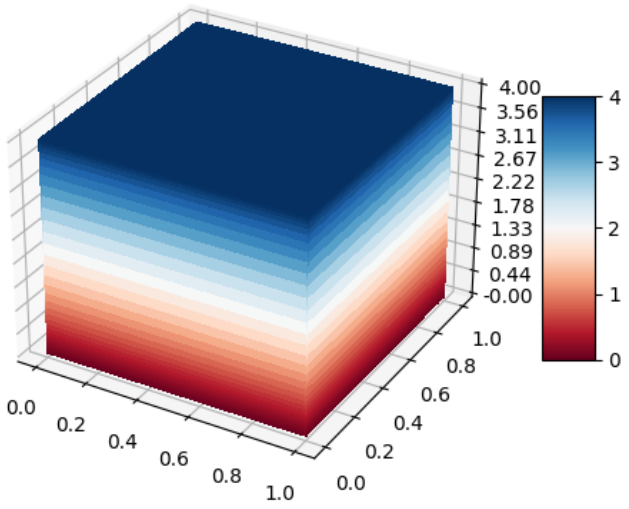


Figura 2.7: Solución del Ejemplo 2.1 con $\varepsilon = 10^{-6}$.

h	M	$\|u - u_h\|_0$	eoc	$\|\|\|u - u_h\|\|\|_\beta$	eoc	$\|\|\|u_I - u_h\|\|\|_\beta$	eoc
0.2	245	5.55102e-5	-	0.12454	-	0.022198	-
0.1	521	1.61256e-5	1.63840	0.066549	0.83067	0.00633791	1.66135
0.05	1055	4.35302e-6	1.85606	0.034499	0.93119	0.00170211	1.86335
0.025	2107	1.13085e-6	1.94862	0.017579	0.97470	0.00044169	1.95021

Tabla 2.1: Registro de errores para el experimento numérico del Ejemplo 2.1 con $\varepsilon = 10^{-6}$.

se obtiene que la solución exacta u es

$$u(x, y) = u_0(x)u_0(y).$$

En la Tabla 2.1 (respectivamente, en la Tabla 2.2) presentamos los errores y órdenes de convergencia obtenidos al utilizar la discretización (2.4)*, donde V_h es el espacio de funciones bilineales a trozos sobre las mallas graduadas introducidas en la Sección 2.3, con $\varepsilon = 10^{-6}$ (respectivamente, $\varepsilon = 10^{-8}$).*

Ejemplo 2.2 *Ahora, elegimos f de manera que*

$$u(x, y) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\right]\left(1 - y - \frac{e^{-\frac{y}{\varepsilon}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\right)$$

h	M	$\|u-u_h\|_0$	eoc	$\|\|\|u-u_h\|\|\|_\beta$	eoc	$\|\|\|u_I-u_h\|\|\|_\beta$	eoc
0.2	333	5.6529e-6	-	1.2443e-01	-	2.2354e-2	-
0.1	707	1.6423e-6	1.6418	6.6517e-02	0.8318	6.3922e-3	1.6628
0.05	1431	4.4411e-7	1.8547	3.4493e-02	0.9314	1.7183e-3	1.8632
0.03	2384	1.6498e-7	1.9401	2.1013e-02	0.9710	6.3753e-4	1.9425

Tabla 2.2: Registro de errores para el experimento numérico del Ejemplo 2.1 con $\varepsilon = 10^{-8}$.

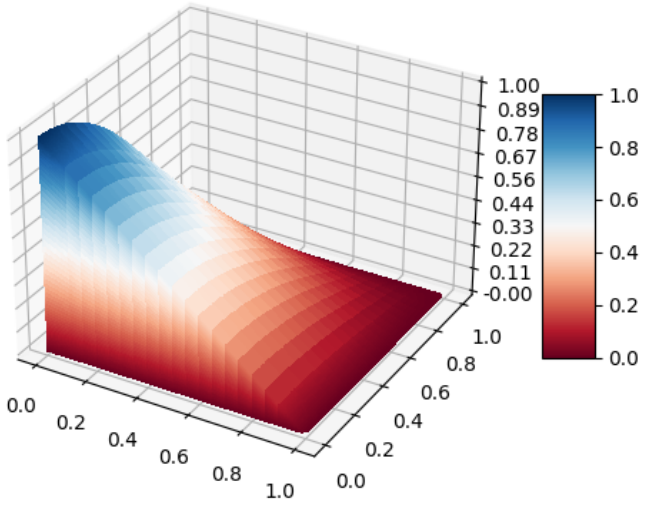


Figura 2.8: Solución del Ejemplo 2.2 con $\varepsilon = 10^{-6}$.

sea la solución de (2.54). *Esta solución presenta capas límite solamente a lo largo de los lados* $x = 0$ *e* $y = 0$. *En la Tabla 2.3 (respectivamente, en la Tabla 2.4) reportamos los resultados de convergencia obtenidos usando mallas graduadas hacia toda la frontera* $\partial\Omega$ *para* $\varepsilon = 10^{-6}$ *(respectivamente, para* $\varepsilon = 10^{-8}$*), y notamos que se observan los órdenes de convergencia esperados.*

Observación 2.4 *Como mencionamos en la Introducción, es deseable que las mallas graduadas diseñadas para un valor pequeño de* ε *funcionen adecuadamente también en problemas de reacción–difusión con valores mayores del parámetro de difusión. Aunque este comportamiento no está incluido en nuestro análisis teórico, lo mostramos de manera computacional. Como ejemplo, la Figura 2.9 muestra la solución del Ejemplo 2.2 con* $\varepsilon = 10^{-3}$*, obtenida utilizando la malla graduada diseñada para* $h = 0{,}1$ *y* $\varepsilon = 10^{-8}$.

h	M	$\|u-u_h\|_0$	eoc	$\|\|\|u-u_h\|\|\|_\beta$	eoc	$\|\|\|u_I-u_h\|\|\|_\beta$	eoc
0.2	245	0.0013124	-	0.020774	-	0.0066799	-
0.1	521	0.00033422	1.81292	0.0110581	0.83577	0.0018082	1.73198
0.05	1055	8.46537e-5	1.94636	0.0057286	0.93215	0.00047234	1.90265
0.025	2107	2.09359e-5	2.01974	0.00291882	0.97482	0.00011943	1.98769

Tabla 2.3: Registro de errores para el Ejemplo 2.2usando mallas graduadas hacia toda la frontera de Ω con $\varepsilon = 10^{-6}$.

h	M	$\|u-u_h\|_0$	eoc	$\|\|\|u-u_h\|\|\|_\beta$	eoc	$\|\|\|u_I-u_h\|\|\|_\beta$	eoc
0.2	333	1.2517e-3	-	2.0709e-2	-	6.4672e-3	-
0.1	707	3.2785e-4	1.7794	1.1032e-2	0.8365	1.7876e-3	1.7079
0.05	1431	8.3918e-5	1.9327	5.7167e-3	0.9324	4.7048e-4	1.8932
0.03	2384	2.9208e-5	2.0678	3.4823e-3	0.9712	1.6842e-4	2.0126

Tabla 2.4: Registro de errores para el Ejemplo 2.2 usando mallas graduadas hacia toda la frontera de Ω con $\varepsilon = 10^{-8}$.

Utilizando esta misma malla fija, la Tabla 2.5 presenta los errores obtenidos para valores de ε que varían entre 10^{-8} y 10^{-3}. Observamos que, para todos los valores del parámetro de difusión, los errores son prácticamente iguales.

ε	$\|u-u_h\|_0$	$\|\|\|u-u_h\|\|\|_\beta$	$\|\|\|u_I-u_h\|\|\|_\beta$
1.0e-3	3.2820e-04	8.4978e-03	1.5048e-03
1.0e-4	3.2793e-04	8.7397e-03	1.5486e-03
1.0e-5	3.2786e-04	9.2645e-03	1.5964e-03
1.0e-6	3.2785e-04	9.8217e-03	1.6513e-03
1.0e-7	3.2785e-04	1.0410e-02	1.7146e-03
1.0e-8	3.2785e-04	1.1032e-02	1.7876e-03

Tabla 2.5: Registro de errores correspondiente al Ejemplo 2.2 para dsitintos valores de ε, utilizando una malla graduada fija diseñada con $h = 0{,}1$ y $\varepsilon = 10^{-8}$.

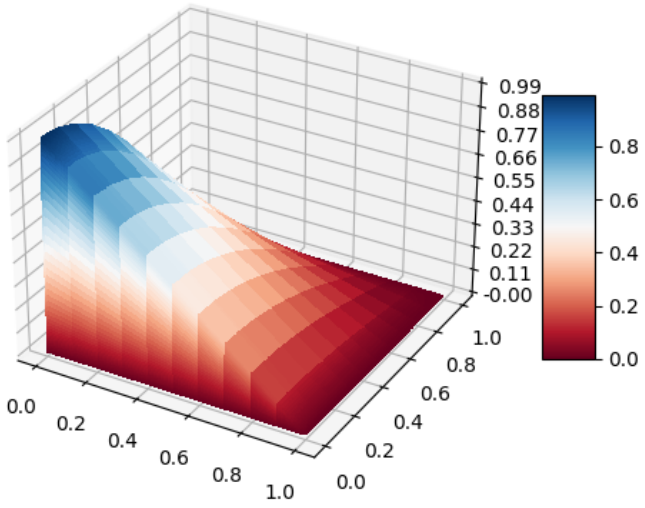


Figura 2.9: Solución del Ejemplo 2.2, para $\varepsilon = 10^{-3}$, utilizando una malla graduada diseñada con $h = 0{,}1$ y $\varepsilon = 10^{-8}$.

Capítulo 3

Estimaciones en normas balanceadas para sistemas acoplados de ecuaciones de reacción–difusión

En este capítulo, analizamos la aproximación por elementos finitos de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias singularmente perturbadas, empleando elementos finitos lineales a trozos sobre mallas graduadas. Consideramos dos casos: uno con un único parámetro de perturbación en ambas ecuaciones y otro con parámetros distintos, pero con coeficientes constantes.

En las primeras secciones, presentamos el problema acoplado de reacción–difusión y recordamos estimaciones a priori para la solución. Luego, introducimos las mallas graduadas que utilizamos para la discretización por elementos finitos. También obtenemos estimaciones del error de interpolación, resultados de estabilidad para proyecciones en L^2 y un resultado preliminar sobre la aproximación numérica de una ecuación de reacción–difusión singularmente perturbada. Posteriormente, presentamos nuestros principales resultados sobre estimaciones óptimas del error de aproximación en normas balanceadas. Finalmente, mostramos algunos ejemplos numéricos que exponen el buen desempeño del enfoque propuesto.

A lo largo del capítulo, usamos negrita para denotar espacios de funciones vectoriales. Siguiendo la notación presentada en el Capítulo 1, las normas y seminormas en los espacios $H^m(\mathcal{D})$ y $\mathbf{H}^m(\mathcal{D})$, con m un número entero, se denotan por $\|\cdot\|_{m,\mathcal{D}}$ y $|\cdot|_{m,\mathcal{D}}$, respectivamente. El producto interno en $L^2(\mathcal{D})$ o $\mathbf{L}^2(\mathcal{D})$, para cualquier subdominio $\mathcal{D} \subset I$, se denota por $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{D}}$, y el subíndice del dominio se omite cuando $\mathcal{D} = I$. También denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto interno euclídeo en $\mathbb{R}^d$, y definimos $|\cdot|^2 = \langle\cdot,\cdot\rangle$.

3.1. Presentación del problema

Consideramos el siguiente sistema acoplado de dos ecuaciones de reacción–difusión en $I = (0, 1)$:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 u_1''(x) + a_{11}(x)u_1(x) + a_{12}(x)u_2(x) = f_1(x) \\ -\mu^2 u_2''(x) + a_{21}(x)u_1(x) + a_{22}(x)u_2(x) = f_2(x) \\ u_1(0) = u_1(1) = u_2(0) = u_2(1) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $\mathbf{f} = (f_1(x), f_2(x))$ y $A = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq 2}$ son funciones suaves en $[0, 1]$, y ε y μ son parámetros positivos.

Como mencionamos, estamos interesados en el caso singularmente perturbado, es decir, cuando al menos uno de los parámetros ε o μ es muy pequeño. Debido a esto, la solución $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ puede presentar capas límite de tamaño $O(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon})$ y $O(\mu \ln \frac{1}{\mu})$ en $x = 0$ y $x = 1$, respectivamente, las cuales pueden superponerse e interactuar dependiendo del tamaño relativo entre ε y μ (véase, por ejemplo, [42, 46]).

De ahora en más, sin pérdida de generalidad, asumimos

$$0 < \varepsilon \leq \mu \leq 1.$$

La matriz A tiene entradas acotadas $a_{ij}(x)$, y suponemos que $a_{ii}(x) > 0, a_{ij}(x) \leq 0$ para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 2$, y que existe una constante $\alpha \neq 0$ tal que

$$\min_{x\in[0,1]} \{a_{11}(x) + a_{12}(x), a_{21}(x) + a_{22}(x)\} \geq \alpha^2. \tag{3.2}$$

Dado que, como consecuencia de (3.2), A es una $M-$matriz, de acuerdo con [39, Teorema 2.2 y Observación 2.5], también podemos asumir que

$$\xi^t A\xi \geq \alpha^2 \xi^t \xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{3.3}$$

Sea $\mathbf{V} := \mathbf{H}_0^1(I)$, definimos la forma bilineal $\mathbf{B} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ como

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_0^1 \varepsilon^2 u_1' v_1' + a_{11}u_1v_1 + a_{12}u_2v_1 + \mu^2 u_2' v_2' + a_{21}u_1v_2 + a_{22}u_2v_2\, dx,$$

y la forma lineal $\mathbf{L} : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ de manera que

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) := \int_0^1 f_1v_1 + f_2v_2\, dx.$$

Entonces, multiplicando las ecuaciones de reacción–difusión en (3.1) por $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e integrando por partes sobre I, la formulación variacional del problema presentado se expresa de la siguiente manera: hallar $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T \in \mathbf{H}_0^1(I)$ tal que

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{L}(\mathbf{v}), \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

El siguiente resultado, que se deduce de [37, Lema 1] y [42, Lema 4], describe el comportamiento de la solución exacta y sus derivadas hasta orden 2. Estimaciones similares para todas las derivadas, asumiendo datos analíticos, pueden encontrarse en [46].

Lema 3.1 *Sea* $\mathbf{u}$ *la solución de* (3.1). *Entonces, existe una constante* C *tal que para todo* $x \in [0, 1]$ *se cumple*

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w},$$

donde la componente regular $\mathbf{v}$ *de la solución satisface*

$$|v_i'| \leq C \quad y \quad |v_i''| \leq C, \quad i = 1, 2,$$

mientras que la componente singular $\mathbf{w}$ *satisface*

$$\begin{aligned}
|w_1'| &\leq C \left(\varepsilon^{-1} e^{-\alpha \frac{x}{\varepsilon}} + \mu^{-1} e^{-\alpha \frac{x}{\mu}} + \varepsilon^{-1} e^{-\alpha \frac{1-x}{\varepsilon}} + \mu^{-1} e^{-\alpha \frac{1-x}{\mu}} \right), \\
|w_2'| &\leq C \left(\mu^{-1} e^{-\alpha \frac{x}{\mu}} + \mu^{-1} e^{-\alpha \frac{1-x}{\mu}} \right), \\
|w_1''| &\leq C \left(\varepsilon^{-2} e^{-\alpha \frac{x}{\varepsilon}} + \mu^{-2} e^{-\alpha \frac{x}{\mu}} + \varepsilon^{-2} e^{-\alpha \frac{1-x}{\varepsilon}} + \mu^{-2} e^{-\alpha \frac{1-x}{\mu}} \right), \\
|w_2''| &\leq C \left(\mu^{-2} e^{-\alpha \frac{x}{\mu}} + \mu^{-2} e^{-\alpha \frac{1-x}{\mu}} \right).
\end{aligned}$$

Dada una partición $\mathcal{T}_h = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_M = 1\}$, denotamos $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ y $h_i = x_i - x_{i-1}$, para $1 \leq i \leq M$, y definimos

$$\begin{aligned}
\hat{h}_0 &= h_1, \\
\hat{h}_k &= \frac{1}{2}(h_{k+1} + h_k), \quad 1 \leq k \leq M - 1, \\
\hat{h}_M &= h_M.
\end{aligned}$$

Consideramos el espacio de elementos finitos conforme

$$\mathbf{V}_h := \left\{ \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbf{V} : v_j|_{I_i} \in P_1(I_i), i = 1, \ldots, M, j = 1, 2 \right\},$$

donde el superíndice T denota la transpuesta, y el espacio

$$V_h := \left\{ v \in H_0^1(I) : v|_{I_i} \in P_1(I_i), i = 1, \ldots, M \right\}.$$

Denotamos por $\phi_i, i = 0, \ldots, M$, las funciones base lineales de Lagrange clásicas tales que

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, \ldots, M.$$

Para un intervalo genérico I_ℓ de la partición, denotamos $x_1^\ell = x_{\ell-1}$ y $x_2^\ell = x_\ell$. También definimos las funciones base locales

$$\phi_1^\ell = \phi_{\ell-1}, \quad \phi_2^\ell = \phi_\ell,$$

y las longitudes locales

$$\hat{h}_1^\ell = \hat{h}_{\ell-1}, \quad \hat{h}_2^\ell = \hat{h}_\ell.$$

La formulación conforme por elementos finitos está dada por: hallar $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ tal que

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = \mathbf{L}(\mathbf{v}), \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h.$$

Usando la teoría clásica y la propiedad (3.3) de A, podemos asegurar que el problema está bien definido y admite una única solución $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$. Se han obtenido estimaciones robustas del error en la norma de la energía, definida como

$$\|\mathbf{u}\|_e^2 = \varepsilon^2 \|u_1'\|_0^2 + \mu^2 \|u_2'\|_0^2 + \alpha^2 (\|u_1\|_0^2 + \|u_2\|_0^2),$$

para distintos tipos de mallas (ver, por ejemplo, [15, 37, 44]). Sin embargo, realizando un análisis similar al desarrollado en el Capítulo 1, y a partir de las estimaciones a priori del Lema 3.1, puede demostrarse que, para una solución típica del problema (3.1), el término $\alpha^2(\|u_1\|_0^2 + \|u_2\|_0^2)$ es de orden $O(1)$, mientras que los otros términos que intervienen en la norma de la energía, $\varepsilon^2\|u_1'\|_0^2$ y $\mu^2\|u_2'\|_0^2$, son de orden $O(\varepsilon)$ y $O(\mu)$, respectivamente. Por lo tanto, para este caso también existe una dificultad asociada al uso de la norma de la energía, que radica en que esta no está balanceada.

En este capítulo, nos interesa obtener estimaciones robustas del error en una *norma balanceada*. Para ello, y siguiendo [54], consideramos la norma balanceada definida a partir

de un reescalamiento distinto de la seminorma H^1:

$$|||\mathbf{u}|||^2 = \varepsilon\|u_1'\|_0^2 + \mu\|u_2'\|_0^2 + \alpha^2(\|u_1\|_0^2 + \|u_2\|_0^2).$$

Como se explica en [54], esta norma refleja correctamente el comportamiento de las capas.

3.2. Mallas graduadas y resultados preliminares

En esta sección presentamos los parámetros de las mallas graduadas que utilizamos para la aproximación por elementos finitos del problema (3.1). Obtenemos estimaciones del error de interpolación, resultados de estabilidad para las proyecciones en L^2 y también un resultado preliminar sobre la aproximación numérica de una ecuación de reacción–difusión singularmente perturbada.

3.2.1. Mallas graduadas

Introduzcamos una familia de mallas graduadas $\mathcal{T}_h$ sobre el intervalo I, tal como presentamos en la Sección 1.2. Elegimos un parámetro $h \in (0,1)$ y definimos

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2\log\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{3.4}$$

como el parámetro de graduación. Observemos que este parámetro coincide con el considerado para las mallas graduadas bidimensionales utilizadas en el Capítulo 2, y que, en consecuencia, la malla depende del parámetro ε (Observación 2.3), el cual es el menor de los parámetros involucrados en el problema (3.1) ($0 < \varepsilon \leq \mu \leq 1$). Para hacer explícita esta dependencia, en este capítulo denominaremos a la malla resultante como *malla $\varepsilon-$graduada*.

Recordemos ahora cómo se construyen las mallas graduadas. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_{\text{mid}}$ los nodos de la malla en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, dados por

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_1 = h^s, \quad \text{con } s = \dfrac{1}{1-\gamma}, \\ x_{i+1} = x_i + hx_i^\gamma, \quad i = 1, \ldots, \text{mid} - 2, \\ x_{\text{mid}} = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{3.5}$$

extendemos esta partición a una malla completa de $[0,1]$, $\{x_0, x_1, \ldots, x_{\text{mid}}, \ldots, x_M\}$, con $M = 2\,\text{mid}$, definiendo

$$x_i = 1 - x_{M-i} \quad \text{para } i = \text{mid}+1, \ldots, M.$$

Nuevamente, escribiremos las estimaciones del error en términos del parámetro h ya que, como vimos en la Observación 2.2, se relaciona con el número de grados de libertad de la siguiente manera

$$\frac{1}{M} \lesssim h \lesssim \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{M}\log M. \tag{3.6}$$

Finalmente, notamos que la amplitud de los intervalos satisfacen

$$|I_1| = |I_2| < |I_3| < \cdots < |I_{\text{mid}-1}| \tag{3.7}$$

con

$$|I_1| = h^{2\log\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon^{2\log\frac{1}{h}},$$

y $|I_i| < h$, $2 < i \leq \text{mid}-1$.

3.2.2. Interpolación de Lagrange

En esta sección, obtenemos estimaciones robustas del error en una norma balanceada para la interpolación de Lagrange en mallas $\varepsilon-$graduadas.

Los dos resultados que se presentan a continuación se refieren al error de interpolación en el intervalo $(0,1)$, para funciones que exhiben el mismo tipo de comportamiento que el descripto en el Lema 3.1.

A partir de ahora, suponemos que $\varepsilon < e^{-2}$, ya que, de lo contrario, el análisis subsiguiente puede llevarse a cabo utilizando técnicas estándar.

Lema 3.2 *Sea $u \in H_0^1(0,1)$ tal que*

$$\begin{aligned}
&|u(x)| \leq C_0,\\
&|u'(x)| \leq C_0\left(1 + \varepsilon^{-1}e^{-\alpha\frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-1}e^{-\alpha\frac{1-x}{\varepsilon}} + \mu^{-1}e^{-\alpha\frac{x}{\mu}} + \mu^{-1}e^{-\alpha\frac{1-x}{\mu}}\right),
\end{aligned}$$

para todo $x \in (0,1)$, con $C_0 \geq 0$ independiente de ε y μ. Entonces, si u_I denota el interpolador de Lagrange lineal a trozos de u en una malla $\varepsilon-$graduada, existe una constante C tal que

$$\|u - u_I\|_{0,I} \leq Ch.$$

Demostración

Dado que u está acotada, tenemos

$$\|u - u_I\|_{0,I_1}^2 \leq 4|I_1|\|u\|_{L^\infty(I_1)}^2 \leq 2C_0|I_1|.$$

Usando que $|I_1| = h^s$, obtenemos

$$\|u - u_I\|_{0,I_1}^2 \leq Ch^s = Ch^{\frac{1}{1-\gamma}} = Ch^{2\log\frac{1}{\varepsilon}} \leq Ch^2,$$

ya que hemos asumido que $\varepsilon \leq e^{-2}$.

Definimos

$$b_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon^{-1}e^{-\alpha\frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon^{-1}e^{-\alpha\frac{1-x}{\varepsilon}},$$
$$b_\mu(x) = 1 + \mu^{-1}e^{-\alpha\frac{x}{\mu}} + \mu^{-1}e^{-\alpha\frac{1-x}{\mu}}.$$

Usando que, para cada intervalo I_i se cumple

$$\|u - u_I\|_{0,I_i} \leq C|I_i|\|u'\|_{0,I_i},$$

y dado que, para $2 \leq i \leq \text{mid}$, por la definición de las mallas graduadas, se tiene $|I_i| \leq hx^\gamma$ para todo $x \in I_i$, obtenemos

$$\begin{aligned}\|u - u_I\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)\setminus I_1}^2 &\leq h^2\|x^\gamma u'\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)}^2 \\ &\leq Ch^2\left(h^2 + \|x^\gamma b_\varepsilon\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)}^2 + \|x^\gamma b_\mu\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)}^2\right).\end{aligned}$$

Dado que $\varepsilon \leq \mu$, tenemos que

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2\log\frac{1}{\varepsilon}} \geq 1 - \frac{1}{2\log\frac{1}{\mu}} := \gamma_\mu$$

y, por lo tanto, $x^\gamma \leq x^{\gamma_\mu}$ en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Entonces,

$$\|u - u_I\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)\setminus I_1}^2 \leq Ch^2\left(1 + \|x^\gamma b_\varepsilon\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)}^2 + \|x^{\gamma_\mu} b_\mu\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)}^2\right).$$

Se puede verificar que

$$\|x^\gamma b_\varepsilon\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \leq C \qquad \text{y} \qquad \|x^{\gamma_\mu} b_\mu\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \leq C. \tag{3.8}$$

En efecto, para la primera desigualdad, recordando la definición de b_ε, tenemos

$$\begin{aligned}\|x^\gamma b_{\mathbf{e}}\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} &\leq \left\|x^\gamma \left(1+2\varepsilon^{-1}e^{-\alpha\frac{x}{\varepsilon}}\right)\right\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \\ &\leq C + 2\left\|x^\gamma\varepsilon^{-1}e^{-\alpha\frac{x}{\varepsilon}}\right\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Pero, usando el cambio de variable $y = x/\varepsilon$, obtenemos

$$\left\|x^\gamma\varepsilon^{-1}e^{-\alpha\frac{x}{\varepsilon}}\right\|^2_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{2\gamma}\varepsilon^{-2}e^{-2\alpha\frac{x}{\varepsilon}}\,dx \leq \varepsilon^{2\gamma-1}\int_0^\infty y^{2\gamma}e^{-2\alpha y}\,dx.$$

Como $2\gamma - 1 \geq 0$ para $\varepsilon \leq e^{-1}$, la última integral es finita (con la constante involucrada dependiente solamente de α), y obtenemos, en este caso, la primera estimación de (3.8). El caso $\varepsilon > e^{-1}$ es claro. La segunda estimación en (3.8) se obtiene de manera similar.

Por lo tanto, obtenemos que

$$\|u - u_I\|_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \leq Ch.$$

Claramente, una estimación similar se puede obtener en el intervalo $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

□

Observación 3.1 *Con una demostración similar, para ε suficientemente pequeño, utilizando la estimación del error de interpolación*

$$\|u - u_I\|_{0,I_i} \leq C|I_i|^2\|u''\|_{0,I_i}$$

en los intervalos $I_i \subset (0,\frac{1}{2}) \setminus I_1$, se obtiene la siguiente desigualdad

$$\|u - u_I\|_{0,I} \leq Ch^2$$

para mallas ε–graduadas.

Lema 3.3 *Sea $u \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ y sea u_I su interpolación de Lagrange lineal a trozos en una malla $\varepsilon-$graduada.*

i) Supongamos que

$$|u''| \leq C_0\left(1 + \varepsilon^{-2}e^{-\alpha\frac{x}{\varepsilon}} + \mu^{-2}e^{-\alpha\frac{x}{\mu}} + \varepsilon^{-2}e^{-\alpha\frac{1-x}{\varepsilon}} + \mu^{-2}e^{-\alpha\frac{1-x}{\mu}}\right)$$

para alguna constante C_0 independiente de ε y μ. Entonces, se tiene

$$\|(u - u_I)'\|_0 \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}h. \tag{3.9}$$

ii) Si

$$|u''| \leq C_0 \left(1 + \mu^{-2}e^{-\alpha\frac{x}{\mu}} + \mu^{-2}e^{-\alpha\frac{1-x}{\mu}}\right),$$

con C_0 independiente de μ, entonces

$$\|(u - u_I)'\|_0 \leq C\mu^{-\frac{1}{2}}h. \tag{3.10}$$

Demostración

Demostraremos los resultados para la restricción a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ con una capa límite en $x = 0$, el resultado correspondiente para una función con una capa límite en $x = 1$ en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ se puede obtener usando los mismos argumentos, pero con estimaciones en μ en lugar de ε.

Para el primer intervalo I_1, para γ dado en (3.5), podemos usar la siguiente estimación (ver, por ejemplo, [41, Proposición 1.2.4])

$$\|(u - u_I)'\|_{0,I_1} \leq C|I_1|^{1-\gamma}\|x^\gamma u''\|_{0,I_1}.$$

Para el resto de los intervalos $I_i, i = 1, \ldots, \text{mid}$, se tiene

$$\|(u - u_I)'\|_{0,I_i} \leq C|I_i|\|u''\|_{0,I_i}.$$

Entonces, obtenemos

$$\begin{aligned}\|(u - u_I)'\|^2_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} &= \|(u - u_I)'\|^2_{0,I_1} + \sum_{i=2}^{\text{mid}} \|(u - u_I)'\|^2_{0,I_i} \\ &\leq C|I_1|^{2-2\gamma}\|x^\gamma u''\|^2_{0,I_1} + C\sum_{i=2}^{\text{mid}} |I_i|^2\|u''\|^2_{0,I_i}.\end{aligned}$$

Dado que

$$|I_1| = h^s, \qquad |I_i| \leq hx^\gamma, \quad \forall x \in I_i \quad i = 2, \ldots, \text{mid},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\|(u-u_I)'\|^2_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} &\leq Ch^{2s(1-\gamma)}\|x^\gamma u''\|^2_{0,I_1} + C\sum_{i=2}^{\text{mid}} h^2\|x^\gamma u''\|^2_{0,I_i} \\ &\leq Ch^2\|x^\gamma u''\|^2_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)},\end{aligned} \tag{3.11}$$

ya que $2s(1-\gamma)=2$.

Para probar i), observamos que, dado que la función $f(y)=ye^{-y}$ es decreciente para $y>1$ y las integrales $\int_0^\infty y^\delta e^{-2\alpha y}\,dy$ están uniformemente acotadas para $\delta\in[0,4]$, y teniendo en cuenta que $\varepsilon\leq\mu$, obtenemos

$$\|x^\gamma u''\|^2_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \leq C\left(1+\varepsilon^{2\gamma-3}\right).$$

Pero $2\gamma-3=-1-\frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon}}$ y $\varepsilon^{2\gamma-3}=e\varepsilon^{-1}$, por lo que

$$\|x^\gamma u''\|^2_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{C}{\varepsilon}. \tag{3.12}$$

Así, combinando (3.12) y (3.11), obtenemos

$$\|(u-u_I)'\|^2_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{C}{\varepsilon}h^2.$$

Para obtener ii), observamos que, en este caso,

$$\|x^\gamma u''\|^2_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \leq C\left(1+\mu^{2\gamma-3}\right).$$

Por lo tanto, usando esto en (3.11) y el hecho de que $\mu^{2\gamma-2}<\varepsilon^{2\gamma-2}$, obtenemos

$$\|(u-u_I)'\|^2_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \leq Ch^2\left(1+\mu^{2\gamma-3}\right) \leq Ch^2\mu^{-1}\varepsilon^{2\gamma-2}.$$

Dado que $\varepsilon^{2\gamma-2}=e$, tenemos

$$\|(u-u_I)'\|^2_{0,\left(0,\frac{1}{2}\right)} \leq C\mu^{-1}h^2,$$

y se concluye la demostración.

□

Observación 3.2 *Nótese que las desigualdades* $|I_i| \leq Chx^\gamma$ *para* $2 \leq i \leq \text{mid}-2$ *se deducen de la definición* (3.5) *de las mallas graduadas. Sin embargo, dado que imponemos que* $x = \frac{1}{2}$ *sea un nodo, se debe tener cierto cuidado con los intervalos* $I_{\text{mid}-1}$ *y/o* I_{mid} *(ver Observación 3.3). No obstante, para* h *suficientemente pequeño, dichos intervalos están contenidos, por ejemplo, en* $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$*. Por lo tanto, es claro que tales desigualdades también se cumplen para* $i = \text{mid}-1, \text{mid}$*.*

3.2.3. Estabilidad H^1 de las proyecciones L^2

En esta sección definimos dos proyecciones diferentes en L^2 y analizamos su estabilidad. Estos resultados son una herramienta fundamental para obtener nuestras estimaciones del error.

Primero, para cualquier $u \in H^1(I)$, consideramos la típica proyección L^2, denotada por $\mathcal{P}_0(u) \in V_h$, definida como

$$\int_I \mathcal{P}_0(u)v\,dx = \int_I uv\,dx, \quad \forall v \in V_h. \tag{3.13}$$

Para nuestro análisis, necesitamos la siguiente hipótesis sobre las mallas.

Hipótesis 2 *Supongamos que* $\mathcal{T}_h$ *satisface*

$$\begin{aligned} &|I_{i-1}| \leq |I_i| \leq c_0|I_{i-1}|, \qquad 2 \leq i \leq \text{mid}, \\ &|I_{i+1}| \leq |I_i| \leq c_0|I_{i+1}|, \qquad \text{mid} \leq i \leq M-1, \end{aligned} \tag{3.14}$$

con $1 \leq c_0 < 3$*.*

El siguiente lema establece la estabilidad de $\mathcal{P}_0$ como una función de $H^1(I)$ en V_h.

Lema 3.4 *Supongamos que* $\mathcal{T}_h$ *satisface la Hipótesis 2, entonces*

$$\|(\mathcal{P}_0 u)'\|_0 \leq C\|u'\|_0, \qquad \forall u \in H^1(I),$$

con $C = C(c_0)$*.*

Demostración

Siguiendo [9, Teorema 4.1], es suficiente verificar que se cumple la condición [9, inec. (4.2)].

Definimos las matrices 2×2, G_ℓ, D_ℓ y H_ℓ, de la siguiente manera

$$G_\ell[i,j] = (\phi_i^\ell, \phi_j^\ell)_{I_\ell}, \qquad D_\ell = \mathrm{diag}(\|\phi_i^\ell\|_{0,I_\ell}^2), \qquad H_\ell = \mathrm{diag}(\hat{h}_i^\ell).$$

Ahora, debemos probar que existe una constante positiva c tal que

$$\langle H_\ell^{-1} G_\ell H_\ell x^\ell, x^\ell \rangle \geq c \langle D_\ell x^\ell, x^\ell \rangle, \quad \forall x^\ell \in \mathbb{R}^2. \tag{3.15}$$

Primero, observamos que

$$\left(\phi_i^\ell, \phi_j^\ell\right)_{I_\ell} = \begin{cases} \frac{1}{3} h_\ell & \text{si } i = j \\ \frac{1}{6} h_\ell & \text{si } i = 1, j = 2, \text{ or } i = 2, j = 1. \end{cases} \tag{3.16}$$

De esto se sigue que

$$\langle H_\ell^{-1} G_\ell H_\ell x^\ell, x^\ell \rangle = \frac{1}{3} h_\ell (x_1^\ell)^2 + \frac{1}{6} h_\ell \left(\frac{\hat{h}_2^\ell}{\hat{h}_1^\ell} + \frac{\hat{h}_1^\ell}{\hat{h}_2^\ell} \right) x_1^\ell x_2^\ell + \frac{1}{3} h_\ell (x_2^\ell)^2.$$

Ahora, tenemos

i) si $\ell = 1$,

$$\begin{aligned} \hat{h}_1^\ell &= h_1, \\ \hat{h}_2^\ell &= \frac{1}{2}(h_1 + h_2) \leq \frac{1 + c_0}{2} h_1, \\ \hat{h}_2^\ell &\geq h_1, \end{aligned}$$

ii) si $2 \leq \ell \leq \mathrm{mid}$,

$$\begin{aligned} \hat{h}_1^\ell &= \frac{1}{2}(h_{\ell-1} + h_\ell) \leq h_\ell, \\ \hat{h}_2^\ell &= \frac{1}{2}(h_{\ell+1} + h_\ell) \leq \frac{1 + c_0}{2} h_\ell, \\ \hat{h}_1^\ell &\geq \frac{1 + c_0}{2c_0} h_\ell, \\ \hat{h}_2^\ell &\geq h_\ell, \end{aligned}$$

iii) si $\mathrm{mid} + 1 \leq \ell \leq M - 1$,

$$\begin{aligned} \hat{h}_1^\ell &= \frac{1}{2}(h_{\ell-1} + h_\ell) \leq \frac{1 + c_0}{2} h_\ell, \\ \hat{h}_2^\ell &= \frac{1}{2}(h_{\ell+1} + h_\ell) \leq h_\ell, \end{aligned}$$

$$\hat{h}_1^\ell \geq h_\ell,$$
$$\hat{h}_2^\ell \geq \frac{1+c_0}{2c_0} h_\ell,$$

iv) si $\ell = M$,

$$\hat{h}_1^\ell = \frac{1}{2}(h_M + h_{M-1}) \leq \frac{1+c_0}{2} h_M,$$
$$\hat{h}_2^\ell = h_M,$$
$$\hat{h}_1^\ell \geq h_M.$$

Dado que $c_0 \geq 1$, se tiene que $\frac{1+c_0}{2} + 1 \leq 1 + c_0$ y, por lo tanto, para cualquier ℓ se cumple

$$\frac{\hat{h}_2^\ell}{\hat{h}_1^\ell} + \frac{\hat{h}_1^\ell}{\hat{h}_2^\ell} \leq 1 + c_0,$$

y

$$\left| \frac{1}{6} h_\ell \left(\frac{\hat{h}_2^\ell}{\hat{h}_1^\ell} + \frac{\hat{h}_1^\ell}{\hat{h}_2^\ell} \right) x_1^\ell x_2^\ell \right| \leq \frac{1}{12} h_\ell (1+c_0) \left[(x_1^\ell)^2 + (x_2^\ell)^2 \right].$$

Entonces, obtenemos

$$\langle H_\ell^{-1} G_\ell H_\ell x^\ell, x^\ell \rangle \geq \frac{h_\ell}{12}(3 - c_0)[(x_1^\ell)^2 + (x_2^\ell)^2]. \tag{3.17}$$

Por otro lado,

$$\langle D_\ell x^\ell, x^\ell \rangle = \|\phi_1^\ell\|_{0,I_\ell}^2 (x_1^\ell)^2 + \|\phi_2^\ell\|_{0,I_\ell}^2 (x_2^\ell)^2 = \frac{1}{3} h_\ell \left[(x_1^\ell)^2 + (x_2^\ell)^2 \right]. \tag{3.18}$$

Entonces, (3.15) se deduce de (3.17) y (3.18).

□

Observación 3.3 *Las mallas que satisfacen la Hipótesis 2 pueden obtenerse de la siguiente manera. A partir de la definición de las mallas graduadas (ver* (3.5)*) se puede verificar que*

$$|I_{i-1}| \leq |I_i|, \qquad i = 2, \ldots, \text{mid} - 1,$$
$$|I_i| < 2|I_{i-1}|, \qquad i = 2, \ldots, \text{mid}, \tag{3.19}$$

pero no podemos asegurar que se cumpla la desigualdad $|I_{\text{mid}-1}| \leq |I_{\text{mid}}|$*, ya que imponemos que* $x = \frac{1}{2}$ *sea el nodo* x_{mid}*. Sin embargo, si es necesario, podemos eliminar o redefinir*

solamente el nodo $x_{\text{mid}\,-1}$ *para obtener una malla* $\left\{\widetilde{I}_i : 0 \le i \le \widetilde{\text{mid}}\right\}$ *de* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *que satisfaga*

$$|\widetilde{I}_{i-1}| \le |\widetilde{I}_i| < 2|\widetilde{I}_{i-1}|, \qquad i = 2, \ldots, \widetilde{\text{mid}}. \tag{3.20}$$

De hecho, esto se puede lograr de la siguiente manera:

i) Si $|I_{\text{mid}\,-1}| \le |I_{\text{mid}}|$*, definimos* $\widetilde{I}_i = I_i$ *para* $i = 1, \ldots, \widetilde{\text{mid}}$*, con* $\widetilde{\text{mid}} = \text{mid}$*.*

ii) Si $|I_{\text{mid}\,-1}| > |I_{\text{mid}}|$*, tomamos* $\text{mid}' = \text{mid}\,-1$ *y consideramos la malla*

$$\{I'_i : 0 \le i \le \text{mid}'\}$$

obtenida a partir de $\{I_i\}$ *al eliminar el nodo* $x_{\text{mid}\,-1}$*, es decir,*

$$\begin{aligned} I'_i &= [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \ldots, \text{mid}\,-2, \\ I'_{\text{mid}'} &= [x_{\text{mid}\,-2}, x_{\text{mid}}]. \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$|I'_{\text{mid}'\,-1}| \le |I'_{\text{mid}'}|.$$

Si, además, se cumple que $|I'_{\text{mid}'}| < 2|I'_{\text{mid}'\,-1}|$*, definimos*

$$\widetilde{I}_i = I'_i, \quad \text{para } i = 1, \ldots, \widetilde{\text{mid}},$$

con $\widetilde{\text{mid}} = \text{mid}'$*. En caso contrario, si* $|I'_{\text{mid}'}| \ge 2|I'_{\text{mid}'\,-1}|$*, definiendo* $m = \frac{x_{\text{mid}} + x_{\text{mid}\,-2}}{2}$ *(el punto medio de* $I'_{\text{mid}'}$*), establecemos* $\widetilde{\text{mid}} = \text{mid}$ *y*

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_i &= I'_i, \quad i = 1, \ldots, \widetilde{\text{mid}} - 2, \\ \widetilde{I}_{\widetilde{\text{mid}}-1} &= [x_{\text{mid}\,-2}, m], \\ \widetilde{I}_{\widetilde{\text{mid}}} &= [m, x_{\text{mid}}]. \end{aligned}$$

En este caso, se cumple que $\left|\widetilde{I}_{\widetilde{\text{mid}}-1}\right| = \left|\widetilde{I}_{\widetilde{\text{mid}}}\right|$*. Usando que* $|I_{\text{mid}\,-1}| > |I_{\text{mid}}|$ *junto con* (3.19)*, para* $i = \text{mid}\,-1$*, se tiene que*

$$\left|\widetilde{I}_{\widetilde{\text{mid}}-2}\right| \le \left|\widetilde{I}_{\widetilde{\text{mid}}-1}\right| < 2\left|\widetilde{I}_{\widetilde{\text{mid}}-2}\right|.$$

Por lo tanto, la malla $\left\{\widetilde{I}_i : i = 1, \ldots, \widetilde{\text{mid}}\right\}$ *satisface la Hipótesis 2.*

Ahora, para cualquier $\mathbf{v}(x) = (v_1(x), v_2(x))^T \in \mathbf{H}_0^1(I)$ definimos la proyección $Q_h(\mathbf{v}) =$

$(Q_{h,1}(\mathbf{v}), Q_{h,2}(\mathbf{v}))^T \in \mathbf{V}_h$ como

$$(AQ_h\mathbf{v}, \mathbf{v}_h) = (A\mathbf{v}, \mathbf{v}_h), \qquad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \tag{3.21}$$

La proyección Q_h está bien definida debido a que A es definida positiva, como se establece en (3.3).

Para demostrar la estabilidad H^1 de la proyección Q_h seguimos nuevamente las ideas de [9]. Necesitamos algunas definiciones y resultados preliminares.

Para cualquier intervalo I_ℓ, se definen las siguientes cuatro funciones base vectoriales locales del espacio $\mathbf{V}_h$:

$$\mathbf{\Phi}_1^\ell = (\phi_1^\ell, 0)^T, \mathbf{\Phi}_2^\ell = (\phi_2^\ell, 0)^T, \mathbf{\Phi}_3^\ell = (0, \phi_1^\ell)^T, \mathbf{\Phi}_4^\ell = (0, \phi_2^\ell)^T.$$

Ahora, introducimos las matrices locales $\mathbf{G}_\ell, \mathbf{H}_\ell, \mathbf{D}_\ell \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mediante

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\ell[i,j] &= \left(A\mathbf{\Phi}_i^\ell, \mathbf{\Phi}_j^\ell\right)_{I_\ell}, \\ \mathbf{H}_\ell &= \operatorname{diag}\left(\hat{h}_1^\ell, \hat{h}_2^\ell, \hat{h}_1^\ell, \hat{h}_2^\ell\right), \\ \mathbf{D}_\ell &= \operatorname{diag}\left(\|\mathbf{\Phi}_i^\ell\|_{0,I_\ell}^2\right). \end{aligned}$$

Además de la Hipótesis 2, necesitamos la siguiente condición adicional sobre la matriz de coeficientes A para obtener el resultado de estabilidad.

Hipótesis 3 *Existe una constante positiva β_0 tal que los elementos de la matriz A satisfacen*

$$(3 - c_0)\, a_{ii}(x) - (2 + c_0)\left(|a_{21}(x)| + |a_{12}(x)|\right) \geq \beta_0, \qquad i = 1, 2,$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Lema 3.5 *Bajo las Hipótesis 2 y 3, existe una constante positiva d_0 tal que, para h suficientemente pequeño, se cumple que*

$$\langle \boldsymbol{H}_\ell^{-1} \boldsymbol{G}_\ell \boldsymbol{H}_\ell \mathbf{x}^\ell, \mathbf{x}^\ell \rangle \geq d_0 \langle \boldsymbol{D}_\ell \mathbf{x}^\ell, \mathbf{x}^\ell \rangle, \qquad \forall \mathbf{x}^\ell \in \mathbb{R}^4. \tag{3.22}$$

Demostración

Utilizando el Teorema del Valor Medio Integral generalizado y (3.16), obtenemos

que

$$\mathbf{H}_\ell^{-1}\mathbf{G}_\ell\mathbf{H}_\ell = \frac{h_\ell}{6}\begin{pmatrix} 2a_{11}(x_{11}) & \frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1}a_{11}(x'_{11}) & 2a_{21}(x_{21}) & \frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1}a_{21}(x'_{21}) \\ \frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2}a_{11}(x'_{11}) & 2a_{11}(x''_{11}) & \frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2}a_{21}(x'_{21}) & 2a_{21}(x''_{21}) \\ 2a_{12}(x_{12}) & \frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1}a_{12}(x'_{12}) & 2a_{22}(x_{22}) & \frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1}a_{22}(x'_{22}) \\ \frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2}a_{12}(x'_{12}) & 2a_{12}(x''_{12}) & \frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2}a_{22}(x'_{22}) & 2a_{22}(x''_{22}) \end{pmatrix}$$

donde x_{ij}, x'_{ij} y x''_{ij}, para $i, j = 1, 2$, son puntos en I_ℓ, y

$$\mathbf{D}_\ell = \frac{h_\ell}{3}\,\mathrm{diag}(1, 1, 1, 1).$$

Luego, utilizando que, para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, y el hecho de que $a_{12}(x), a_{21}(x) \leq 0$ y $a_{11}(x), a_{22}(x) > 0$, $\forall x \in [0, 1]$, obtenemos

$$\langle \mathbf{H}_\ell^{-1}\mathbf{G}_\ell\mathbf{H}_\ell\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq \frac{h_\ell}{6}\left(L_1x_1^2 + L_2x_2^2 + L_3x_3^2 + L_4x_4^2\right),$$

con

$$\begin{aligned} L_1 := \Bigg[& 2a_{11}(x_{11}) - \frac{1}{2}a_{11}(x'_{11})\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} - |a_{21}(x_{21})| - \frac{1}{2}|a_{21}(x'_{21})|\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} \\ & -\frac{1}{2}a_{11}(x'_{11})\frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2} - |a_{12}(x_{12})| - \frac{1}{2}|a_{12}(x'_{12})|\frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2}\Bigg], \\ L_2 := \Bigg[& 2a_{11}(x''_{11}) - \frac{1}{2}a_{11}(x'_{11})\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} - |a_{21}(x''_{21})| - \frac{1}{2}|a_{21}(x'_{21})|\frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2} \\ & - \frac{1}{2}a_{11}(x'_{11})\frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2} - |a_{12}(x''_{12})| - \frac{1}{2}|a_{12}(x'_{12})|\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1}\Bigg], \\ L_3 := \Bigg[& 2a_{22}(x_{22}) - \frac{1}{2}a_{21}(x'_{21})\frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2} - |a_{21}(x_{21})| - \frac{1}{2}|a_{22}(x'_{22})|\frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2} \\ & - \frac{1}{2}a_{12}(x'_{12})\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} - |a_{12}(x_{12})| - \frac{1}{2}|a_{22}(x'_{22})|\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1}\Bigg], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L_4 := \Bigg[& 2a_{22}(x''_{22}) - \frac{1}{2}a_{22}(x'_{22})\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} - |a_{21}(x''_{21})| - \frac{1}{2}|a_{21}(x'_{21})|\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} \\ & - \frac{1}{2}a_{12}(x'_{12})\frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2} - |a_{12}(x''_{12})| - \frac{1}{2}|a_{22}(x'_{22})|\frac{\hat{h}_1}{\hat{h}_2}\Bigg]. \end{aligned}$$

Definimos $\bar{L}_i(x)$, para $i = 1, \ldots, 4$, como L_i pero reemplazando x_{ij}, x'_{ij} y x''_{ij} por

x para todos los índices i, j. Entonces, nuestra hipótesis implica que, para todo $x \in [0,1]$, se cumple que

$$\bar{L}_1(x), \bar{L}_2(x) \geq a_{11}(x)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}c_0\right) - \left(1 + \frac{1}{2}c_0\right)(|a_{12}(x)| + |a_{21}(x)|) \geq \frac{\beta_0}{2}$$

y

$$\bar{L}_3(x), \bar{L}_4(x) \geq a_{22}(x)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}c_0\right) - \left(1 + \frac{1}{2}c_0\right)(|a_{12}(x)| + |a_{12}(x)|) \geq \frac{\beta_0}{2}.$$

A partir de la continuidad uniforme de a_{ij} en $[0,1]$ y el hecho de que $x_{ij}, x'_{ij}, x''_{ij} \in I_\ell$, con $|I_\ell| \leq h$, se deduce que existe h_0 tal que, para $h \leq h_0$, se cumple que $L_i \geq \frac{\beta_0}{4}$ para $i = 1 \ldots, 4$. Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{H}_\ell^{-1}\mathbf{G}_\ell\mathbf{H}_\ell\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq \frac{\beta_0}{24}h_\ell|\mathbf{x}^\ell|^2.$$

Dado que

$$\langle \mathbf{D}_\ell\mathbf{x}^\ell, \mathbf{x}^\ell\rangle = \frac{h_\ell}{3}|\mathbf{x}^\ell|^2,$$

se concluye que la ecuación (3.22) se cumple para $h \leq h_0$ con $d_0 = \frac{\beta_0}{8}$.

□

Ahora, definimos las funciones base

$$\mathbf{\Phi}_{2k-1} = (\phi_k, 0)^T, \qquad \mathbf{\Phi}_{2k} = (0, \phi_k)^T, \qquad k = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Sean $D_\delta \in \mathbb{R}^{(2M-2)\times(2M-2)}$ y $D_\phi \in \mathbb{R}^{(2M-2)\times(2M-2)}$ las matrices diagonales dadas por

$$D_\delta = \operatorname{diag}(\delta_k), \quad D_\phi = \operatorname{diag}\left(\hat{h}_k\|\mathbf{\Phi}_k\|_0\right),$$

donde

$$\delta_{2k-1} = \delta_{2k} = \sqrt{\sum_{\ell \in I(k)} h_\ell^{-2}\|\mathbf{\Phi}_k\|_{0,I_\ell}^2}.$$

Finalmente, definimos la matriz de Gram $(2M-2)\times(2M-2)$ por

$$\mathbf{G}[i,j] = (A\mathbf{\Phi}_i, \mathbf{\Phi}_j)_I.$$

La demostración del siguiente lema sigue los mismos argumentos que los presentados

en [9, Lema 5.1].

Lema 3.6 *Bajo las Hipótesis 2 y 3, existe una constante positiva C tal que*

$$|\mathbf{x}| \leq C|\mathcal{G}\mathbf{x}|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2M},$$

donde $\mathcal{G}$ es la matriz de Gram escalada, definida como

$$\mathcal{G} = D_{\phi}^{-1}\mathbf{G}D_{\delta}^{-1}.$$

Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 3.7 *Bajo las Hipótesis 2 y 3, se tiene que*

$$\sum_{\ell=1}^{M} h_{\ell}^{-2} \left(A\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right)_{I_\ell} \lesssim \sum_{k=1}^{2M-2} \left[\frac{(A\mathbf{v}_h, \mathbf{\Phi}_k)}{\hat{h}_k \|\mathbf{\Phi}_k\|_0}\right]^2, \tag{3.23}$$

para todo $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$.

<u>*Demostración*</u>

La demostración sigue las mismas ideas que las dadas en [9, Lema 4.1].

Sea $\mathbf{v}_h = \sum_{k=1}^{2M-2} \mathbf{v}_h^k \mathbf{\Phi}_k \in \mathbf{V}_h$. Para el lado izquierdo de (3.23), tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{M} h_{\ell}^{-2} \left(A\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h\right)_{I_\ell} &\leq C \sum_{\ell=1}^{M} h_{\ell}^{-2} \|\mathbf{v}_h\|_{0,I_\ell}^2 \\
&\leq C \sum_{\ell=1}^{M} h_{\ell}^{-2} \sum_{k \in J(\ell)} (\mathbf{v}_h^k)^2 \|\mathbf{\Phi}_k\|_{0,\mathcal{T}_\ell}^2 \\
&= C \sum_{k=1}^{2M-2} (\mathbf{v}_h^k)^2 \sum_{\ell \in I(k)} h_{\ell}^{-2} \|\mathbf{\Phi}_k\|_{0,I_\ell}^2 \\
&= C \sum_{k=1}^{2M-2} (\mathbf{v}_h^k)^2 \delta_k^2 = C \sum_{k=1}^{2M-2} \mathbf{x}_k^2 = C|\mathbf{x}|^2,
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_k)_{k=1}^{2M-2} = (\mathbf{v}_h^k \delta_k)_{k=1}^{2M-2}$.

Por su parte, el lado derecho de (3.23) es

$$\sum_{k=1}^{2M-2}\left[\frac{(A\mathbf{v}_h,\mathbf{\Phi}_k)}{\hat{h}_k\|\mathbf{\Phi}_k\|_0}\right]^2 = \sum_{k=1}^{2M-2}\left[\sum_{j=1}^{2M-2}\mathbf{v}_h^j\frac{(A\mathbf{\Phi}_j,\mathbf{\Phi}_k)}{\hat{h}_k\|\mathbf{\Phi}_k\|_0}\right]^2$$
$$= \sum_{k=1}^{2M-2}\left[\sum_{j=1}^{2M-2}\underline{x}_j\frac{(A\mathbf{\Phi}_j,\mathbf{\Phi}_k)}{\delta_j\hat{h}_k\|\mathbf{\Phi}_k\|_0}\right]^2$$
$$= \sum_{k=1}^{2M-2}\left[(\mathcal{G}\mathbf{x})_k\right]^2 = |\mathcal{G}\mathbf{x}|^2.$$

Por lo tanto, (3.23) se deduce del lema anterior.

□

Ahora, estamos en condiciones de demostrar la estabilidad en H^1 de la proyección Q_h. La demostración sigue los mismos argumentos de [9, Teorema 4.1].

Teorema 3.1 *Si se cumplen las Hipótesis 2 y 3, entonces el operador Q_h es estable en $\mathbf{H}^1(I)$, es decir,*

$$\|Q_h\mathbf{v}\|_1 \le C\|\mathbf{v}\|_1, \quad \textit{para todo } \mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(I),$$

donde C es una constante positiva independiente de $\mathbf{v}$ y h.

Demostración

Definimos $\Pi_h\mathbf{v} = (v_1^I, v_2^I)^T$, donde v_j^I denota la interpolación clásica de Lagrange de v_j en V_h, para $j = 1, 2$.

A partir de la desigualdad triangular, la estabilidad H^1 de la interpolación clásica de Lagrange en V_h y la desigualdad inversa local clásica

$$\|v_h\|_{1,I_\ell} \le h_\ell^{-1}\|v_h\|_{0,I_\ell}, \quad \forall v_h\in V_h,$$

se sigue que existe una constante C tal que

$$\|Q_h\mathbf{v}\|_1^2 \le C\left(\|\Pi_h\mathbf{v}\|_1^2 + \sum_{\ell=1}^{M}\|Q_h\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v}\|_{1,I_\ell}^2\right)$$
$$\le C\left(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \sum_{\ell=1}^{M}h_\ell^{-2}\|Q_h\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v}\|_{0,I_\ell}^2\right).$$

Ahora, usando (3.3), obtenemos que $\|\mathbf{v}\|_{0,I_\ell}^2$ es equivalente a $(A\mathbf{v},\mathbf{v})_{I_\ell}$.

Por lo tanto, se obtiene que

$$\sum_{\ell=1}^{M} h_\ell^{-2}\|Q_h\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v}\|_{0,I_\ell}^2 \le C\sum_{\ell=1}^{M} h_\ell^{-2}\left(A(Q_h\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v}),Q_h\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v}\right)_{I_\ell}.$$

Denotemos por ω_k al soporte de ϕ_k, es decir, $\omega_k = I_k \cup I_{k+1}$. A partir del lema anterior y de la desigualdad de Schwarz, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{M} h_\ell^{-2}\|Q_h\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v}\|_{0,I_\ell}^2 &\le C\sum_{k=1}^{2M}\left[\frac{(A(Q_h\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v}),\mathbf{\Phi}_k)}{h_k\|\mathbf{\Phi}_k\|_0}\right]^2\\
&= C\sum_{k=1}^{2M}\left[\frac{(A(\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v}),\mathbf{\Phi}_k)_{\omega_k}}{h_k\|\mathbf{\Phi}_k\|_0}\right]^2\\
&= C\sum_{k=1}^{2M} h_k^{-2}\|A(\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v})\|_{0,\omega_k}^2\\
&\le C\sum_{k=1}^{2M}\|\mathbf{v}\|_{1,\omega_k}^2 \le C\|\mathbf{v}\|_1^2,
\end{aligned}$$

donde utilizamos nuevamente las estimaciones del error de la interpolación de Lagrange.

□

3.2.4. Resultado auxiliar para una ecuación de reacción–difusión

En esta sección presentamos, como resultado preliminar, estimaciones del error en normas balanceadas para una ecuación de reacción–difusión singularmente perturbada.

Consideremos la ecuación de reacción–difusión

$$\begin{aligned}
-\mu^2 u''(x)+b_0u(x) &= f(x), \quad x\in(0,1),\\
u(0)=u(1) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

con $\mu \ge \varepsilon$, b_0 una constante positiva y f una función suave. Es bien conocido que la solución satisface (ver Lema 1.1)

$$|u^{(k)}(x)| \le C\left(1+\mu^{-k}e^{-b_0\frac{x}{\mu}}+\mu^{-k}e^{-b_0\frac{1-x}{\mu}}\right), \quad k=0,1,2. \tag{3.25}$$

La norma de la energía asociada al problema (3.24) está dada por

$$\|u\|_e^2 = \mu^2 \|u'\|_0^2 + b_0 \|u\|_0^2,$$

mientras que la norma balanceada correspondiente se define como

$$|||u|||_b^2 = \mu \|u'\|_0^2 + b_0 \|u\|_0^2.$$

Por otro lado, la solución $u_h \in V_h$ satisface

$$\mu^2 (u' - u_h', v') + b_0 (u - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h.$$

A partir de esta identidad de Galerkin, podemos demostrar el siguiente resultado de estimación del error.

Teorema 3.2 *Sea u la solución del problema* (3.24)*. Sea $u_h \in V_h$ la solución de*

$$-\mu^2 (u_h', v') + b_0 (u_h, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_h.$$

Suponiendo que la malla $\varepsilon-$graduada satisface la Hipótesis 2, se tiene que

$$\|(u - u_h)'\|_0 \leq C \mu^{-\frac{1}{2}} h.$$

Demostración

A partir de la definición de $\mathcal{P}_0$ dada en la ecuación (3.13) y dado que

$$-\mu^2 (u_h', v') + b_0 (u_h, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_h,$$

siguiendo [[45], Subsección 2.3.1], obtenemos que

$$\begin{aligned} \|u_h - \mathcal{P}_0 u\|_e^2 &= \mu^2 \int_0^1 (u - \mathcal{P}_0 u)'(u_h - \mathcal{P}_0 u)' \, dx \\ &\leq \mu^2 \|(u - \mathcal{P}_0 u)'\|_0 \|(u_h - \mathcal{P}_0 u)'\|_0 \\ &\leq \mu \|(u - \mathcal{P}_0 u)'\|_0 \|u_h - \mathcal{P}_0 u\|_e. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mu \|(u_h - \mathcal{P}_0 u)'\|_0 \leq \|u_h - \mathcal{P}_0 u\|_e \leq \mu \|(u - \mathcal{P}_0 u)'\|_0,$$

y, en particular,

$$\|(u_h - \mathcal{P}_0 u)'\|_0 \leq \|(u - \mathcal{P}_0 u)'\|_0. \tag{3.26}$$

Aplicando la desigualdad triangular y (3.26), obtenemos

$$\begin{aligned}\mu^{\frac{1}{2}}\|(u - u_h)'\|_0 &\leq \mu^{\frac{1}{2}}\|(u - \mathcal{P}_0 u)'\|_0 + \mu^{\frac{1}{2}}\|(\mathcal{P}_0 u - u_h)'\|_0 \\ &\leq 2\mu^{\frac{1}{2}}\|(u - \mathcal{P}_0 u)'\|_0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si logramos demostrar que

$$\|(u - \mathcal{P}_0 u)'\|_0 \leq C\mu^{-\frac{1}{2}}h,$$

se obtiene

$$\mu^{\frac{1}{2}}\|(u - u_h)'\|_0 \leq Ch.$$

Sea $u_I \in V_h$ la interpolación de Lagrange de la solución u de (3.24). Entonces, a partir de la estabilidad en H^1de la proyección $\mathcal{P}_0$ (Lema 3.4), se sigue que

$$\begin{aligned}\|(u - \mathcal{P}_0 u)'\|_0 &\leq \|(u - u_I)'\|_0 + \|[\mathcal{P}_0(u - u_I)]'\|_0 \\ &\leq (1 + C)\|(u - u_I)'\|_0.\end{aligned}$$

Luego, en vista de (3.25) y de la estimación del error para la interpolación de Lagrange dada en el Lema 3.3, se obtiene

$$\|(u - u_I)'\|_0 \leq C\mu^{-\frac{1}{2}}h.$$

En consecuencia,

$$\|(u - \mathcal{P}_0 u)'\|_0 \leq C\mu^{-\frac{1}{2}}h,$$

lo cual permite deducir la estimación deseada.

□

Como consecuencia del último teorema y de las estimaciones del error de la interpolación de Lagrange para la solución u, obtenemos

$$\|u - u_h\|_0 \leq \|u - u_h\|_e \leq Ch$$

y, por lo tanto, surge la siguiente estimación del error en la norma balanceada

$$|||u - u_h|||_b^2 = \mu \|(u - u_h)'\|_0^2 + b_0 \|u - u_h\|_0^2 \leq Ch^2.$$

3.3. Estimaciones del error en normas balanceadas

El objetivo de esta sección es obtener estimaciones del error para la solución del sistema acoplado (3.1) utilizando las mallas $\varepsilon-$graduadas presentadas en la Subsección 3.2.1.

Primero, analizamos un sistema acoplado con parámetros de perturbación iguales. Luego, consideramos el caso de un sistema acoplado con dos parámetros pequeños diferentes, pero suponiendo coeficientes constantes en ambas ecuaciones.

3.3.1. Caso $\mu = \varepsilon$

Teorema 3.3 *Sea* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *la solución del sistema* (3.1), *con* $\varepsilon = \mu$, *y sea* $\mathbf{u}_h = (u_{h,1}, u_{h,2})$ *su correspondiente aproximación por elementos finitos en* $\mathbf{V}_h$. *Suponiendo que se cumplen las Hipótesis 2 y 3, se tiene que existe una constante* C, *independiente de* ε, *tal que*

$$|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h||| \leq Ch.$$

Demostración

Siguiendo las mismas ideas de la demostración del Teorema 3.2, observamos que, si consideramos el operador proyección Q_h definido en (3.21), se tiene

$$\begin{aligned} C\|\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}\|_e^2 &\leq \mathbf{B}(\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{u} - Q_h\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}) \\ &= \varepsilon^2 \int_0^1 (\mathbf{u} - Q_h\mathbf{u})' \cdot (\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u})' \, dx \\ &\leq \varepsilon \|(\mathbf{u} - Q_h\mathbf{u})'\|_0 \|\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}\|_e. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C\|\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}\|_e \leq \varepsilon \|(\mathbf{u} - Q_h\mathbf{u})'\|_0.$$

Además, dado que

$$\varepsilon \|(\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u})'\|_0 \leq \|\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}\|_e,$$

se concluye que

$$\|(\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u})'\|_0 \leq C\|(\mathbf{u} - Q_h\mathbf{u})'\|_0.$$

Luego, utilizando la interpolación de Lagrange $\Pi_h\mathbf{u} = (u_1^I, u_2^I)^T$ y la estabilidad en H^1 de Q_h obtenida en el Teorema 3.1, junto con la desigualdad de Poincaré, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)'\|_0 &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}\| \left(\mathbf{u} - Q_h\mathbf{u}\right)' \|_0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\| \left(Q_h\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\right)' \|_0 \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\| \left(\mathbf{u} - Q_h\mathbf{u}\right)' \|_0 \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\| \left(\mathbf{u} - \Pi_h\mathbf{u}\right)' \|_0 + \| \left(Q_h \left(\mathbf{u} - \Pi_h\mathbf{u}\right)\right)' \|_0\right) \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}\| \left(\mathbf{u} - \Pi_h\mathbf{u}\right)' \|_0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, a partir del Lema 3.3, se tiene que

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)'\|_0 \leq Ch. \tag{3.27}$$

Por otro lado, a partir de la ortogonalidad de Galerkin y las estimaciones del error de interpolación de Lagrange dadas en los Lemas 3.2 y 3.3, surge que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_e \leq \|\mathbf{u} - \Pi_h\mathbf{u}\|_e \leq Ch. \tag{3.28}$$

Así, la demostración se concluye a partir de las desigualdades (3.27) y (3.28).

□

Observación 3.4 *Queremos observar que nuestros resultados pueden extenderse, mediante argumentos análogos, al caso de más de dos ecuaciones. Por ejemplo, en el caso de tres ecuaciones, los principales resultados pueden obtenerse suponiendo que los elementos de la matriz A satisfacen* $a_{ii} > 0$ *y* $a_{ij} \leq 0$ *para* $i \neq j$*, con* $1 \leq i, j \leq 3$*, que existe* $\alpha \neq 0$ *tal que*

$$\min_{x\in[0,1]} \left\{ \sum_{j=1}^{3} a_{ij}(x), 1 \leq i \leq 3 \right\} \geq \alpha^2$$

y que

$$(3 - c_0)\, a_{ii}(x) - (2 + c_0) \sum_{j\neq i} \left(|a_{ji}(x)| + |a_{ij}(x)|\right) \geq \beta_0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

para todo $x \in [0, 1]$.

3.3.2. Caso $\mu \neq \varepsilon$

En esta subsección analizamos el caso en el que tenemos dos parámetros de perturbación pequeños diferentes, pero todas las entradas de la matriz A son constantes.

Observamos que, si consideramos nuevamente la proyección

$$Q_h\mathbf{u} = (Q_{h,1}\mathbf{u}, Q_{h,2}\mathbf{u})^T$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_I (a_{11}Q_{h,1}\mathbf{u} + a_{12}Q_{h,2}\mathbf{u})\, v_1 &= \int_I (a_{11}u_1 + a_{12}u_2)\, v_1, \qquad \forall v_1 \in V_h,\\
\int_I (a_{21}Q_{h,1}\mathbf{u} + a_{22}Q_{h,2}\mathbf{u})\, v_2 &= \int_I (a_{21}u_1 + a_{22}u_2)\, v_2, \qquad \forall v_2 \in V_h,
\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
C\|\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}\|_e^2 &\leq \mathbf{B}(\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}) = \mathbf{B}(\mathbf{u} - Q_h\mathbf{u}, \mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u})\\
&= \varepsilon^2 \int_0^1 (u_1 - Q_{h,1}\mathbf{u})'(u_{h,1} - Q_{h,1}\mathbf{u})' + \mu^2 \int_0^1 (u_2 - Q_{h,2}\mathbf{u})'(u_{h,2} - Q_{h,2}\mathbf{u})'\\
&\leq \varepsilon^2 \|(u_1 - Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0 \|(u_{h,1} - Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0\\
&\quad + \mu^2 \|(u_2 - Q_{h,2}\mathbf{u})'\|_0 \|(u_{h,2} - Q_{h,2}\mathbf{u})'\|_0\\
&\leq (\varepsilon\|(u_1 - Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0 + \mu\|(u_2 - Q_{h,2}\mathbf{u})'\|_0)\, \|\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}\|_e.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\varepsilon\|(u_{h,1} - Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0 + \mu\|(u_{h,2} - Q_{h,2}\mathbf{u})'\|_0 &\leq C\|\mathbf{u}_h - Q_h\mathbf{u}\|_e\\
&\leq \varepsilon\|(u_1 - Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0 + \mu\|(u_2 - Q_{h,2}\mathbf{u})'\|_0,
\end{aligned}$$

y, en particular, tenemos que

$$\varepsilon\|(u_{h,1} - Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0 \leq \varepsilon\|(u_1 - Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0 + \mu\|(u_2 - Q_{h,2}\mathbf{u})'\|_0,$$

$$\mu\|(u_{h,2} - Q_{h,2}\mathbf{u})'\|_0 \leq \varepsilon\|(u_1 - Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0 + \mu\|(u_2 - Q_{h,2}\mathbf{u})'\|_0.$$

Observamos que, teniendo en cuenta los resultados previos, podríamos esperar que

$$\begin{aligned}
\|(u_1 - Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0 &\leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}h,\\
\|(u_2 - Q_{h,2}\mathbf{u})'\|_0 &\leq C\mu^{-\frac{1}{2}}h,
\end{aligned}$$

sin embargo, únicamente pudimos obtener que

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|(u_{h,1}-Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0 \leq Ch\left[1+\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$
$$\mu^{\frac{1}{2}}\|(u_{h,2}-Q_{h,2}\mathbf{u})'\|_0 \leq Ch\left[1+\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

y, por lo tanto, esto no nos proporcionaría la estimación buscada para $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|(u_{h,1}-Q_{h,1}\mathbf{u})'\|_0$.

Para obtener estimaciones óptimas en la norma balanceada, utilizamos una estrategia introducida por Roos [54], definiendo la proyección $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2) \in \mathbf{V}_h$ de la siguiente manera: $\forall v_1, v_2 \in V_h$,

$$\begin{aligned}(a_{11}\hat{u}_1(x)+a_{12}\hat{u}_2(x), v_1) &= (a_{11}u_1(x)+a_{12}u_2(x), v_1)\,,\\ \mu^2(\hat{u}_2', v_2') + (a_{21}\hat{u}_1(x)+a_{22}\hat{u}_2(x), v_2) &= \mu^2(u_2', v_2') + (a_{21}u_1(x)+a_{22}u_2(x), v_2)\,.\end{aligned} \tag{3.29}$$

A partir de la primera ecuación en (3.29), obtenemos

$$(\hat{u}_1(x), v_1) = \left(u_1(x) + \frac{a_{12}}{a_{11}}(u_2(x)-\hat{u}_2(x)), v_1\right), \qquad \forall v_1 \in V_h.$$

De este modo, podemos eliminar $\hat{u}_1$ en la segunda ecuación de (3.29) y obtener

$$\begin{aligned}\mu^2(\hat{u}_2', v_2') + \left(a_{21}\left(u_1(x)+\frac{a_{12}}{a_{11}}(u_2(x)-\hat{u}_2(x))\right) + a_{22}\hat{u}_2(x), v_2\right)&\\ = \mu^2(u_2', v_2') + (a_{21}u_1(x)+a_{22}u_2(x), v_2)\,, \qquad \forall v_2 \in V_h.&\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $v_2 \in V_h$,

$$\mu^2(\hat{u}_2', v_2') + \left(\left(a_{22}-a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\hat{u}_2(x), v_2\right) = \mu^2(u_2', v_2') + \left(\left(a_{22}-a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)u_2(x), v_2\right). \tag{3.30}$$

Sea $c_A = a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}$, este satisface

$$c_A = \frac{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}}{a_{11}} = \frac{det(A)}{a_{11}} > 0.$$

Luego, la ecuación (3.30) se puede escribir como

$$\mu^2(\hat{u}_2', v_2') + (c_A\hat{u}_2, v_2) = \mu^2(u_2', v_2') + (c_A u_2, v_2), \qquad \forall v_2 \in V_h.$$

Por lo tanto, $\hat{u}_2$ es la proyección sobre V_h de u_2 con el producto interno

$$a_\mu(u, v) = \mu^2(u', v') + c_A(u, v),$$

es decir,

$$a_\mu(u_2 - \hat{u}_2, v) = 0, \qquad \forall v \in V_h.$$

Luego, teniendo en cuenta que

$$(\mathcal{P}_0 u_2, v) = (u_2, v), \qquad \forall v \in V_h,$$

podemos proceder como en la demostración del Teorema 3.2 y observar que

$$\|\hat{u}_2 - \mathcal{P}_0 u_2\|_e \leq \mu\|(u_2 - \mathcal{P}_0 u_2)'\|_0,$$

de donde, dado que

$$\mu\|\hat{u}_2 - \mathcal{P}_0 u_2\|_0 \leq \|\hat{u}_2 - \mathcal{P}_0 u_2\|_e,$$

obtenemos

$$\|(\hat{u}_2 - \mathcal{P}_0 u_2)'\|_e \leq C\|(u_2 - \mathcal{P}_0 u_2)'\|_0.$$

Por lo tanto, aplicando la desigualdad triangular y utilizando el resultado de estabilidad de $\mathcal{P}_0$ dado en el Lema 3.4, podemos concluir que

$$\mu^{\frac{1}{2}}\|(u_2 - \hat{u}_2)'\|_0 \leq C\mu^{\frac{1}{2}}\|(u_2 - \mathcal{P}_0 u_2)'\|_0 \leq C\mu^{\frac{1}{2}}\|(u_2 - u_2^I)'\|_0.$$

Finalmente, a partir de (3.10), obtenemos que

$$\mu^{\frac{1}{2}}\|(u_2 - \hat{u}_2)'\|_0 \leq Ch.$$

Ahora, queremos obtener una estimación del error para $\varepsilon\|(u_1 - \hat{u}_1)'\|_0^2$.
Para cualquier $v_h \in V_h$, tenemos que

$$(u_1, v_h) = \left(\hat{u}_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}(\hat{u}_2 - u_2), v_h\right) = \left(\hat{u}_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}(\hat{u}_2 - \mathcal{P}_0(u_2)), v_h\right).$$

Como consecuencia de la unicidad de la proyección L^2, $\mathcal{P}_0$, podemos afirmar que

$$\hat{u}_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}(\hat{u}_2 - \mathcal{P}_0(u_2)) = \mathcal{P}_0(u_1),$$

es decir,

$$\hat{u}_1 = \mathcal{P}_0(u_1) - \frac{a_{12}}{a_{11}}(\hat{u}_2 - \mathcal{P}_0(u_2)).$$

Así, a partir de los Lemas 3.1 y 3.3, podemos asegurar que

$$\begin{aligned}\|(u_1 - \hat{u}_1)'\|_0 &= \left\| \left(u_1 - \mathcal{P}_0(u_1) + \frac{a_{12}}{a_{11}} (\hat{u}_2 - \mathcal{P}_0(u_2)) \right)' \right\|_0 \\ &\leq \|(u_1 - \mathcal{P}_0(u_1))'\|_0 + C\|(\hat{u}_2 - u_2)'\|_0 + \|(u_2 - \mathcal{P}_0(u_2))'\|_0 \\ &\leq C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} h + C\mu^{-\frac{1}{2}} h.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|(\hat{u}_1 - u_1)'\|_0 \leq Ch.$$

Ahora, a partir de la definición (3.29), podemos escribir

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \|(\hat{u}_1 - u_{h,1})'\|_0^2 &\leq \mathbf{B}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \\ &= \mathbf{B}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \\ &= \varepsilon^2 \int_I (\hat{u}_1 - u_{h,1})'(\hat{u}_1 - u_1)' \, dx \\ &\leq \varepsilon^2 \|(\hat{u}_1 - u_{h,1})'\|_0 \|(\hat{u}_1 - u_1)'\|_0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|(\hat{u}_1 - u_{h,1})'\|_0 \leq \|(\hat{u}_1 - u_1)'\|_0 \leq \varepsilon^{-\frac{1}{2}} Ch,$$

y, como consecuencia,

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|(u_1 - u_{h,1})'\|_0 \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\|(\hat{u}_1 - u_1)'\|_0 + \|(\hat{u}_1 - u_{1,h})'\|_0 \right) \leq Ch. \tag{3.31}$$

Por otro lado, dado que

$$\begin{aligned}\mu^2 \|(\hat{u}_2 - u_{h,2})'\|_0^2 &\leq \mathbf{B}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \\ &= \mathbf{B}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) \\ &= \varepsilon^2 \int_I (\hat{u}_1 - u_{h,1})'(\hat{u}_1 - u_1)' \, dx\end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon^2 \|(\hat{u}_1 - u_{h,1})'\|_0 \|(\hat{u}_1 - u_1)'\|_0,$$

obtenemos

$$\mu^2 \|(\hat{u}_2 - u_{h,2})'\|_0^2 \leq \varepsilon^2 C \varepsilon^{-1} h^2 = C\varepsilon h^2,$$

y, por lo tanto,

$$\mu \|(\hat{u}_2 - u_{h,2})'\|_0^2 \leq C \frac{\varepsilon}{\mu} h^2 \leq Ch^2.$$

En consecuencia,

$$\mu \|(u_2 - u_{h,2})'\|_0^2 \leq \mu \|(u_2 - \hat{u}_2)'\|_0^2 + \mu \|(\hat{u}_2 - u_{h,2})'\|_0^2 \leq Ch^2. \tag{3.32}$$

Por otro lado, a partir de los Lemas 3.2 y 3.3, es claro que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_0 \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_e \leq \|\mathbf{u} - \Pi\mathbf{u}\|_e \leq Ch. \tag{3.33}$$

Luego, como consecuencia inmediata de las estimaciones (3.31), (3.32) y (3.33), obtenemos el siguiente resultado principal.

Teorema 3.4 *Sea* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *la solución del sistema* (3.1) *y sea* $\mathbf{u}_h = (u_{h,1}, u_{h,2})$ *su correspondiente aproximación por elementos finitos en* $\mathbf{V}_h$*. Suponiendo que se cumple la Hipótesis 2, existe una constante* C*, independiente de* ε *y* μ*, tal que*

$$|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h||| \leq Ch.$$

Observación 3.5 *Cabe destacar que el caso de más de dos ecuaciones, con coeficientes constantes y diferentes parámetros de perturbación, puede tratarse con argumentos similares. En efecto, en el caso de tres ecuaciones, con parámetros de perturbación* $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3$ *y* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *una matriz definida positiva, la proyección* $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3) \in \mathbf{V}_h$ *puede definirse como en* (3.29) *mediante la condición*

$$\begin{aligned}
(a_{11}\hat{u}_1(x) + a_{12}\hat{u}_2(x) + a_{13}\hat{u}_3(x), v_1) &= (a_{11}u_1(x) + a_{12}u_2(x) + a_{13}u_3(x), v_1)\,, \\
(a_{21}\hat{u}_1(x) + a_{22}\hat{u}_2(x) + a_{23}\hat{u}_3(x), v_2) &= (a_{21}u_1(x) + a_{22}u_2(x) + a_{23}u_3(x), v_2)\,, \\
\varepsilon_3^2(\hat{u}_3', v_3') + (a_{31}\hat{u}_1(x) + a_{32}\hat{u}_2(x) + a_{33}\hat{u}_3(x), v_3) &= \varepsilon_3^2(u_3', v_3') + (a_{31}u_1(x) + a_{32}u_2(x) + a_{33}u_3(x), v_3)\,,
\end{aligned}$$

para todo $v_1, v_2, v_3 \in V_h$*.*

Observación 3.6 *Se puede observar que la proyección* $\hat{\mathbf{u}}$ *introducida en [54] también puede usarse para obtener aproximaciones de mayor orden. Sin embargo, otra herramienta*

fundamental en nuestro análisis, como es la estabilidad en H^1 sobre mallas graduadas de la proyección L^2, $\mathcal{P}_0$, no puede obtenerse directamente con nuestras técnicas para elementos de mayor orden.

3.4. Ejemplos numéricos

En esta sección, presentamos ejemplos numéricos que confirman los resultados teóricos de los Teoremas 3.3 y 3.4.

Los problemas se aproximan utilizando mallas graduadas como se especifica en la Subsección 3.2.1 para los parámetros correspondientes ε y h. Los errores $\mathbf{e}_h = |||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|||$ se calculan numéricamente comparando la solución aproximada $\mathbf{u}_h$, para todos los valores de h reportados, con la solución de elementos finitos obtenida cuando $h = 10^{-3}$.

Calculamos las tasas de convergencia con respecto a h, r_h, y con respecto al número de grados de libertad, r_N, de la siguiente manera:

$$r_h = \frac{\log \mathbf{e}_h - \log \mathbf{e}_{\frac{h}{2}}}{\log 2}, \qquad r_N = -\frac{\log \mathbf{e}_h - \log \mathbf{e}_{\frac{h}{2}}}{\log N_h - \log N_{\frac{h}{2}}},$$

donde N_h denota el número de elementos de una malla ε–graduada $\mathcal{T}_h$.

Los cálculos fueron implementados en Octave [21] y el sistema lineal se resolvió utilizando el operador *backslash* "\". Cabe señalar que, para valores pequeños de h y ε, los puntos de la malla cercanos a $x = 1$ no pueden ser diferenciados, ya que la amplitud de algunos intervalos es demasiado pequeña para la precisión de la máquina. Por ejemplo, con la notación de la Subsección 3.2.1, observamos que el nodo $x_{M-1} = 1 - h^s$ coincide con $x_M = 1$ cuando $h^s \leq 10^{-17}$ en Octave. Sin embargo, destacamos que, todas las integrales involucradas en la matriz de rigidez, se pueden obtener utilizando solamente las longitudes de la malla, evitando cálculos en los nodos.

3.4.1. Primer Ejemplo: coeficientes variables, $\varepsilon = \mu$

Para confirmar las estimaciones dadas en el Teorema 3.3, en este ejemplo consideramos la solución numérica del sistema (3.1) con coeficientes variables dados por

$$\begin{aligned} a_{11}(x) &= 5(x+1)^2, & a_{12}(x) &= -(1+x)^3, \\ a_{21}(x) &= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right), & a_{22}(x) &= 5e^{1-x}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

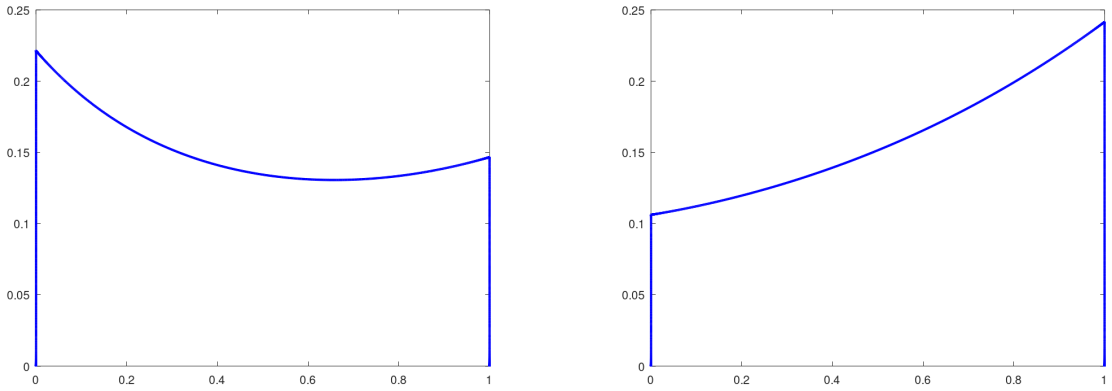


Figura 3.1: Soluciones numéricas u_1 (izquierda) y u_2 (derecha) del Ejemplo 3.4.1 para $\varepsilon = 10^{-6}$.

h	$\varepsilon = 10^{-6}$				$\varepsilon = 10^{-9}$			
	N_h	$\|\|\|\cdot\|\|\|$-error	r_h	r_N	N_h	$\|\|\|\cdot\|\|\|$-error	r_h	r_N
0.32	144	3.5080e-02	-	-	216	3.4808e-02	-	-
0.16	330	1.9185e-02	0.87	0.73	498	1.9040e-02	0.87	0.72
0.08	684	1.0118e-02	0.92	0.88	1036	1.0043e-02	0.92	0.87
0.04	1376	5.2127e-03	0.96	0.95	2082	5.1746e-03	0.96	0.95
0.02	2742	2.6544e-03	0.97	0.98	4148	2.6351e-03	0.97	0.98
0.01	5456	1.3527e-03	0.97	0.98	8252	1.3429e-03	0.97	0.98

Tabla 3.1: Errores numéricos para el Ejemplo 3.4.1.

y

$$f_1(x) = f_2(x) = 1, \qquad \text{en } [0,1].$$

Se muestra una gráfica de la solución obtenida para $\varepsilon = 10^{-6}$ en la Figura 3.1. La Tabla 3.1 muestra los errores en la norma balanceada y las tasas de convergencia numérica obtenidas para $\varepsilon = 10^{-6}$ y $\varepsilon = 10^{-9}$.

El propósito de la Tabla 3.2 es estudiar la robustez de las mallas graduadas en dos aspectos. Primero, el parámetro $h = 0{,}1$ se fija, mientras que ε varía entre 10^{-9} y 10^{-1}. Las soluciones se calculan utilizando cada malla ε–graduada con $h = 0{,}1$. En la columna A vemos que los errores numéricos estimados en la norma balanceada permanecen dentro de un rango estable. En segundo lugar, se utiliza una única malla ε–graduada, diseñada para los parámetros fijos $\varepsilon = 10^{-9}$ y $h = 0{,}1$, para calcular la solución de problemas con diferentes valores del parámetro ε. En la columna B vemos que los errores numéricos tampoco presentan variaciones significativas, cerca de 0,01.

ε	Columna A	Columna B
	$\|\|\|\cdot\|\|\|$-error	$\|\|\|\cdot\|\|\|$-error
1e-01	1.4193e-02	8.1381e-03
1e-02	1.3104e-02	8.6045e-03
1e-03	1.2767e-02	9.0517e-03
1e-04	1.2616e-02	9.5381e-03
1e-05	1.2528e-02	1.0051e-02
1e-06	1.2471e-02	1.0591e-02
1e-07	1.2431e-02	1.1158e-02
1e-08	1.2401e-02	1.1753e-02
1e-09	1.2378e-02	1.2378e-02

Tabla 3.2: Comparación de los errores obtenidos en la norma balanceada para el Ejemplo 3.4.1, para diferentes valores de ε. Columna A: se utilizan mallas graduadas para cada valor particular de ε y $h = 0{,}1$. Columna B: se utiliza una sola malla graduada con $\varepsilon = 10^{-9}$ y $h = 0{,}1$ en todos los casos.

3.4.2. Segundo Ejemplo: coeficientes constantes, $\varepsilon \neq \mu$

Para confirmar los resultados del Teorema 3.4, consideramos el siguiente problema acoplado de reacción–difusión con coeficientes constantes, tomado de [37, 42]:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 u_1''(x) + 2u_1(x) - u_2(x) = 1, & \text{en } I = (0,1) \\ -\mu^2 u_2''(x) - u_1(x) + 2u_2(x) = 1, & \\ u_1(0) = u_1(1) = u_2(0) = u_2(1) = 0. & \end{cases} \tag{3.35}$$

La Figura 3.4.2 muestra la gráfica de las soluciones numéricas, que coinciden con las presentadas en [42]. Se puede observar la estructura de las capas límite cuando se consideran diferentes parámetros ε y μ.

En la Tabla 3.3 mostramos los resultados numéricos para la aproximación del problema (3.35) para los casos $\varepsilon = 10^{-6}, \mu = 10^{-2}$ y $\varepsilon = 10^{-9}, \mu = 10^{-3}$.

La Tabla 3.4 muestra los errores numéricos obtenidos para el mismo problema cuando $\varepsilon = 10^{-9}$ y μ varía entre 10^{-9} y 10^{-1}. Dado que ε está fijo, en todos los casos se utiliza la misma malla ε–graduada, con $h = 0{,}1$. Se puede observar que los errores permanecen prácticamente sin cambios para todos los valores de μ.

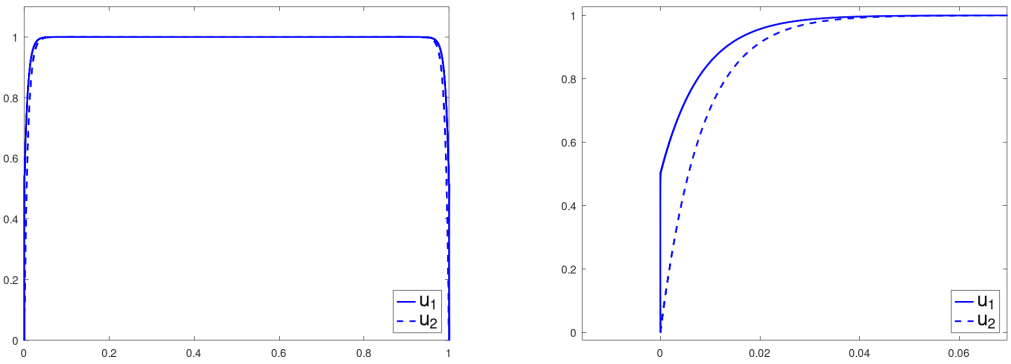


Figura 3.2: Solución numérica del Ejemplo 3.4.2 con $\varepsilon = 10^{-6}$ y $\mu = 10^{-2}$.

h	$\varepsilon = 10^{-6}, \mu = 10^{-2}$				$\varepsilon = 10^{-9}, \mu = 10^{-3}$			
	N_h	$\|\|\|\cdot\|\|\|$-error	r_h	r_N	N_h	$\|\|\|\cdot\|\|\|$-error	r_h	r_N
0.32	144	9.0274e-02	-	-	216	9.0090e-02	-	-
0.16	330	4.8701e-02	0.89	0.74	498	4.8628e-02	0.89	0.74
0.08	684	2.5449e-02	0.94	0.89	1036	2.5421e-02	0.94	0.89
0.04	1376	1.3041e-02	0.96	0.96	2082	1.3030e-02	0.96	0.96
0.02	2742	6.6214e-03	0.98	0.98	4148	6.6165e-03	0.98	0.98
0.01	5456	3.3691e-03	0.98	0.98	8252	3.3669e-03	0.97	0.98

Tabla 3.3: Errores numéricos y tasas de convergencia correspondientes en normas balanceadas para el Ejemplo 3.4.2.

μ	$\|\|\|\cdot\|\|\|$-error
1e-01	2.9421e-02
1e-02	3.0373e-02
1e-03	3.1409e-02
1e-04	3.2519e-02
1e-05	3.3707e-02
1e-06	3.4977e-02
1e-07	3.6364e-02
1e-08	3.8466e-02
1e-09	4.4002e-02

Tabla 3.4: Errores numéricos para el Ejemplo 3.4.2 con $\varepsilon = 10^{-9}$ y diferentes valores de μ. La malla graduada utilizada es la diseñada para $\varepsilon = 10^{-9}$ y $h = 0{,}1$.

Capítulo 4

Superconvergencia para una ecuación de reacción–difusión

En este capítulo demostramos un resultado de superconvergencia para la aproximación estándar mediante elementos finitos Q_1 del problema modelo de reacción–difusión que venimos considerando (ver (1.1), (2.1)), cuando se utilizan mallas graduadas apropiadas. El principal interés de este resultado radica en que, en el capítulo siguiente, será utilizado para obtener un orden lineal de convergencia en la discretización de un problema fraccionario.

Específicamente, analizamos el siguiente problema modelo

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u + b(x,y)u &= f(x,y), \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $\Omega = (0,1)^2$, $0 < \varepsilon \ll 1$ es un parámetro pequeño, y se asume que

$$b(x,y) \geq 1 \text{ en } \Omega. \tag{4.2}$$

A partir de esta formulación, comenzamos con el estudio de la aproximación del problema mediante elementos finitos sobre mallas graduadas. En particular, mostramos cómo obtener una aproximación de orden superior mediante un posprocesamiento aplicado a la solución numérica. En este contexto, en el Teorema 4.1 demostramos que dicho posprocesamiento, utilizando elementos finitos bilineales sobre mallas graduadas, permite obtener una aproximación superconvergente que resulta casi uniforme con respecto al parámetro de perturbación singular. Este resultado se deduce a partir de una propiedad de *supercloseness* demostrada en [19], siempre que el parámetro de graduación que define

la malla sea suficientemente grande.

Finalmente, en la Sección 4.4, presentamos un ejemplo numérico que respalda el resultado teórico desarrollado en la Sección 4.3.

4.1. Resultados auxiliares

Nuevamente, supondremos que $f \in \mathcal{C}^2([0,1]^2)$ y que satisface las condiciones de compatibilidad

$$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = 0, \tag{4.3}$$

ya que, bajo estas hipótesis, la solución exacta u del problema (4.1) pertenece a $\mathcal{C}^4(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ y se obtienen las estimaciones puntuales para u y sus derivadas presentadas en el Lema 2.3, con $b_0 = 1$. En particular, si $0 \leq k \leq 4$ y $(x,y) \in \Omega$, entonces

$$\left|\partial_x^k u(x,y)\right| \leq C\left(1 + \varepsilon^{-k} e^{-x/\varepsilon} + \varepsilon^{-k} e^{-(1-x)/\varepsilon}\right), \tag{4.4}$$

$$\left|\partial_y^k u(x,y)\right| \leq C\left(1 + \varepsilon^{-k} e^{-y/\varepsilon} + \varepsilon^{-k} e^{-(1-y)/\varepsilon}\right). \tag{4.5}$$

Asimismo, se dispone de ciertas estimaciones a priori con peso para u, uniformes con respecto al parámetro de perturbación ε (véase [19, Lema 3.1]). Definiendo la función distancia al borde en el intervalo $[0,1]$ como $d(t) = \text{mín}\{t, 1-t\}$, se tiene:

(i) si $0 \leq k \leq 4$, $\alpha + \beta \geq k - \frac{1}{2}, \alpha \geq 0, \beta > -\frac{1}{2}$, entonces

$$\varepsilon^\alpha \left\|d(x)^\beta \partial_x^k u\right\|_0 \leq C, \quad \varepsilon^\alpha \left\|d(y)^\beta \partial_y^k u\right\|_0 \leq C, \tag{4.6}$$

(ii) si $\alpha + \beta \geq \frac{5}{2}, \alpha \geq \frac{3}{4}, \beta > \frac{1}{2}$, entonces

$$\varepsilon^\alpha \left\|d(y)^\beta \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}\right\|_0 \leq C. \tag{4.7}$$

4.2. Aproximación por elementos finitos en mallas graduadas

Como presentamos en la Sección 1.1 del Capítulo 1, la formulación débil estándar del problema (4.1) consiste en encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u,v) = \int_\Omega f(x,y)v\,dxdy, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde la forma bilineal B se define por

$$B(u,v) = \int_\Omega \left(\varepsilon^2 \nabla u \cdot \nabla v + b(x,y)uv\right)\, dxdy.$$

Para un dominio D, trabajaremos con la norma inducida por la forma bilineal, que denominaremos en adelante ε–norma:

$$\|v\|_{\varepsilon,D} = \left(\varepsilon^2 \|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

es decir, la norma de la energía. Cuando $D = \Omega$, omitimos el subíndice por simplicidad.

Es bien conocido que, bajo la hipótesis (4.2), la forma bilineal B es uniformemente continua y coerciva con respecto a la ε–norma. En particular, se verifica que

$$\|v\|_\varepsilon^2 \leq B(v,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En [17] se desarrolló un análisis de la aproximación del problema (4.1) mediante elementos finitos bilineales sobre mallas graduadas adecuadas. En dicho trabajo se demostró convergencia casi óptima, uniforme con respecto a ε. Las mallas graduadas utilizadas en [17], que dependen de un parámetro η con $\frac{1}{2} < \eta < 1$, se construyen de forma independiente del parámetro de perturbación ε.

Posteriormente, en [19], bajo la restricción más fuerte $\frac{3}{4} \leq \eta < 1$, se obtuvieron resultados de *supercloseness* para el mismo esquema considerado en [17]. Específicamente, se demostró que la diferencia entre la solución por elementos finitos y la interpolación de Lagrange de la solución exacta, en la ε–norma, es de orden superior al error global. Las constantes involucradas en dichas estimaciones dependen débilmente del parámetro de perturbación singular. Partiendo de estos resultados conocidos, nuestro objetivo es obtener una aproximación de orden superior mediante un post–procesamiento local de la solución calculada.

En el dominio $\Omega = (0,1)^2$, para $N \in \mathbb{N}$, introducimos una malla graduada $\mathcal{T}_N$ de Ω obtenida como el producto tensorial de particiones del intervalo $[0,1]$ en $2N$ subintervalos. Dado un parámetro de graduación η que satisface

$$\frac{3}{4} \leq \eta < 1,$$

definimos $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N$ los puntos de la malla en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ como

$$\xi_i = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{1}{1-\eta}}, \quad i = 0, \ldots, N.$$

Esta partición se extiende a una malla $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N, \ldots, \xi_{2N}\}$ de $[0,1]$ definiendo

$$\xi_i = 1 - \xi_{2N-i}, \quad \text{para } i = N+1, \ldots, 2N.$$

Para $1 \leq i, j \leq 2N$ definimos $R_{ij} = (\xi_{i-1}, \xi_i) \times (\xi_{j-1}, \xi_j)$. Así, obtenemos una malla graduada $\mathcal{T}_N = \{R_{ij}\}_{i,j=1}^{2N}$ de Ω. Además, definimos $h_i = \xi_i - \xi_{i-1}$.

Observación 4.1 *Los intervalos $I_i, i = 2, \ldots, 2N$, de la partición del intervalo $[0,1]$ satisfacen*

$$|I_i| \leq C\frac{1}{N}y^{\eta}, \qquad \forall y \in I_i,$$

y, para $i \geq 2$, también se cumple que

$$y \leq C\,(\log N)^{\eta}\, z, \qquad \forall y, z \in I_i,$$

con una constante C que depende sólo de η, como se demuestra de manera más general en las Observaciones 5.1 y 5.2.

Observación 4.2 *Con las estimaciones dadas en la observación anterior y de manera análoga a las demostraciones de las Observaciones 5.1 y 5.2, se puede demostrar que, para todo $R_{ij} \in \mathcal{T}_N$, se cumple que*

$$h_i \leq C\frac{1}{N}x^{\eta}, \qquad h_j \leq C\frac{1}{N}y^{\eta}, \qquad \forall (x,y) \in R_{ij}$$

y

$$x_1 \leq Cx_2, \qquad y_1 \leq Cy_2, \qquad \forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in R_{ij}.$$

Por otro lado, es fácil verificar que

$$\frac{h_i}{h_{i+1}} \leq C, \quad \forall i = 0, \ldots, 2N-1,$$

donde C es una constante que depende únicamente de η.

Observación 4.3 *Observamos que, en este caso, adoptamos una definición de mallas graduadas distinta de la utilizada en los capítulos anteriores. Esta elección responde a que facilita el análisis y las estimaciones involucradas, aunque ambas definiciones satisfacen las propiedades necesarias para nuestras estimaciones. No obstante, es importante destacar que esta definición no fue adoptada en los capítulos anteriores, ya que allí se emplea un parámetro de graduación dado por $1 - \frac{1}{2\log(\frac{1}{\varepsilon})}$, es decir, un valor que depende de ε. En ese contexto, tal dependencia no resulta conveniente, ya que implicaría que las estimaciones presentadas en las Observaciones 4.1 y 4.2 también dependan de ε, lo cual se desea evitar en ese tipo de análisis. Por otra parte, una ventaja de la definición adoptada aquí es que permite controlar a priori la cantidad de elementos en la malla.*

Asociado a la malla $\mathcal{T}_N$, introducimos el espacio estándar de elementos finitos bilineales a trozos

$$V_N = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_{R_{ij}} \in Q_1(R_{ij}), 1 \leq i, j \leq 2N\},$$

y la correspondiente aproximación por elementos finitos $u_N \in V_N$, que satisface

$$B(u_N, v) = \int_\Omega f(x,y)v\,dx, \quad \forall v \in V_N. \tag{4.8}$$

Siendo $h = 1/N$, obtenemos el siguiente resultado de *supercloseness*.

Proposición 4.1 *Sea u la solución de (4.1), $u_N \in V_N$ su aproximación por elementos finitos y $u_I \in V_N$ su interpolación de Lagrange. Supongamos que $\frac{3}{4} \leq \eta < 1$. Entonces, existe una constante C tal que*

$$\|u_N - u_I\|_\varepsilon \leq Ch^2 \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

Demostración

La demostración sigue los lineamientos de la prueba de [19, Teorema 4.7], con la salvedad de que las mallas utilizadas en dicho trabajo difieren de las introducidas

en esta sección. Sin embargo, las únicas propiedades de la malla necesarias para establecer la desigualdad (4.9) son las enunciadas en la Observación 4.2. Por lo tanto, la estimación se mantiene válida bajo la definición de mallas graduadas adoptada actualmente.

□

Observemos que este resultado establece que la $\varepsilon-$norma de la diferencia entre la interpolación de la solución exacta u y su aproximación por elementos finitos u_N es de orden superior a la $\varepsilon-$norma del error $u - u_N$.

4.3. Aproximación de orden superior mediante post–procesamiento

Es sabido que, a partir de un resultado de *supercloseness* como el establecido en la Proposición 4.1, es posible mejorar la aproximación numérica mediante un post–procesamiento local.

Observación 4.4 *Notamos que las mallas sobre Ω utilizadas en [19] han sido definidas de manera distinta a las que introdujimos en la Sección 4.2. Sin embargo, las únicas propiedades de la partición requeridas en la demostración de la desigualdad* (4.9) *son aquellas enunciadas en la Observación 4.2. Por lo tanto, dicha desigualdad sigue siendo válida bajo esta definición de las mallas.*

Definiremos el post–procesamiento u_N^* de la solución por elementos finitos u_N, siguiendo la construcción presentada en [18, 20, 61]. Como la malla $\mathcal{T}_N$ se obtiene como el producto tensorial de una partición de $[0, 1]$ en $2N$ subintervalos, puede considerarse un refinamiento de la malla más gruesa $\mathcal{S}_N$, compuesta por los elementos S_{ij}, con $1 \leq i, j \leq N$, según se ilustra en la Figura 4.1. Sea I_2 el operador de interpolación bicuadrático sobre la malla $\mathcal{S}_N$, el cual, para toda función $v \in \mathcal{C}(\Omega)$, se define en cada S_{ij} como la interpolación de Lagrange en los nueve nodos indicados en la Figura 4.1, es decir, en los vértices de los cuatro elementos de la malla fina $\mathcal{T}_N$ contenidos en S_{ij}. Definimos entonces

$$u_N^* := I_2 u_N.$$

A continuación, probaremos que u_N^* es una aproximación de segundo orden de u en la ε–norma.

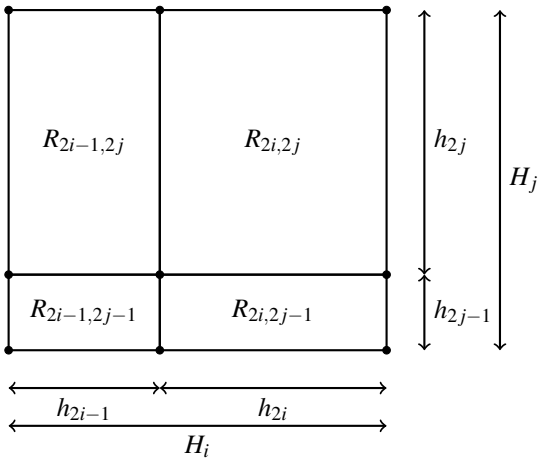


Figura 4.1: Elemento S_{ij}.

Necesitaremos las siguientes estimaciones para el operador I_2.

Lema 4.1 *Existe una constante C tal que, para todo $v \in V_N$ y $S_{ij} \in \mathcal{S}_N$, se verifica que*

$$\|I_2 v\|_{L^\infty(S_{ij})} \leq C \|v\|_{L^\infty(S_{ij})}. \tag{4.10}$$

Demostración

Para $(x, y) \in S_{ij}$ y $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, definimos

$$\varphi_{\alpha\beta}(x, y) = \prod_{k \neq \alpha} \frac{x - x^k}{x^\alpha - x^k} \prod_{\ell \neq \beta} \frac{y - y^\ell}{y^\beta - y^\ell} \tag{4.11}$$

donde (x^k, y^ℓ), con $k, \ell = 1, 2, 3$, son los nodos de interpolación en S_{ij}. Así, podemos escribir

$$I_2 v = \sum_{\alpha,\beta=1,2,3} v(x^\alpha, y^\beta)\, \varphi_{\alpha\beta}, \qquad \text{en } S_{ij}. \tag{4.12}$$

Denotando H_i y H_j como las longitudes del elemento S_{ij} en las direcciones de los ejes x e y, respectivamente, y $h^x_{min} := \text{mín}\{h_{2i-1}, h_{2i}\}$, $h^y_{min} := \text{mín}\{h_{2j-1}, h_{2j}\}$, se tiene que $|x - x^k| \leq H_i$, $|y - y^\ell| \leq H_j$, $|x^\alpha - x^k| \geq h^x_{min}$ y $|y^\beta - y^\ell| \geq h^y_{min}$.

Por lo tanto,

$$\|\varphi_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(S_{ij})} \leq \frac{H_i^2 H_j^2}{(h^x_{min})^2 (h^y_{min})^2} \leq C,$$

donde en la última desigualdad utilizamos que los cocientes H_i/h^x_{min}, H_j/h^y_{min} están uniformemente acotados, dado que las razones h_{i+1}/h_i, h_{j+1}/h_j lo están (ver

Observación 4.2).

En consecuencia,

$$||I_2 v||_{L^\infty(S_{ij})} \leq \sum_{\alpha,\beta=1,2,3} ||\varphi_{\alpha\beta}||_{L^\infty(S_{ij})} ||v||_{L^\infty(S_{ij})} \leq C||v||_{L^\infty(S_{ij})}$$

que es lo que queríamos demostrar.

□

Lema 4.2 *Existe una constante C tal que, para todo $v \in V_N$,*

$$\left\| \frac{\partial I_2 v}{\partial x} \right\|_{L^\infty(S_{ij})} \leq C \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^\infty(S_{ij})},$$

$$\left\| \frac{\partial I_2 v}{\partial y} \right\|_{L^\infty(S_{ij})} \leq C \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^\infty(S_{ij})}.$$

Demostración

Demostraremos la primera desigualdad, el argumento para la segunda es análogo.

Utilizando las expresiones (4.11) y (4.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2 v}{\partial x}(x,y) &= \sum_{\beta=1,2,3} \sum_{\alpha=1,2,3} \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial x}(x,y) v(x^\alpha, y^\beta) \\ &= \sum_{\beta=1,2,3} \prod_{\ell \neq \beta} \frac{y - y^\ell}{y^\beta - y^\ell} \sum_{\alpha=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\prod_{k \neq \alpha} \frac{x - x^k}{x^\alpha - x^k} \right) v(x^\alpha, y^\beta). \end{aligned}$$

Los productos en la variable y se acotan como en la demostración anterior. Sea $p_\beta(x)$ el interpolante cuadrático de $v_\beta := v(\cdot, y^\beta)$ en los nodos x^α, $\alpha = 1, 2, 3$. Entonces,

$$p_\beta(x) = \sum_{\alpha=1,2,3} \prod_{k \neq \alpha} \frac{x - x^k}{x^\alpha - x^k} v(x^\alpha, y^\beta),$$

y, por lo tanto,

$$\frac{\partial I_2 v}{\partial x}(x,y) = \sum_{\beta=1,2,3} \prod_{\ell \neq \beta} \frac{y - y^\ell}{y^\beta - y^\ell} p'_\beta(x).$$

Además, podemos expresar

$$p_\beta(x) = v_\beta(x^1) + \frac{v_\beta(x^2) - v_\beta(x^1)}{x^2 - x^1}(x - x^1) + \frac{\frac{v_\beta(x^3) - v_\beta(x^2)}{x^3 - x^2} - \frac{v_\beta(x^2) - v_\beta(x^1)}{x^2 - x^1}}{x^3 - x^1}(x - x^1)(x - x^2),$$

de donde se deduce que, si $x^M = \frac{x^1+x^2}{2}$, entonces

$$p'_\beta(x) = \frac{v_\beta(x^2)-v_\beta(x^1)}{x^2-x^1} + 2\frac{\frac{v_\beta(x^3)-v_\beta(x^2)}{x^3-x^2} - \frac{v_\beta(x^2)-v_\beta(x^1)}{x^2-x^1}}{x^3-x^1}\left(x-x^M\right).$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio, existen $\zeta_0 \in (x^1, x^2)$ y $\zeta_1 \in (x^2, x^3)$ tales que

$$p'_\beta(x) = v'_\beta(\zeta_0) + 2\frac{v'_\beta(\zeta_1)-v'_\beta(\zeta_0)}{x^3-x^1}(x-x^M).$$

Dado que $|x^3 - x^1| = H_i$ y $|x - x^M| \leq H_i$, se obtiene

$$|p'_\beta(x)| \leq |v'_\beta(\zeta_0)| + 2\frac{|v'_\beta(\zeta_1)|+|v'_\beta(\zeta_0)|}{H_i}H_i \leq 5\left\|\frac{\partial v}{\partial_x}(\cdot, y^\beta)\right\|_{L^\infty((x^1,x^3))}.$$

En resumen,

$$\left\|\frac{\partial I_2 v}{\partial x}\right\|_{L^\infty(S_{ij})} \leq C\sum_{\beta=1,2,3}\left\|\frac{\partial v}{\partial_x}(\cdot, y^\beta)\right\|_{L^\infty((x^1,x^3))} \leq C\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty(S_{ij})}$$

lo que completa la demostración.

□

Lema 4.3 *Sea u la solución de (4.1) e I_2u su interpolante bicuadrático a trozos sobre $\mathcal{S}_N$. Entonces, existe una constante C tal que*

$$\|u - I_2u\|_\varepsilon \leq Ch^2. \tag{4.13}$$

Demostración

El resultado se deduce de las estimaciones a priori establecidas en la Sección 4.1 y de las siguientes estimaciones del error de interpolación para el operador I_2 (ver [4, Teorema 2.7] y [18, Lema 4.1]). Para $v \in H^3(S_{ij})$, se tiene que

$$\|v - I_2v\|_{0,S_{ij}} \leq C\left[H_i^2\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{0,S_{ij}} + H_j^2\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\|_{0,S_{ij}}\right], \tag{4.14}$$

$$\left\|\frac{\partial(v-I_2v)}{\partial x}\right\|_{0,S_{ij}} \leq C\left[H_i^2\left\|\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right\|_{0,S_{ij}} + H_j^2\left\|\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right\|_{0,S_{ij}}\right], \tag{4.15}$$

$$\left\|\frac{\partial(v-I_2v)}{\partial y}\right\|_{0,S_{ij}} \leq C\left[H_i^2\left\|\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}\right\|_{0,S_{ij}} + H_j^2\left\|\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right\|_{0,S_{ij}}\right], \tag{4.16}$$

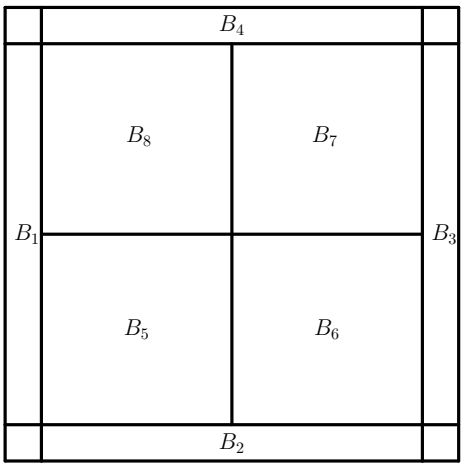


Figura 4.2: Partición del cuadrado unitario utilizada en la demostración del Lema 4.3.

donde la constante C es independiente del elemento S_{ij} y de la función v. Con la notación introducida en la Figura 4.2, escribimos

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{8} B_i,$$

donde

$$B_1 = \bigcup_{j=1}^{N} S_{1j}, \quad B_2 = \bigcup_{i=1}^{N} S_{i1}, \quad B_3 = \bigcup_{j=1}^{N} S_{Nj}, \quad B_4 = \bigcup_{i=1}^{N} S_{iN},$$

y

$$\begin{aligned}
B_5 &= \bigcup \{S_{ij} : 2 \leq i,\, j \leq N/2 - 1\}, \\
B_6 &= \bigcup \{S_{ij} : N/2 \leq i \leq N - 1,\, 2 \leq j \leq N/2 - 1\}, \\
B_7 &= \bigcup \{S_{ij} : N/2 \leq i,\, j \leq N - 1\}, \\
B_8 &= \bigcup \{S_{ij} : 2 \leq i \leq N/2 - 1,\, N/2 \leq j \leq N - 1\}.
\end{aligned}$$

Debido a la simetría del problema, basta estimar (4.13) en las regiones B_1 y B_5. Comenzando por B_1, se tiene

$$\|u - I_2 u\|^2_{\varepsilon,\, B_1} = \varepsilon^2 \|\nabla(u - I_2 u)\|^2_{0,\, B_1} + \|u - I_2 u\|^2_{0,\, B_1}. \tag{4.17}$$

Para el primer término del lado derecho, se obtiene

$$\varepsilon^2 \|\nabla(u - I_2 u)\|^2_{0,\, B_1} = \varepsilon^2 \left\| \tfrac{\partial(u - I_2 u)}{\partial x} \right\|^2_{0,\, B_1} + \varepsilon^2 \left\| \tfrac{\partial(u - I_2 u)}{\partial y} \right\|^2_{0,\, B_1}. \tag{4.18}$$

A partir de (4.4) y (4.5), se observa que

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leq \frac{C}{\varepsilon}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leq \frac{C}{\varepsilon}.$$

Teniendo en cuenta esto, aplicando el Lema 4.2 y considerando que $|B_1| = H_1 = Ch^{\frac{1}{1-\eta}}$, se deduce que

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial (u - I_2 u)}{\partial x} \right\|^2_{0,\, B_1} \leq Ch^{\frac{1}{1-\eta}}.$$

Un resultado análogo se obtiene para la derivada respecto de y del error de interpolación, por lo que, a partir de (4.18), se concluye que

$$\varepsilon^2 \|\nabla (u - I_2 u)\|^2_{0,\, B_1} \leq Ch^{\frac{1}{1-\eta}}. \tag{4.19}$$

De manera similar, usando el Lema 4.1 y teniendo en cuenta que u está uniformemente acotada, se tiene

$$\|u - I_2 u\|^2_{0,\, B_1} \leq Ch^{\frac{1}{1-\eta}}. \tag{4.20}$$

Combinando las dos estimaciones anteriores, con $\eta \geq \frac{3}{4}$, se deduce que

$$\|u - I_2 u\|^2_{\varepsilon^2,\, B_1} \leq Ch^4.$$

Ahora abordamos la estimación en B_5. Consideramos un elemento S_{ij} tal que $2 \leq i, j \leq N/2 - 1$, entonces

$$\|u - I_2 u\|^2_{\varepsilon,\, S_{ij}} = \varepsilon^2 \|\nabla (u - I_2 u)\|^2_{0,\, S_{ij}} + \|u - I_2 u\|^2_{0,\, S_{ij}}. \tag{4.21}$$

Para el primer término del lado derecho,

$$\varepsilon^2 \|\nabla (u - I_2 u)\|^2_{0,\, S_{ij}} = \varepsilon^2 \left\| \tfrac{\partial (u - I_2 u)}{\partial x} \right\|^2_{0,\, S_{ij}} + \varepsilon^2 \left\| \tfrac{\partial (u - I_2 u)}{\partial y} \right\|^2_{0,\, S_{ij}}. \tag{4.22}$$

Notamos que las longitudes H_i, H_j de los elementos S_{ij} considerados aquí satisfacen $H_i \leq Chx^\eta$, $H_j \leq Chy^\eta$ para $(x, y) \in S_{ij}$. Utilizando esta propiedad en (4.15), se deduce que

$$\left\| \tfrac{\partial (u - I_2 u)}{\partial x} \right\|^2_{0,\, S_{ij}} \leq Ch^4 \left[\left\| x^{2\eta} \tfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right\|^2_{0,\, S_{ij}} + \left\| y^{2\eta} \tfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right\|^2_{0,\, S_{ij}} \right] \leq Ch^4 \varepsilon^{-2},$$

donde la última desigualdad es una consecuencia de (4.6), (4.7) y la condición $\eta \geq \frac{3}{4}$. La desigualdad correspondiente

$$\left\| \frac{\partial(u - I_2 u)}{\partial y} \right\|^2_{0,\, S_{ij}} \leq C h^4 \varepsilon^{-2}$$

se obtiene de manera análoga, lo que permite concluir que

$$\varepsilon^2 \|\nabla(u - I_2 u)\|^2_{0,\, S_{ij}} \leq C h^4. \tag{4.23}$$

De forma similar, para el segundo término del lado derecho de (4.21), aplicando (4.14) y luego (4.6), junto con $\eta \geq \frac{3}{4}$, se obtiene

$$\|(u - I_2 u)\|^2_{0,\, S_{ij}} \leq C h^4 \left[\left\| x^{2\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|^2_{0,\, S_{ij}} + \left\| y^{2\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|^2_{0,\, S_{ij}} \right] \leq C h^4. \tag{4.24}$$

Finalmente, sumando las desigualdades (4.23) y (4.24) sobre los elementos $S_{ij} \in B_5$, se concluye que

$$\|u - I_2 u\|^2_{\varepsilon, B_5} \leq C h^4,$$

lo que finaliza la demostración.

□

La demostración del siguiente lema se obtiene siguiendo los mismos argumentos presentados en [18, Lema 4.2].

Lema 4.4 *Existe una constante C tal que, para todo $v \in V_N$,*

$$\|I_2 v\|_\varepsilon \leq C \|v\|_\varepsilon. \tag{4.25}$$

Teorema 4.1 *Sea u la solución de (4.1), $u_N \in V_N$ su aproximación por elementos finitos y $u_N^* = I_2 u_N$. Supongamos que $\frac{3}{4} \leq \eta < 1$. Entonces, existe una constante C tal que,*

$$\|u - u_N^*\|_\varepsilon \leq C h^2 \left(\log \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.26}$$

Demostración

Dado que $I_2 u_I = I_2 u$, se tiene

$$\|u - u_N^*\|_\varepsilon \leq \|u - I_2 u\|_\varepsilon + \|I_2(u_I - u_N)\|_\varepsilon,$$

y, combinando (4.13), (4.25) y (4.9), se concluye la demostración.

□

4.4. Ejemplo numérico

En esta sección proporcionamos un ejemplo numérico que confirma el resultado del Teorema 4.1, demostrando la convergencia robusta de la solución post–procesada para problemas de reacción–difusión con respecto al parámetro de perturbación singular.

Consideramos el problema de reacción–difusión singularmente perturbado

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega = (0,1)^2, \qquad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \tag{4.27}$$

donde f se elige de manera que la solución exacta sea

$$u(x,y) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right)\left(1 - y - \frac{e^{-\frac{y}{\varepsilon}} - e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{\frac{1}{\varepsilon}}}\right).$$

Observemos que este problema de prueba es el mismo que analizamos en el Ejemplo 2.2 del Capítulo 2. Como mencionamos, su solución presenta únicamente dos capas límite, una en $x = 0$ y otra en $y = 0$. Es interesante destacar que las estimaciones dadas por (4.4) y (4.5) son óptimas en las regiones influenciadas por las capas, mientras que la solución se suaviza alejándose de dichas zonas. Por tanto, este ejemplo resulta representativo para verificar los resultados del Teorema 4.1.

En la Figura 4.3 se muestra una representación de la solución obtenida para $\varepsilon = 10^{-4}$.

Para valores de ε entre 10^{-4} y 10^{-10}, calculamos la solución aproximada u_N del problema variacional discreto (4.8), como se describe en la Sección 4.2, utilizando mallas graduadas $\mathcal{T}_N$, con $N = 15, 30, 60, 120$. Luego, calculamos la solución post–procesada u_N^*, introducida en la Sección 4.3.

En la Figura 4.4 se representa (en escala logarítmica) el error $\|u - u_N^*\|_\varepsilon$ en función del número $2N$ de intervalos en las direcciones x e y, determinados por las mallas graduadas. Se observa que los errores son bastante similares para todos los valores del parámetro de perturbación. El orden de convergencia observado respecto de N es -2 (es decir, cuadrático

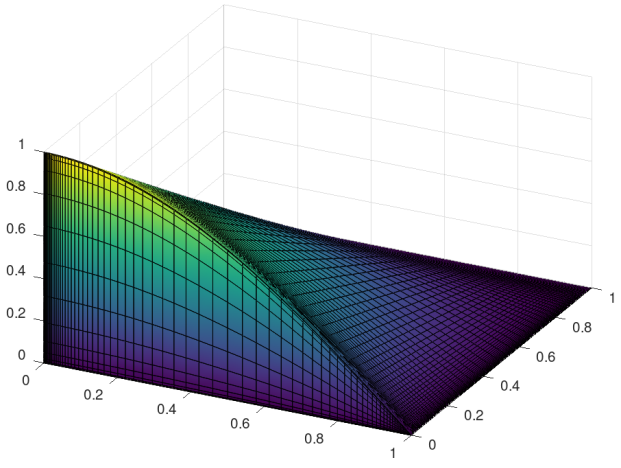


Figura 4.3: Solución típica del problema (4.27).

respecto de $h = \frac{1}{N}$), en concordancia con el Teorema 4.1.

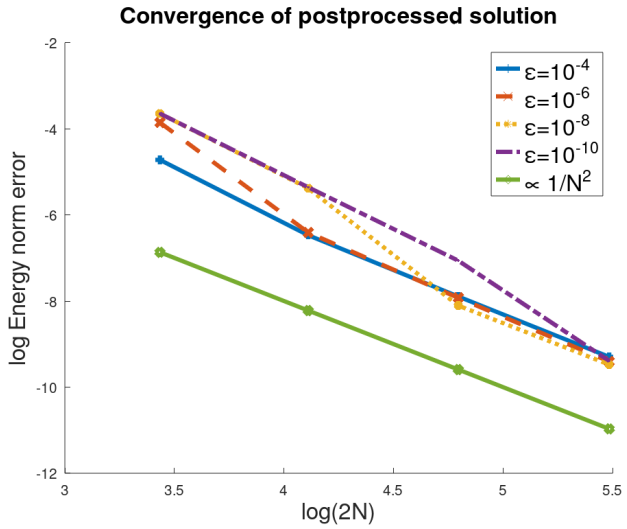


Figura 4.4: Superconvergencia en la norma de la energía de la solución post–procesada del problema (4.27).

Capítulo 5

Aplicación a la discretización de problemas fraccionarios

En este capítulo, estudiamos la aproximación mediante elementos finitos del problema de Dirichlet para potencias fraccionarias de un operador elíptico simétrico de segundo orden introducido en (1) de la Introducción.

En la primera sección formulamos el problema modelo y su discretización, basada en la extensión de Caffarelli–Silvestre, junto con algunos resultados auxiliares necesarios para el análisis posterior. A continuación, presentamos estimaciones del error correspondientes a la semidiscretización. A partir de las aproximaciones *superlineales* obtenidas en el capítulo anterior para cada uno de los problemas de reacción–difusión, establecemos nuestro resultado principal de estimación del error para la aproximación propuesta del problema (1), el cual se desarrolla en detalle en la Sección 5.3. Finalmente, en la Sección 5.4, se incluyen experimentos numéricos que validan los resultados teóricos presentados en la Sección 5.3.

5.1. El problema modelo

En esta sección, primero introducimos las potencias fraccionarias $\mathcal{L}^s$ y la extensión de Caffarelli–Silvestre, y luego describimos en detalle nuestra discretización propuesta, la cual se basa en la técnica de diagonalización introducida en [6].

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un número real $s \in (0,1)$, y una función f, recordemos que, como se mencionó en la Introducción, el problema modelo se formula de la siguiente

manera: hallar u tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^s u &= f, \qquad \text{en } \Omega, \\ u &= 0, \qquad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

y consideramos, por simplicidad, el caso en el que el operador $\mathcal{L}$ tiene la forma

$$\mathcal{L}v = -\Delta v + \bar{c}(x)v,$$

donde $\bar{c}(x) \in L^\infty(\Omega)$ es una función no negativa definida en Ω.

5.1.1. Potencias fraccionarias de operadores elípticos

La potencia fraccionaria $\mathcal{L}^s$, como se define en [6, 50], se construye siguiendo la teoría espectral. Consideremos la colección numerable de pares de autovalores y autofunciones $\{\lambda_k, \varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+ \times H_0^1(\Omega)$, asociada al problema

$$a_\Omega(\varphi, v) = \lambda(\varphi, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{5.1}$$

donde $a_\Omega(\cdot,\cdot)$ es el producto interno en $H_0^1(\Omega)$ inducido por $\mathcal{L}$, dado por

$$a_\Omega(w, v) = \int_\Omega (\nabla w \cdot \nabla v + \bar{c}(x)wv)\ dx, \tag{5.2}$$

y donde los valores propios λ_k son reales, positivos y están enumerados en orden creciente (considerando multiplicidades). Se asume que $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y una base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ con respecto al producto $a_\Omega(\cdot,\cdot)$.

Para $s \geq 0$, introducimos los espacios de Sobolev fraccionarios como

$$\mathbb{H}^s(\Omega) = \left\{ w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k\varphi_k :\ \|w\|^2_{\mathbb{H}^s(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s w_k^2 < \infty \right\},$$

mientras que $\mathbb{H}^{-s}(\Omega)$ denota el espacio dual de $\mathbb{H}^s(\Omega)$.

Se sabe que, para funciones de la forma

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k\varphi_k \in \mathbb{H}^1(\Omega),$$

el operador $\mathcal{L} : \mathbb{H}^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ se expresa como

$$\mathcal{L}w = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k w_k \varphi_k.$$

Entonces, para $s \in (0,1)$ y

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \varphi_k \in \mathbb{H}^s(\Omega),$$

el operador $\mathcal{L}^s : \mathbb{H}^s(\Omega) \to \mathbb{H}^{-s}(\Omega)$ se define naturalmente por

$$\mathcal{L}^s w = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s w_k \varphi_k.$$

5.1.2. El problema local extendido

Para lograr un esquema de discretización computacional eficiente, siguiendo [6], consideramos una estrategia propuesta por Caffarelli y Silvestre [12], posteriormente extendida por Cabré y Tan [11] y por Stinga y Torrea [58] a dominios acotados Ω, con el objetivo de localizar el problema. Esta estrategia consiste en resolver el siguiente problema de valores en la frontera, de tipo elíptico singular, planteado en el cilindro extendido $\mathcal{C} = \Omega \times (0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} -\text{div}\,(y^\alpha \nabla \mathcal{U}) + \bar{c}(x) y^\alpha \mathcal{U} &= 0, \qquad \text{en } \mathcal{C}, \\ \mathcal{U} &= 0, \qquad \text{en } \partial_L \mathcal{C}, \\ \partial_{\nu^\alpha} \mathcal{U} &= d_s f, \qquad \text{en } \Omega \times \{0\}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $\partial_L \mathcal{C} := \partial\Omega \times (0, \infty)$ denota la frontera lateral de $\mathcal{C}$, $d_s := 2^{1-2s} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} > 0$ es una constante de normalización, y $\alpha := 1 - 2s \in (-1, 1)$. La derivada conormal exterior de $\mathcal{U}$ sobre $\Omega \times \{0\}$ se define por

$$\partial_{\nu^\alpha} \mathcal{U} = - \lim_{y \to 0+} y^\alpha \partial_y \mathcal{U}. \tag{5.4}$$

Este límite se entiende en el sentido de las distribuciones [11, 12].

Para analizar el problema (5.3), es necesario introducir espacios funcionales adicionales. A lo largo del texto, denotaremos por $\bar{x} = (x, y) \in \mathcal{C}$ un punto tal que $x \in \Omega$ e $y > 0$. Si $D \subset \mathbb{R}^n$, escribiremos también $\bar{x} = (x, y) \in D$, donde y representa la última coordenada en $\mathbb{R}^n$.

Definimos el espacio de Lebesgue con peso $L^2(y^\alpha, D)$, asociado a la medida $|y|^\alpha\, dx$, y el correspondiente espacio de Sobolev con peso

$$H^1(y^\alpha, D) = \left\{ w \in L^2(y^\alpha, D) :\ |\nabla w| \in L^2(y^\alpha, D) \right\},$$

donde ∇w es el gradiente en sentido débil de w. Como un punto $\bar{x} = (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^n$, el operador gradiente se descompone como

$$\nabla = \nabla_{\bar{x}} = \left(\nabla_x, \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

donde ∇_x denota el gradiente con respecto a las variables espaciales $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, y $\partial/\partial y$ la derivada en la dirección extendida.

Equipamos $H^1(y^\alpha, D)$ con la norma

$$||w||_{H^1(y^\alpha, D)} = \left(||w||^2_{L^2(y^\alpha, D)} + ||\nabla w||^2_{L^2(y^\alpha, D)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.5}$$

Asimismo, definimos el subespacio de funciones con traza nula sobre la frontera lateral de $\mathcal{C}$ como

$$\overset{\circ}{H}{}^1(y^\alpha, \mathcal{C}) = \left\{ w \in H^1(y^\alpha, \mathcal{C}) :\ w = 0 \,\text{en}\, \partial_L \mathcal{C} \right\}, \tag{5.6}$$

y la forma bilineal $a_{\mathcal{C}} :\ \overset{\circ}{H}{}^1(y^\alpha, \mathcal{C}) \times \overset{\circ}{H}{}^1(y^\alpha, \mathcal{C}) \to \mathbb{R}$ definida por

$$a_{\mathcal{C}}(v, w) = \int_{\mathcal{C}} y^\alpha (\nabla v \cdot \nabla w + \bar{c}(x) v w)\, dx\, dy. \tag{5.7}$$

Como consecuencia de la desigualdad de Poincaré, se puede demostrar que $a_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva. En particular, induce un producto interno en $\overset{\circ}{H}{}^1(y^\alpha, \mathcal{C})$, lo que da lugar a la llamada norma de la energía, que denotamos por $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$:

$$\|v\|^2_{\mathcal{C}} := a_{\mathcal{C}}(v, v) \sim \|\nabla v\|^2_{L^2(y^\alpha, \mathcal{C})}. \tag{5.8}$$

La formulación débil del problema (5.3) se expresa del siguiente modo: hallar $\mathcal{U} \in \overset{\circ}{H}{}^1(y^\alpha, \mathcal{C})$ tal que

$$a_{\mathcal{C}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = d_s(f, tr\, \mathcal{V}), \quad \forall \mathcal{V} \in \overset{\circ}{H}{}^1(y^\alpha, \mathcal{C}), \tag{5.9}$$

donde $\operatorname{tr} \mathcal{V} = \mathcal{V}|_{\Omega \times \{0\}}$ representa la traza de $\mathcal{V}$ sobre Ω.

La conexión entre ambos problemas se establece mediante el siguiente resultado

fundamental (ver [11, Proposición 2.2] y [58, Teorema 1.1]): dada $f \in \mathbb{H}^{-s}(\Omega)$, sea $u \in \mathbb{H}^s(\Omega)$ la solución del problema (1). Si $\mathcal{U} \in \overset{\circ}{H}{}^1(y^\alpha, \mathcal{C})$ resuelve (5.3), entonces se cumple que

$$u = \operatorname{tr} \mathcal{U} \qquad \text{y} \qquad d_s \mathcal{L}^s u = \partial_{\nu^\alpha} \mathcal{U} \qquad \text{en } \Omega.$$

5.1.3. Semidiscretización del problema extendido

Sea $\mathcal{Y} > 0$ y $M \in \mathbb{N}$. Dada una partición $\mathcal{G}^M$ de $[0, \mathcal{Y}]$ en M subintervalos, en esta subsección definimos una aproximación semidiscreta $\mathcal{U}_M$ de la solución $\mathcal{U}$ de (5.9), donde $\mathcal{U}_M$ tiene soporte en el cilindro truncado $\mathcal{C}_\mathcal{Y} = \Omega \times (0, \mathcal{Y})$.

Sea $S^1_{\{\mathcal{Y}\}}\left((0,\mathcal{Y}), \mathcal{G}^M\right)$ el espacio de funciones continuas lineales a trozos definidas sobre $\mathcal{G}^M$ que se anulan en $y = \mathcal{Y}$. Consideramos el espacio

$$\mathbb{V}_M = H^1_0(\Omega) \otimes S^1_{\{\mathcal{Y}\}}\left((0,\mathcal{Y}), \mathcal{G}^M\right).$$

Las funciones en $\mathbb{V}_M$ pueden extenderse por cero a todo el cilindro $\mathcal{C}$, por lo que podemos considerar a $\mathbb{V}_M$ como un subespacio de $\overset{\circ}{H}{}^1(y^\alpha, \mathcal{C})$, es decir, $\mathbb{V}_M \subset \overset{\circ}{H}{}^1(y^\alpha, \mathcal{C})$. La aproximación $\mathcal{U}_M$ se obtiene como la solución del problema semidiscreto: hallar $\mathcal{U}_M \in \mathbb{V}_M$ tal que

$$a_\mathcal{C}(\mathcal{U}_M, \mathcal{V}) = d_s(f, \operatorname{tr} \mathcal{V}), \quad \forall \mathcal{V} \in \mathbb{V}_M. \tag{5.10}$$

Sea $\{(\mu_i, v_i)\}_{i=1}^M \subset \mathbb{R} \times S^1_{\{\mathcal{Y}\}}\left((0,\mathcal{Y}), \mathcal{G}^M\right) \setminus \{0\}$ el conjunto de pares de autovalores y autofunciones definidos por

$$\mu_i \int_0^\mathcal{Y} y^\alpha v_i'(y) w'(y)\, dy = \int_0^\mathcal{Y} y^\alpha v_i(y) w(y)\, dy, \quad \forall w \in S^1_{\{\mathcal{Y}\}}\left((0,\mathcal{Y}), \mathcal{G}^M\right),$$

donde los v_i están normalizados de modo que

$$\int_0^\mathcal{Y} y^\alpha v_i'(y) v_j'(y)\, dy = \delta_{ij}, \qquad \int_0^\mathcal{Y} y^\alpha v_i(y) v_j(y)\, dy = \mu_i \delta_{ij}.$$

Entonces, se puede verificar que $\mathcal{U}_M$ se escribe como

$$\mathcal{U}_M(x,y) = \sum_{i=1}^M U_i(x) v_i(y), \tag{5.11}$$

donde $U_i \in H^1_0(\Omega)$, $i = 1, \ldots, M$, son las soluciones de los problemas

$$\mu_i \left(\nabla U_i, \nabla V\right) + \left((1+\bar{c}(x))U_i, V\right) = d_s v_i(0)(f, V), \quad \forall V \in H_0^1(\Omega). \tag{5.12}$$

Los problemas (5.12) son de tipo reacción–difusión y se vuelven singularmente perturbados cuando los coeficientes de difusión, es decir, los autovalores μ_i, son pequeños. La magnitud de estos autovalores depende de la partición $\mathcal{G}^M$. En particular, para la partición que se introduce en la siguiente sección se cumplen las siguientes cotas superior e inferior: para $i = 1, \ldots, M$ se tiene

$$\mu_i \leq \mathcal{Y}^2 (1-\alpha^2)^{-1}, \tag{5.13}$$

y

$$\mu_i \gtrsim (\log M)^{-\alpha\sigma}\, l_{min}^2. \tag{5.14}$$

Aquí, l_{min} denota la longitud mínima de los intervalos en $\mathcal{G}^M$, y la constante involucrada depende únicamente de s. La estimación (5.13) se deduce de [6, Lema 18], mientras que remitimos a la Observación 5.3 más adelante para la demostración de (5.14).

Por lo tanto, si l_{min} es pequeño, se observa que varios de los problemas de reacción–difusión (5.12) pueden volverse singularmente perturbados.

5.1.4. La discretización completa

En esta subsección introducimos nuestra aproximación por elementos finitos, basada en la semidiscretización presentada previamente. A partir de ahora nos restringimos al caso $\Omega = (0,1)^2$.

Sea σ un parámetro que satisface

$$1 - s < \sigma < 1. \tag{5.15}$$

Fijado $M \in \mathbb{N}$, tomamos $\mathcal{Y} = c \log M$, donde la constante c será determinada más adelante. Definimos una partición $\mathcal{G}^M = \{I_i\}_{i=1}^M$ del intervalo $[0, \mathcal{Y}]$, donde $I_i = [y_{i-1}, y_i]$ con

$$y_i = \mathcal{Y}\left(\frac{i}{M}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad i = 0, \ldots, M. \tag{5.16}$$

Observación 5.1 *Los intervalos I_i, para $i = 2, \ldots, M$, de la partición $\mathcal{G}^M$ satisfacen la siguiente propiedad:*

$$|I_i| \leq C\mathcal{Y}\frac{1}{M}y^\sigma = C(\log M)\frac{1}{M}y^\sigma, \qquad \forall y \in I_i, \tag{5.17}$$

donde la constante $C > 0$ depende únicamente de s.

De hecho, para $i \geq 2$, existe algún $\zeta \in (i-1, i)$ tal que

$$\begin{aligned} y_i - y_{i-1} &= \left[\left(\frac{i}{M}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} - \left(\frac{i-1}{M}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\right]\mathcal{Y} \\ &= \frac{1}{1-\sigma}\left(\frac{\zeta}{M}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\frac{1}{M}\mathcal{Y}, \end{aligned}$$

donde el paso final se deduce del Teorema del Valor Medio aplicado a la función $t \mapsto t^{\frac{1}{1-\sigma}}$.

Ahora bien, observamos que

$$\left(\frac{\zeta}{M}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \left(\frac{i-1}{M}\right)^{\sigma}\left(\frac{\zeta}{i-1}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\left(\frac{M}{i-1}\right)^{-\frac{\sigma^2}{1-\sigma}}.$$

De aquí, usando que $\mathcal{Y} = c\log M$, que

$$\left(\frac{\zeta}{i-1}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \leq 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}, \qquad \left(\frac{M}{i-1}\right)^{-\frac{\sigma^2}{1-\sigma}} \leq 1,$$

y además que

$$\left(\frac{i-1}{M}\right)^{\sigma} \leq y^\sigma, \quad \forall y \in I_i,$$

concluimos que (5.17) es válida.

Observación 5.2 *Para $i \geq 2$, también se cumple*

$$y \leq C\,(\log M)^\sigma\, z, \quad \forall y, z \in I_i, \tag{5.18}$$

donde la constante $C > 0$ depende únicamente de s.

En efecto, a partir de (5.17) se deduce que

$$y_i \leq y_{i-1} + C\,(\log M)\,\frac{1}{M}y_{i-1}^\sigma.$$

Observamos que

$$y_{i-1} \geq y_1 = \mathcal{Y}\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

de donde se sigue que

$$y_{i-1}^{\sigma-1} \leq c(logM)^{\sigma-1}M.$$

Esto implica que

$$y_i \leq y_{i-1}\left(1 + C\left(\log M\right)^{\sigma}\right),$$

y por lo tanto, (5.18) *se deduce directamente.*

Una aproximación completamente discreta $\mathcal{U}_{M,N}$ de $\mathcal{U}_M$, definida en (5.11), se construye mediante la discretización por elementos finitos de los problemas (5.12).

Dado $N \in \mathbb{N}$ y un parámetro de graduación η que cumple

$$\frac{3}{4} \leq \eta < 1, \tag{5.19}$$

consideramos una malla graduada $\mathcal{T}_N$ en Ω, como se introdujo en la Sección 4.2. Específicamente, $\mathcal{T}_N = \{R_{ij}\}_{i,j=1}^{2N}$ es una partición de Ω en rectángulos de la forma

$$R_{ij} = (\xi_{i-1}, \xi_i) \times (\xi_{j-1}, \xi_j), \quad 1 \leq i, j \leq 2N,$$

donde los nodos $\{\xi_i\}_{i=0}^{2N}$ se definen mediante

$$\begin{cases} \xi_i = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{i}{N}\right)^{\frac{1}{1-\eta}}, & i = 0, \ldots, N, \\ \xi_i = 1 - \xi_{2N-i}, & i = N+1, \ldots, 2N. \end{cases}$$

Además, definimos $h_i := \xi_i - \xi_{i-1}$ y recordamos que se verifican las propiedadas enunciadas en la Observación 4.2, a saber:

$$h_i \leq C\frac{1}{N}x_1^{\eta}, \qquad h_j \leq C\frac{1}{N}x_2^{\eta}, \qquad \forall (x_1, x_2) \in R_{ij},$$

$$x_1 \leq Cw_1, \qquad x_2 \leq Cw_2, \qquad \forall (x_1, x_2), (w_1, w_2) \in R_{ij}$$

y

$$\frac{h_i}{h_{i+1}} \leq C, \quad \forall i = 0, \ldots, 2N-1,$$

donde C es una constante que depende únicamente del parámetro η.

Nuevamente, asociado con $\mathcal{T}_N$, consideramos el espacio estándar de elementos finitos bilineales a trozos

$$V_N = \{v \in H_0^1(\Omega) : v|_{R_{ij}} \in Q_1(R_{ij}), 1 \leq i, j \leq 2N\}. \tag{5.20}$$

Ahora podemos definir $U_{i,N}$, $i = 1, \ldots, M$, como las soluciones de los problemas: hallar $U_{i,N} \in V_N$ tal que

$$\mu_i \left(\nabla U_{i,N}, \nabla V\right) + \left((1 + \bar{c}(x))U_{i,N}, V\right) = d_s v_i(0)(f, V), \quad \forall V \in V_N. \tag{5.21}$$

Para cada $U_{i,N}$, definimos en la Sección 4.3 un post–procesamiento $U_{i,N}^*$ con mejores propiedades de aproximación. Luego, de manera similar a (5.11), definimos

$$\mathcal{U}_{M,N}(x, y) = \sum_{i=1}^{M} U_{i,N}^*(x) v_i(y), \tag{5.22}$$

y finalmente, la aproximación de u está dada por

$$u_{M,N}(x) = \operatorname{tr}\left(\mathcal{U}_{M,N}(x, y)\right) = \sum_{i=1}^{M} U_{i,N}^*(x) v_i(0). \tag{5.23}$$

Observación 5.3 *Con las definiciones introducidas en esta subsección, podemos probar* (5.14)*.*

Usando un argumento estándar de cambio de escala $y = |I_1|\hat{y}$ para mapear el intervalo $[0, 1]$ en I_1, y la equivalencia de normas para funciones lineales en I_1, obtenemos

$$\|v_i'\|_{L^2(y^\alpha, I_1)} \sim |I_1|^{-1} \|v_i\|_{L^2(y^\alpha, I_1)}$$

para las funciones propias v_i (definidas en la Subsección 5.1.3).

Usando otro argumento de escalado y la equivalencia (5.18) *en el intervalo I_i para $i \geq 2$, tenemos*

$$\|v_i'\|_{L^2(y^\alpha, I_i)} \sim (\log M)^{\frac{\alpha\sigma}{2}} |I_i|^{-1} \|v_i\|_{L^2(y^\alpha, I_i)}.$$

Por lo tanto, al elevar al cuadrado y sumar las desigualdades previas, obtenemos

$$\mu_i = \|v_i\|^2_{L^2(y^\alpha, (0, \mathcal{Y}))} \geq C \left(\log M\right)^{-\alpha\sigma} \left(\min |I_i|\right)^2 \|v_i'\|^2_{L^2(y^\alpha, I_i)}.$$

Teniendo en cuenta que $\|v_i'\|_{L^2(y^\alpha, I_i)} = 1$ y que $\min |I_i| = |I_1|$, resulta

$$\mu_i = \|v_i\|^2_{L^2(y^\alpha, (0, \mathcal{Y}))} \geq C \left(\log M\right)^{-\alpha\sigma} |I_1|^2,$$

lo que prueba (5.14).

Observación 5.4 *El factor $v_i(0)$, que aparece en el lado derecho del problema* (5.12) *y en su discretización* (5.21)*, puede ser acotado siguiendo [6, Lema 17]. Teniendo en cuenta que $v(\mathcal{Y}) = 0$ y que $\|v_i'\|_{L^2(y^\alpha,(0,\mathcal{Y}))} = 1$, se tiene*

$$\begin{aligned} |v_i(0)| &= \left| \int_0^{\mathcal{Y}} v_i'(y)\, dy \right| = \left| \int_0^{\mathcal{Y}} y^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot y^{\frac{\alpha}{2}} v_i'(y)\, dy \right| \\ &\leq \left(\int_0^{\mathcal{Y}} y^{-\alpha}\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\mathcal{Y}} y^{\alpha} |v_i'(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\mathcal{Y}} y^{-\alpha}\, dy \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

El último término es finito ya que $\alpha < 1$, y se puede calcular explícitamente como

$$\int_0^{\mathcal{Y}} y^{-\alpha}\, dy = \frac{\mathcal{Y}^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Por lo tanto, como $\mathcal{Y} = c \log M$, se deduce que

$$|v_i(0)| \leq \frac{\mathcal{Y}^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{2}}} \leq C(\log M)^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

donde la constante C depende de s y es independiente de M.

5.1.5. Algunas consideraciones preliminares para el análisis del error

La estimación del error comienza con la desigualdad de traza (ver [6, Subsección 2.2])

$$\|u - u_{M,N}\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)} \leq C_{tr} \|\mathcal{U} - \mathcal{U}_{M,N}\|_{\mathcal{C}},$$

y luego, aplicando la desigualdad triangular, se obtiene

$$\|u - u_{M,N}\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)} \leq C_{tr} \left(\|\mathcal{U} - \mathcal{U}_M\|_{\mathcal{C}} + \|\mathcal{U}_M - \mathcal{U}_{M,N}\|_{\mathcal{C}} \right). \tag{5.24}$$

En la Sección 5.2 obtendremos la estimación

$$\|\mathcal{U} - \mathcal{U}_M\|_{\mathcal{C}} \leq C \left(\log M\right)^m \frac{1}{M} \|f\|_0,$$

donde el exponente m será definido posteriormente.

Por otro lado, dado que

$$\mathcal{U}_M(x,y) - \mathcal{U}_{M,N}(x,y) = \sum_{i=1}^{M} \left(U_i(x) - U^*_{i,N}(x)\right) v_i(y),$$

se sigue de [6, ec. (6.5)] que

$$\|\mathcal{U}_M - \mathcal{U}_{M,N}\|^2_{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^{M} \|U_i - U^*_{i,N}\|^2_{\sqrt{\mu_i},\Omega}, \tag{5.25}$$

donde, siguiendo la notación de los capítulos anteriores, la norma $\|\cdot\|_{\sqrt{\mu_i},\Omega}$ es la norma de la energía asociada al problema (5.21):

$$\|v\|^2_{\sqrt{\mu_i},\Omega} = \|v\|^2_{\sqrt{\mu_i}} := \mu_i \|\nabla v\|^2_0 + \|(1+\bar{c}(x))^{\frac{1}{2}} v\|^2_0.$$

Observamos que, para obtener un orden lineal de convergencia en nuestra discretización, es necesario contar con estimaciones *superlineales* para las aproximaciones de los problemas de reacción–difusión (singularmente perturbados) que definen a U_i. En el Capítulo 4, vimos que esto puede lograrse si el parámetro η, que define las mallas graduadas, satisface la condición (5.19).

5.2. Análisis del error en el dominio extendido

En esta sección, estimamos el error de semidiscretización $\|\mathcal{U} - \mathcal{U}_M\|_{\mathcal{C}}$. Para ello, introducimos un operador de interpolación adecuado para funciones en $C^2([0,\mathcal{Y}], L^2(\Omega))$.

Sea X un espacio de Sobolev. Siguiendo [6], consideramos un operador de interpolación lineal a trozos, denotado por $\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}$, definido sobre una malla $\mathcal{G}^M$ en $[0,\mathcal{Y}]$, para funciones $v \in \mathcal{C}^2([0,\mathcal{Y}], X)$. Este operador se construye del siguiente modo: en el primer intervalo I_1, $\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} v$ interpola v en los puntos $y_1/2$ e y_1; en los intervalos I_i con $1 < i < M$, la interpolación se realiza en los nodos y_{i-1} e y_i; finalmente, en I_M, se interpola en y_{M-1} y se impone que la interpolación se anule en el extremo derecho, es decir, $\left(\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} v\right)(y_M) = 0$.

Además, definimos la función peso

$$\omega_{\theta,\gamma}(y) = y^\theta e^{\gamma y},$$

y utilizaremos de manera indistinta las notaciones y^α y $\omega_{\alpha,0}(y)$.

Dada una función $v \in L^2(I, X)$, donde X es un espacio de Hilbert e $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, definimos la norma con peso

$$\|v\|_{L^2(\omega_{\theta,\gamma},I;X)} = \left(\int_I \omega_{\theta,\gamma}(y)\|v(y)\|_X^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cuando no haya ambigüedad, omitiremos la notación del espacio X y escribiremos simplemente

$$\|v\|_{L^2(\omega_{\theta,\gamma},I)} := \|v\|_{L^2(\omega_{\theta,\gamma},I;X)}.$$

Si $\mathcal{V}(x, y)$ es una función definida para $x \in \Omega$ e $y \in I$, tal que para cada $y \in I$ se cumple $\mathcal{V}(\cdot, y) \in X$, definimos la norma con peso en el producto $\Omega \times I$ como

$$\|\mathcal{V}\|_{L^2(\omega_{\theta,\gamma},\Omega\times I)} := \left(\int_I \omega_{\theta,\gamma}(y)\|\mathcal{V}(\cdot, y)\|_X^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Necesitamos estimaciones del error de interpolación asociadas al operador $\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}$. En particular, consideramos las estimaciones locales clásicas

$$\begin{aligned} \left\|v - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}v\right\|_{L^2(\omega_{0,0},I_i)} &\leq C|I_i|\,\|v'\|_{L^2(\omega_{0,0},I_i)}, \\ \left\|(v - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}v)'\right\|_{L^2(\omega_{0,0},I_i)} &\leq C|I_i|\,\|v''\|_{L^2(\omega_{0,0},I_i)}, \end{aligned} \tag{5.26}$$

válidas en cada subintervalo I_i, para funciones $v \in H^1(I, X)$ y $v \in H^2(I, X)$, respectivamente.

En el intervalo I_1, utilizamos estimaciones de error con peso, dadas por

$$\begin{aligned} \left\|v - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}v\right\|_{L^2(\omega_{\alpha,0},I_1)} &\leq C|I_1|^{\beta}\,\|v'\|_{L^2(\omega_{\alpha+2-2\beta,0},I_1)}, \\ \left\|(v - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}v)'\right\|_{L^2(\omega_{\alpha,0},I_1)} &\leq C|I_i|^{\beta}\,\|v''\|_{L^2(\omega_{\alpha+2-2\beta,0},I_1)}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

las cuales se encuentran demostradas en [6, ecs. (A.6) y (A.4)].

Según [6, ec. (6.10)], la función $\mathcal{U}$ pertenece a los espacios $C^2([0, \mathcal{Y}], L^2(\Omega)) \cap C^2([0, \mathcal{Y}], H^1_0(\Omega))$, lo que justifica considerar su interpolación $\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U}$.

En la demostración del próximo resultado, utilizaremos las siguientes estimaciones para $\mathcal{U}$, extraídas de [6, Teorema 1]. Sea $\gamma > 0$ tal que $\gamma < 2\sqrt{\lambda_1}$, donde λ_1 es el primer autovalor

del problema (5.1). Entonces, se verifica que

$$\begin{aligned} \|\partial_y \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha-2\tilde{\nu},\gamma},\mathcal{C})} &\leq C\|f\|_{\mathbb{H}^{-s+\tilde{\nu}}(\Omega)}, \\ \|\partial_y^2 \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2-2\tilde{\nu},\gamma},\mathcal{C})} &\leq C\|f\|_{\mathbb{H}^{-s+\tilde{\nu}}(\Omega)}, \\ \|\partial_y \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2-2\nu,\gamma},\mathcal{C})} &\leq C\|f\|_{\mathbb{H}^{-s+\nu}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{5.28}$$

donde $0 \leq \tilde{\nu} < s = (1-\alpha)/2$ y $0 \leq \nu < 1+s$.

Proposición 5.1 *Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$. Consideramos la aproximación $\mathcal{U}_M$, definida en* (5.10)*, con soporte en el cilindro truncado $\mathcal{C}_\mathcal{Y}$. Esta aproximación se construye utilizando la malla $\mathcal{G}^M$ del intervalo $[0,\mathcal{Y}]$, definida en* (5.16)*, donde $\mathcal{Y} = c\log M$ con $c > \frac{3}{\gamma}$. Entonces, se verifica la siguiente estimación de error:*

$$\|\mathcal{U} - \mathcal{U}_M\|_\mathcal{C} \leq C(\log M)^{\frac{3+\alpha\sigma}{2}} \frac{1}{M}\|f\|_0, \tag{5.29}$$

donde C es una constante que depende únicamente del parámetro s.

Demostración

A partir de la ortogonalidad de Galerkin, se obtiene

$$\|\mathcal{U} - \mathcal{U}_M\|_\mathcal{C} \leq \left\|\mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U}\right\|_\mathcal{C}. \tag{5.30}$$

Por la desigualdad de Poincaré [6, inec. (2.7)] para funciones en $\overset{\circ}{H}{}^1(y^\alpha,\Omega)$, la seminorma $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(y^\alpha,\mathcal{C})}$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\mathcal{C}$. Por lo tanto,

$$\|\mathcal{U} - \mathcal{U}_M\|_\mathcal{C} \lesssim \left\|\nabla\left(\mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U}\right)\right\|_{L^2(y^\alpha,\mathcal{C})}.$$

Como $\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U}$ se anula fuera de $\mathcal{C}_\mathcal{Y}$, se deduce que

$$\left\|\nabla\left(\mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U}\right)\right\|_{L^2(y^\alpha,\mathcal{C})} \leq \left\|\nabla\left(\mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U}\right)\right\|_{L^2(y^\alpha,\mathcal{C}_\mathcal{Y})} + \|\nabla\mathcal{U}\|_{L^2(y^\alpha,\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})}. \tag{5.31}$$

De acuerdo con [6, ec. (5.8)], el segundo término en el lado derecho de (5.31) es exponencialmente pequeño en $\mathcal{Y}$, específicamente,

$$\|\nabla\mathcal{U}\|_{L^2(y^\alpha,\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})} \lesssim e^{-\gamma\mathcal{Y}/2}\|f\|_{H^{-s}(\Omega)}.$$

Además, como

$$\mathcal{Y} = c \log M,$$

con $c \geq 2/\gamma$, entonces

$$\|\nabla \mathcal{U}\|_{L^2(y^\alpha, \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\mathcal{Y})} \lesssim \frac{1}{M} \|f\|_{H^{-s}(\Omega)}. \tag{5.32}$$

Pasamos ahora a estimar el primer término del lado derecho de (5.31). Se tiene

$$\begin{aligned} &\|\nabla(\mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} \mathcal{U})\|_{L^2(y^\alpha, \mathcal{C}_\mathcal{Y})} \\ &\quad \leq \|\nabla_x \mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(y^\alpha, \mathcal{C}_\mathcal{Y})} + \|\partial_y (\mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} \mathcal{U})\|_{L^2(y^\alpha, \mathcal{C}_\mathcal{Y})} \\ &\quad =: A + B, \end{aligned} \tag{5.33}$$

donde usamos que $\nabla_x \left(\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} \mathcal{U} \right) = \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} \left(\nabla_x \mathcal{U} \right)$.

Empezamos por estimar el término A. En I_1, al aplicar la primera desigualdad de (5.27) con $v = \nabla_x \mathcal{U}$, obtenemos

$$\|\nabla_x \mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(y^\alpha, I_1)} \leq C |I_1|^\beta \|\partial_y \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2-2\beta,0}, I_1)}$$

para $\beta \geq 0$. Tomando $\beta = 1 - \sigma$ y observando que

$$|I_1| = c \log(M) \left(\frac{1}{M} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

se deduce

$$\|\nabla_x \mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(y^\alpha, I_1)} \leq C (\log M)^{1-\sigma} \frac{1}{M} \|\partial_y \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0}, I_1)}. \tag{5.34}$$

Para los intervalos $I_i, i = 2, \ldots, M-1$, por (5.26) y las propiedades de la malla, se tiene

$$\|\nabla_x \mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} \nabla_x \mathcal{U}\|_{0, I_i} \leq C |I_i| \|\partial_y \nabla_x \mathcal{U}\|_{0, I_i},$$

y, teniendo en cuenta (5.17) y (5.18), se obtiene

$$\|\nabla_x \mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}} \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(y^\alpha, I_i)} \leq C \left(\log M \right)^{1 + \frac{\sigma\alpha}{2}} \frac{1}{M} \|\partial_y \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0}, I_i)}.$$

Para I_M, si π^1_y denota el interpolante definido de manera análoga a $\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}$ pero sin

imponer que se anule en y_M (esto es, $\pi^1_y(v)(y_M) = v(y_M)$), se tiene

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla_x \mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\nabla_x \mathcal{U}\right\|_{L^2(y^\alpha, I_M)}\\ &\quad\leq \left\|\nabla_x \mathcal{U} - \pi^1_y \nabla_x \mathcal{U}\right\|_{L^2(y^\alpha, I_M)} + \left\|\left(\pi^1_y - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\right)\nabla_x \mathcal{U}\right\|_{L^2(y^\alpha, I_M)}.\end{aligned} \tag{5.35}$$

El primer término se estima como antes, y para el segundo se usa la linealidad en y, obteniendo

$$\begin{aligned}&\left\|\nabla_x \mathcal{U} - \pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\nabla_x \mathcal{U}\right\|_{L^2(y^\alpha, I_M)}\\ &\quad\leq C\left(\log M\right)^{1+\frac{\sigma\alpha}{2}} \frac{1}{M}\|\partial_y \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0}, I_M)} + \left(\log M\right)^{\frac{\alpha}{2}} |I_M|^{\frac{1}{2}}\|\nabla_x \mathcal{U}(\cdot, \mathcal{Y})\|_0.\end{aligned} \tag{5.36}$$

Aplicando [6, ec. (A.10) y Lema 16], se concluye

$$\|\nabla_x \mathcal{U}(\cdot, \mathcal{Y})\|_0 \leq \mathcal{Y}^{-\frac{\alpha}{2}-1+\beta} e^{-\mathcal{Y}\gamma/2}\|\partial_y \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2-2\beta,\gamma}, \mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})}.$$

Dado que $|I_M| \leq C(\log M)\frac{1}{M}\mathcal{Y}^\sigma$, se obtiene

$$\begin{aligned}&\left(\log M\right)^{\frac{\alpha}{2}} |I_M|^{\frac{1}{2}}\|\nabla_x \mathcal{U}(\cdot, \mathcal{Y})\|_0\\ &\quad\leq C\left(\log M\right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}^{-\frac{\alpha}{2}-1+\beta+\frac{\sigma}{2}} e^{-\mathcal{Y}\gamma/2}\|\partial_y \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2-2\beta,\gamma}, \mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})}.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Tomando nuevamente $\beta = 1 - \sigma$, y dado que

$$\text{máx}\left\{1-\sigma,\, 1+\frac{\sigma\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}\right\} = 1 + \frac{\sigma\alpha}{2},$$

combinando (5.34)-(5.37) se concluye que

$$\begin{aligned}A \leq C(\log M)^{1+\frac{\sigma\alpha}{2}} \Bigg[&\frac{1}{M}\|\partial_y \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0}, \mathcal{C}_\mathcal{Y})}\\ &+ \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}^{-\frac{\alpha+\sigma}{2}} e^{-\mathcal{Y}\gamma/2}\|\partial_y \nabla_x \mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,\gamma}, \mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})}\Bigg].\end{aligned} \tag{5.38}$$

Finalmente, estimamos el término B de (5.33). Usando la segunda desigualdad en

(5.27), se tiene

$$\begin{aligned}\|\partial_y(\mathcal{U}-\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U})\|_{L^2(y^\alpha,\mathcal{C}_\mathcal{Y})} &\leq |I_1|^\beta\|\partial_y^2\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2-2\beta,0},I_1)}\\ &\leq C(\log M)^{1-\sigma}\tfrac{1}{M}\|\partial_y^2\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0},I_1)},\end{aligned} \tag{5.39}$$

si $\beta = 1-\sigma$. Para $I_i, i = 2,\ldots,M-1$, usando nuevamente las estimaciones estándar del error (5.26) y las propiedades (5.17)–(5.18) de $\mathcal{G}^M$, se deduce que

$$\|\partial_y(\mathcal{U}-\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U})\|_{L^2(y^\alpha,I_i)} \leq C\,(\log M)^{1+\frac{\sigma\alpha}{2}}\,\frac{1}{M}\|\partial_y^2\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0},I_i)}. \tag{5.40}$$

Para el intervalo I_M, de manera análoga al caso del término A, escribimos

$$\begin{aligned}&\|\partial_y(\mathcal{U}-\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U})\|_{L^2(y^\alpha,I_M)}\\ &\quad\leq \|\partial_y(\mathcal{U}-\pi^1_y\mathcal{U})\|_{L^2(y^\alpha,I_M)} + \left\|\partial_y\left[\left(\pi^1_y-\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\right)\mathcal{U}\right]\right\|_{L^2(y^\alpha,I_M)}.\end{aligned}$$

El primer término se estima como antes, obteniendo

$$\|\partial_y(\mathcal{U}-\pi^1_y\mathcal{U})\|_{L^2(y^\alpha,I_M)} \leq C\,(\log M)^{1+\frac{\sigma\alpha}{2}}\,\frac{1}{M}\|\partial_y^2\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0},I_M)}.$$

Para el segundo, dado que $\pi^1_y - \pi^1_{y,\mathcal{Y}}$ es lineal en y, se puede escribir

$$\left\|\partial_y\left[\left(\pi^1_y-\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\right)\mathcal{U}\right]\right\|_{L^2(y^\alpha,I_M)} \leq C\,(\log M)^{\frac{\alpha}{2}}\,|I_M|^{-\frac{1}{2}}\|\mathcal{U}(\cdot,\mathcal{Y})\|_{0,\Omega}.$$

Y por [6, ec. (A.10) y Lema 16], se concluye

$$\|\mathcal{U}(\cdot,\mathcal{Y})\|_0 \leq \mathcal{Y}^{-\frac{\alpha}{2}-1+\beta}e^{-\mathcal{Y}\gamma/2}\|\partial_y\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2-2\beta,\gamma},\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})}.$$

Entonces, usando la cota para $|I_M|$ como antes, obtenemos

$$\begin{aligned}&(\log M)^{\frac{\alpha}{2}}\,|I_M|^{-\frac{1}{2}}\|\mathcal{U}(\cdot,\mathcal{Y})\|_0\\ &\qquad\leq C(\log M)^{\frac{1+\alpha}{2}}\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{Y}^{-\frac{\alpha}{2}-1+\beta}e^{-\mathcal{Y}\gamma/2}\|\partial_y\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2-2\beta,\gamma},\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})}.\end{aligned} \tag{5.41}$$

Tomando nuevamente $\beta = 1-\sigma$, y combinando las estimaciones (5.39)–(5.41), se

concluye que

$$B \leq C\,(\log M)^{1+\frac{\sigma\alpha}{2}}\,\frac{1}{M}\|\partial_y^2\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0},\mathcal{C}_\mathcal{Y})} + C\,(\log M)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{M}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{Y}^{-\frac{\alpha}{2}-\sigma}e^{-\mathcal{Y}\gamma/2}\|\partial_y\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,\gamma},\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})}. \quad (5.42)$$

Finalmente, sustituyendo (5.38) y (5.42) en (5.33), obtenemos

$$\begin{aligned}\|\nabla(\mathcal{U}-\pi^1_{y,\mathcal{Y}}\mathcal{U})\|_{L^2(y^\alpha,\mathcal{C}_\mathcal{Y})} &\leq C(\log M)^{1+\frac{\alpha\sigma}{2}}\left[\frac{1}{M}\|\partial_y\nabla_{x'}\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0},\mathcal{C}_\mathcal{Y})}+\frac{1}{M}\|\partial_y^2\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0},\mathcal{C}_\mathcal{Y})}\right.\\ &\quad+\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{Y}^{-\frac{\alpha+\sigma}{2}}e^{-\mathcal{Y}\gamma/2}\|\partial_y\nabla_{x'}\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,\gamma},\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})}\\ &\quad\left.+\left(\frac{1}{M}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{Y}^{-\frac{\alpha}{2}-\sigma}e^{-\mathcal{Y}\gamma/2}\|\partial_y\mathcal{U}\|_{\omega_{\alpha+2\sigma,\gamma},\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y}}\right] \quad (5.43)\end{aligned}$$

Dado que tomamos un parámetro σ que satisface (5.15), es decir,

$$\frac{\alpha+1}{2}<\sigma<1,$$

entonces, a partir del resultado (5.28), se deduce que

$$\begin{aligned}\|\partial_y^2\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0},\mathcal{C}_\mathcal{Y})} &\lesssim \|f\|_{-s+1-\sigma}\leq\|f\|_0,\\ \|\partial_y\nabla_x\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,\gamma},\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})} &\lesssim \|f\|_{-s+1-\sigma}\leq\|f\|_0,\\ \|\partial_y\nabla_x\mathcal{U}\|_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,0},\mathcal{C}_\mathcal{Y})} &\lesssim \|f\|_{-s+1-\sigma}\leq\|f\|_0.\end{aligned}$$

Además, dado que existe una constante $\gamma_0>0$ tal que se cumple la desigualdad $y^{2\sigma}\leq Ce^{\gamma_0 y}$ para todo $y\geq 1$, también se obtiene que

$$\begin{aligned}\|\partial_y\mathcal{U}\|^2_{L^2(\omega_{\alpha+2\sigma,\gamma},\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_\mathcal{Y})} &= \int_\mathcal{Y}^\infty \|\partial_y\mathcal{U}\|_0^2\,y^{\alpha+2\sigma}e^{\gamma y}\,dy\\ &\lesssim \int_\mathcal{Y}^\infty \|\partial_y\mathcal{U}\|_0^2\,y^{\alpha}e^{(\gamma+\gamma_0)y}\,dy\lesssim\|f\|^2_{-s}\leq\|f\|_0^2,\end{aligned}$$

si γ_0 se elige de forma tal que $0\leq\gamma+\gamma_0<2\sqrt{\lambda_1}$. A partir de (5.43), se sigue

entonces que

$$\|\nabla(\mathcal{U}-\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U})\|_{L^2(y^\alpha,\mathcal{C}_\mathcal{Y})}$$
$$\leq C(\log M)^{1+\frac{\alpha\sigma}{2}}\left\{\frac{1}{M}+\left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{Y}^{-\frac{\alpha+\sigma}{2}}e^{-\mathcal{Y}\gamma/2}+\left(\frac{1}{M}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{Y}^{-\frac{\alpha}{2}-\sigma}e^{-\mathcal{Y}\gamma/2}\right\}\|f\|_0.$$

Ahora, al considerar $\mathcal{Y}=c\log M$ con $c>\frac{3}{\gamma}$, se obtiene

$$\|\nabla(\mathcal{U}-\pi^1_{y,\{\mathcal{Y}\}}\mathcal{U})\|_{L^2(y^\alpha,\mathcal{C}_\mathcal{Y})}\leq C(\log M)^{\frac{3+\alpha\sigma}{2}}\frac{1}{M}\|f\|_0. \tag{5.44}$$

Finalmente, al combinar la desigualdad (5.31) con (5.32) y (5.44), se concluye el resultado esperado.

□

Observación 5.5 *Bajo las hipótesis de regularidad y la condición de compatibilidad asumidas sobre f, las estimaciones* (4.4), (4.5), (4.6) *y* (4.7) *del Capítulo 4 también se verifican en el caso no singularmente perturbado, es decir, cuando ε toma valores moderados. En consecuencia, el resultado de superconvergencia establecido en el Teorema 4.1 se mantiene válido en dicho caso. Utilizaremos este hecho en la próxima sección para derivar nuestro resultado principal.*

5.3. Estimación del error en Ω

Recordemos las funciones $U_i\in H^1_0(\Omega)$, asociadas a los valores propios μ_i, que son soluciones de los problemas variacionales (5.12), y sus aproximaciones $U_{i,N}\in V_N$ mediante funciones bilineales a trozos, introducidas en (5.21), donde el espacio V_N está definido en (5.20). Denotamos por $U^*_{i,N}$ la solución post–procesada de $U_{i,N}$, introducida en el Capítulo 4. De acuerdo con el Teorema 4.1, tomando $\varepsilon=\sqrt{\mu_i}$ y $h=1/N$, se cumple que

$$\left\|U_i-U^*_{i,N}\right\|_{\sqrt{\mu_i}}\leq C\frac{1}{N^2}\left|\log\mu_i\right|^{\frac{1}{2}}(\log M)^s\,, \tag{5.45}$$

donde la constante C depende de f y de s, pero es independiente de N, M y μ_i. En esta estimación se ha utilizado la cota $|v_i(0)|\leq(\log M)^s$ obtenida en la Observación 5.4.

A continuación, elegimos $N=M^{\frac{3}{4}}$. Sustituyendo (5.29) (incorporando $\|f\|_0$ en la

constante C), y (5.25) en (5.24), y empleando (5.45) para $i = 1, 2, \ldots, M$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u - u_{M,N}\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)} &\lesssim (\log M)^{\frac{3+\sigma\alpha}{2}}\, M^{-1} + \left(\sum_{i=1}^{M} |\log \mu_i| (\log M)^{2s} N^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C M^{-1} \left[(\log M)^{\frac{3+\sigma\alpha}{2}} + (\log M)^{s} \left(\max_{1\leq i\leq M} |\log \mu_i|\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C M^{-1} \left[(\log M)^{\frac{3+\sigma\alpha}{2}} + (\log M)^{\frac{1}{2}+s}\right] \\
&\leq C M^{-1} (\log M)^{\max\left(\frac{3+\sigma\alpha}{2}, \frac{1}{2}+s\right)},
\end{aligned} \tag{5.46}$$

donde hemos utilizado que, en virtud de las cotas superior e inferior para los valores propios μ_i dadas en (5.13) y (5.14), se cumple

$$\max_{1\leq i\leq M} |\log \mu_i| \leq C \log M.$$

De este modo, queda demostrado el teorema principal de este capítulo, que enunciamos a continuación.

Teorema 5.1 *Sea f una función de clase $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ que satisface la condición de compatibilidad* (4.3)*, con $\Omega = (0,1)^2$. Sea $s \in (0,1)$ y u la solución del problema* (1)*. Dado $M \in \mathbb{N}$, fijamos $N = M^{\frac{3}{4}}$. Consideramos la aproximación $u_{M,N}$ definida en* (5.23)*, construida sobre la malla $\mathcal{G}^M$ introducida en la Sección 5.1.4, donde el parámetro σ satisface* (5.15)*, y la malla graduada $\mathcal{T}_N$, definida con el parámetro η que verifica* (5.19)*. Entonces, existe una constante C, que depende únicamente de s y de f, tal que*

$$\|u - u_{M,N}\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)} \leq C (\log M)^t\, M^{-1}, \tag{5.47}$$

con $t = \max\left(\frac{3+\sigma\alpha}{2}, \frac{1}{2} + s\right)$.

Podemos reescribir este resultado en función del número total de grados de libertad, denotado por N_{dof}. Observemos que nuestra discretización requiere resolver M problemas de reacción–difusión, cada uno de ellos con $O(N^2)$ grados de libertad. Por lo tanto, se tiene que $N_{dof} \sim M^{\frac{5}{2}}$. De este modo, la estimación (5.47) puede expresarse como

$$\|u - u_{M,N}\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)} \leq C (\log N_{dof})^t\, N_{dof}^{-\frac{2}{5}}.$$

Este orden de convergencia es subóptimo, ya que, para un problema regular en dimensión dos, se esperaría un error de orden $N_{dof}^{-\frac{1}{2}}$. No obstante, es ligeramente superior al resultado

obtenido en [6, Teorema 3], donde además se asume una condición de compatibilidad en la frontera más restrictiva sobre f.

5.4. Ejemplos numéricos

En esta sección presentamos ejemplos numéricos que validan los resultados teóricos del Teorema 5.1 respecto de la aproximación del problema (1).

Con este objetivo, aproximamos la solución del problema

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s u &= f \qquad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.48}$$

en dos ejemplos. Los cálculos fueron implementados utilizando GNU Octave [21]. Los problemas de autovalores de la Subsección 5.1.3 se resolvieron empleando el comando `eig`, mientras que los problemas lineales (5.21) se resolvieron utilizando el operador *backslash* "\"de Octave. Teniendo en cuenta la simetría de los problemas, los errores se calcularon sobre el subdominio $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ en el caso unidimensional y sobre $\left(0, \frac{1}{2}\right)^2$ en los casos bidimensionales.

Siguiendo [6], para medir el error en la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)}$, lo estimamos mediante

$$\int_\Omega |f(u - u_{M,N})| \, dx$$

ya que

$$\|u - u_{M,N}\|^2_{\mathbb{H}^s(\Omega)} \lesssim \|\nabla(\mathcal{U} - \mathcal{U}_{M,N})\|^2_{L^2(y^\alpha, \mathcal{C})} = d_s \int_\Omega f(u - u_{M,N}) \, dx.$$

Ejemplo 5.1 *Consideramos el problema* (5.48) *con* $\Omega = (0,1)^2$ *y*

$$f(x,y) = (x+y)(x+y-2)((x-y)^2 - 1).$$

Para los exponentes $s = 0{,}25$ *y* $s = 0{,}75$*, aproximamos el problema según lo indicado en la Subsección 5.1.4, utilizando los siguientes parámetros*

- $\sigma = \frac{1-0{,}9s}{1+0{,}1s}$*, lo que implica que* $\frac{1}{1-\sigma} = \frac{1}{s} + 0{,}1$*,*
- $\mathcal{Y} = 2 \log M$*,*
- η *toma valores en* $\{0{,}8; 0{,}85; 0{,}9\}$*,*

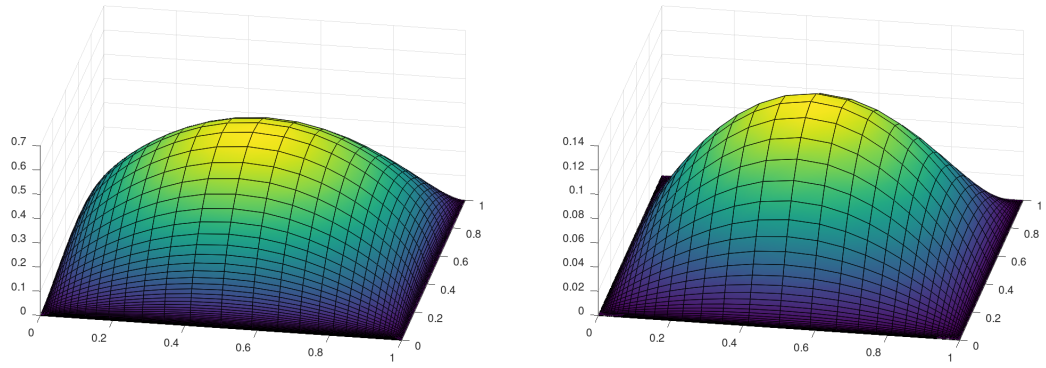


Figura 5.1: Soluciones numéricas para el Ejemplo 5.1 con $s = 0{,}25$ (izquierda) y $s = 0{,}75$ (derecha).

N	$s = 0{,}25$		$s = 0{,}75$	
	l_{min}	μ_{min}	l_{min}	μ_{min}
2^4	6.4124e-05	9.0244e-10	0.10423	0.001577
2^5	4.6742e-06	4.795e-12	0.048244	0.00033782
2^6	3.2709e-07	2.3481e-14	0.021436	6.6696e-05
2^7	2.2253e-08	1.0868e-16	0.0092602	1.2446e-05
2^8	1.4831e-09	4.8272e-19	0.0039186	2.2288e-06
2^9	9.7295e-11	2.0776e-21	0.0016323	3.8675e-07

Tabla 5.1: Valores de l_{min} y μ_{min} para los datos del Ejemplo 5.1.

- *M se elige como $M = 2^i$, con $i = 4, 5, \ldots, 9$.*

Dado que no se conocen las soluciones exactas, los errores numéricos se estimaron comparando con una solución obtenida para el mayor valor de $M = 1024$.

En la Figura 5.1 se muestran representaciones gráficas de las soluciones obtenidas para $M = 256$. En la Figura 5.2 se representa el error estimado en la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)}$ en función de M, en escala logarítmica. Se observa un orden de convergencia cercano a 1, lo que confirma los resultados del Teorema 5.1.

Además, con el objetivo de verificar que algunos de los problemas (5.12) *se convierten en problemas singularmente perturbados, reportamos en la Tabla 5.1 los valores de l_{min} (definido en la Subsección 5.1.3) y $\mu_{min} := \min\{\mu_i : i = 1, \ldots, M\}$.*

Ejemplo 5.2 *En este ejemplo, consideramos una función f en el término del lado derecho que no satisface la condición de compatibilidad* (4.3)*. Analizamos dos casos:*

- *Caso unidimensional: $\Omega = (0, 1)$, $f(x) = 1$,*

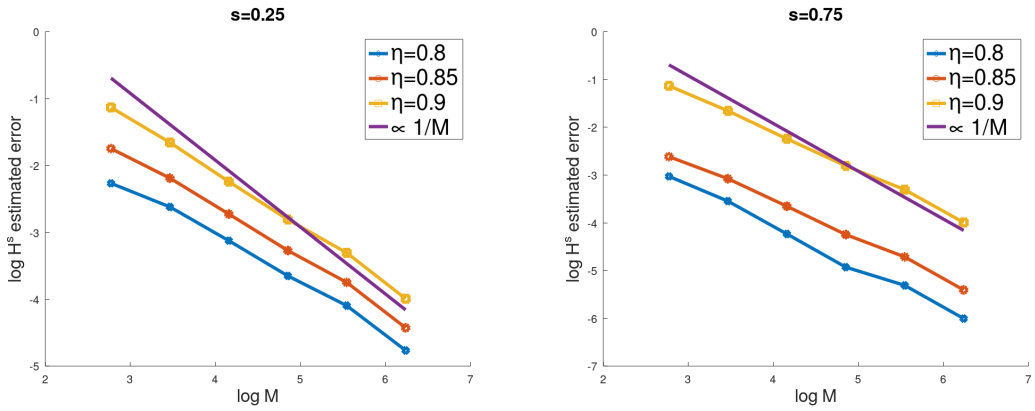


Figura 5.2: Errores numéricos para el Ejemplo 5.1.

- *Caso bidimensional:* $\Omega = (0,1)^2$, $f(x,y) = 1$.

Las Figuras 5.3 y 5.4 muestran las soluciones numéricas obtenidas para $M = 256$.

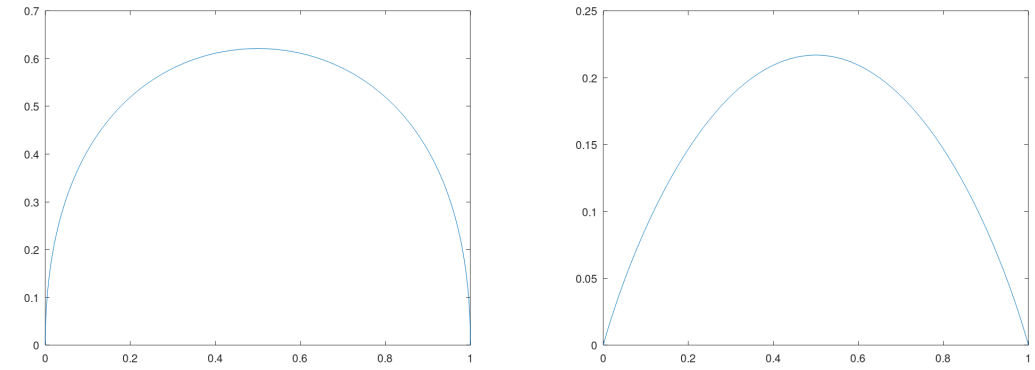


Figura 5.3: Soluciones numéricas para el Ejemplo 5.2, caso unidimensional, con $s = 0{,}25$ (izquierda) y $s = 0{,}75$ (derecha).

En las Figuras 5.5 y 5.6 se representa el error estimado en la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^s(\Omega)}$ *en función de* M*, en escala logarítmica. Observamos que, aunque este ejemplo no está cubierto por la teoría desarrollada, los resultados numéricos son consistentes con el Teorema 5.1.*

En la Figura 5.7 también se muestran los errores obtenidos al utilizar mallas uniformes para la discretización del problema de reacción–difusión singularmente perturbado en el caso bidimensional, con la misma cantidad de elementos que en el caso correspondiente con mallas graduadas. En este sentido, se observa que el orden de convergencia se ve reducido, acercándose a $\frac{1}{2}$.

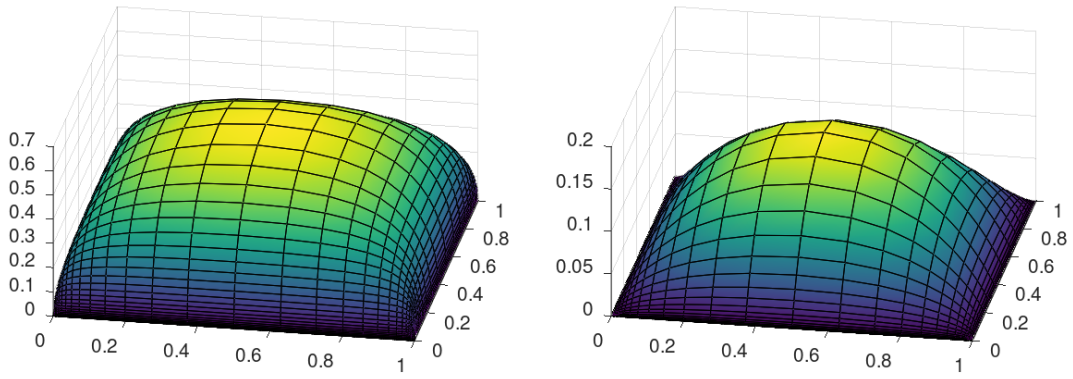


Figura 5.4: Soluciones numéricas para el Ejemplo 5.2, caso bidimensional, con $s = 0{,}25$ (izquierda) y $s = 0{,}75$ (derecha).

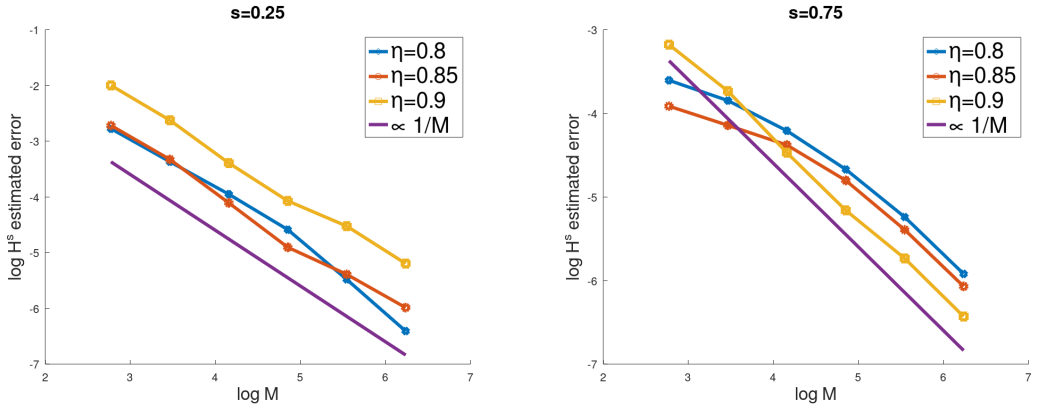


Figura 5.5: Errores numéricos para el Ejemplo 5.2, caso unidimensional.

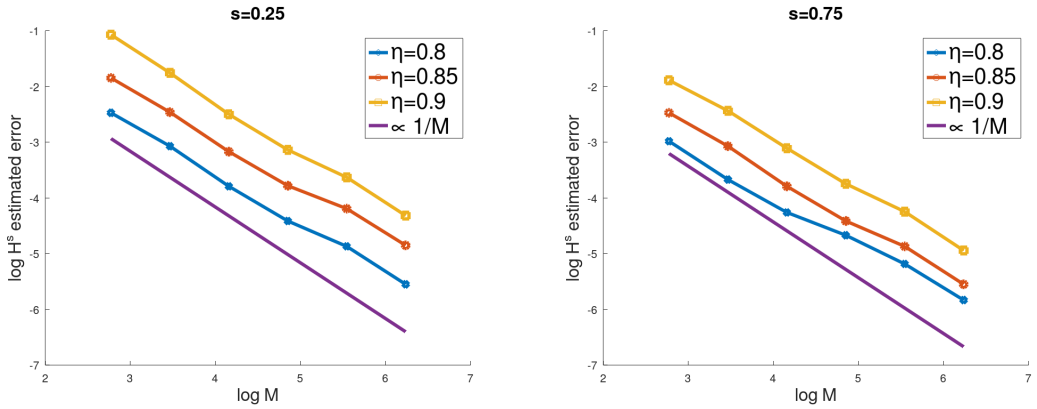


Figura 5.6: Errores numéricos para el Ejemplo 5.2, caso bidimensional.

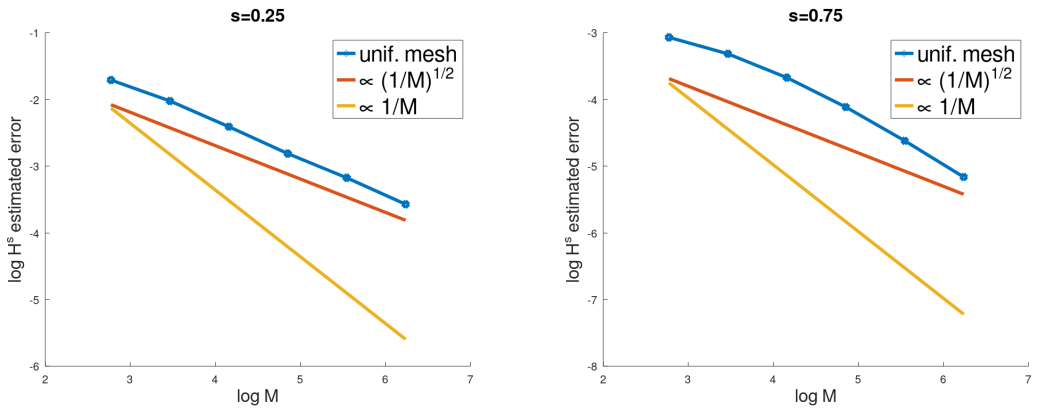


Figura 5.7: Errores numéricos para el Ejemplo 5.2, caso bidimensional, utilizando particiones uniformes en Ω.

Conclusiones

En este capítulo, compartimos algunas conclusiones de esta tesis y proponemos posibles líneas de investigación futura, con el objetivo de ampliar y profundizar el alcance de los métodos desarrollados.

A lo largo del trabajo, realizamos un análisis detallado del método de elementos finitos aplicado a problemas de reacción–difusión singularmente perturbados, con foco en la obtención de estimaciones de error en normas balanceadas mediante el uso de mallas graduadas. Abordamos una variedad de contextos que incluyen problemas en dos dimensiones, sistemas acoplados de ecuaciones y aplicaciones a problemas fraccionarios.

Comenzamos estudiando una ecuación de reacción–difusión singularmente perturbada con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas en dos dimensiones, utilizando una formulación variacional con peso recientemente introducida en [43]. Esta formulación conduce de forma natural a una norma balanceada, adecuada para capturar el comportamiento de las capas límite en el análisis de métodos numéricos.

Sobre esta base, desarrollamos una aproximación mediante elementos finitos bilineales a trozos sobre mallas graduadas especialmente diseñadas. Demostramos estimaciones de error casi óptimas y robustas con respecto al parámetro de perturbación singular, en la norma balanceada. Además, establecimos un resultado de *supercloseness* en dicha norma: bajo ciertas hipótesis, la diferencia entre la solución numérica y la interpolación de Lagrange de la solución exacta es de orden superior al propio error. Para obtener este resultado, fue esencial analizar las propiedades de la función peso involucrada y deducir estimaciones sobre las derivadas de la solución exacta.

Un comportamiento curioso, aún no comprendido teóricamente, surgió a partir del Ejemplo 2.2. Recordemos que allí consideramos el problema

$$-\varepsilon^2 \Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \tag{5.49}$$

con $\Omega = (0,1)^2$, donde f fue elegida de manera que la solución exacta presenta capas

h	M	$\|u-u_h\|_0$	eoc	$\|\|\|u-u_h\|\|\|_\beta$	eoc	$\|\|\|u_I-u_h\|\|\|_\beta$	eoc
0.2	125	0.046034	-	0.079234	-	0.076137	-
0.1	265	0.019384	1.1511	0.033988	1.1264	0.032117	1.1487
0.05	537	0.0069052	1.4614	0.012799	1.3828	0.011448	1.4606
0.025	1073	0.0024378	1.5041	0.0049848	1.3623	0.0040421	1.5039
0.0125	2135	0.00086285	1.5096	0.0020536	1.2889	0.0014305	1.5098

Tabla 5.2: Registro de errores para el Ejemplo 2.2 con mallas graduadas hacia $x = 0$ e $y = 0$ con $\varepsilon = 10^{-6}$.

h	M	$\|u-u_h\|_0$	eoc	$\|\|\|u-u_h\|\|\|_\beta$	eoc	$\|\|\|u_I-u_h\|\|\|_\beta$	eoc
0.2	169	4.5459e-2	-	7.8290e-2	-	7.5187e-2	-
0.1	358	1.9286e-2	1.1423	3.3825e-2	1.1180	3.1953e-2	1.1400
0.05	725	6.8893e-3	1.4588	1.2771e-2	1.3804	1.1423e-2	1.4578
0.03	1208	3.1980e-3	1.5032	6.3424e-3	1.3708	5.3026e-3	1.5031

Tabla 5.3: Registro de errores para el Ejemplo 2.2 con mallas graduadas hacia $x = 0$ e $y = 0$ con $\varepsilon = 10^{-8}$.

límite solamente sobre los lados $x = 0$ e $y = 0$. Al utilizar mallas graduadas hacia toda la frontera, obtuvimos los órdenes de convergencia esperados. Sin embargo, cuando se gradúa únicamente en las regiones donde efectivamente aparecen capas límite, si bien se preserva el orden de convergencia en la norma balanceada $|||\cdot|||_\beta$, los órdenes correspondientes a la norma L^2 y al *supercloseness* resultan subóptimos (ver Tablas 5.2 y 5.3). El análisis teórico de este fenómeno representa una interesante dirección para investigaciones futuras.

Posteriormente, estudiamos la convergencia en una norma balanceada de la aproximación por elementos finitos lineales sobre mallas graduadas para sistemas de dos ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo reacción–difusión, singularmente perturbados. Consideramos primero el caso de coeficientes variables con el mismo parámetro de perturbación en ambas ecuaciones, y luego el caso con coeficientes constantes y parámetros de perturbación distintos.

En ambos escenarios, demostramos estimaciones del error casi óptimas en términos del número de grados de libertad, siempre que se utilicen mallas graduadas adecuadas. Estas estimaciones son además robustas respecto de los parámetros de perturbación singular. Notablemente, en nuestra propuesta las mallas dependen únicamente del menor de los parámetros involucrados en el sistema. También mostramos que las técnicas desarrolladas pueden extenderse naturalmente a sistemas con más de dos ecuaciones.

Como línea de trabajo futura, presentamos un ejemplo con coeficientes variables y parámetros de perturbación distintos, que no se ajusta al marco teórico desarrollado, ya

h	$\varepsilon = 10^{-6}, \mu = 10^{-2}$				$\varepsilon = 10^{-9}, \mu = 10^{-3}$			
	N_h	$\|\|\|\cdot\|\|\|$-error	r_h	r_N	N_h	$\|\|\|\cdot\|\|\|$-error	r_h	r_N
0.32	144	2.7992e-02	-	-	216	2.7737e-02	-	-
0.16	330	1.5173e-02	0.88	0.74	498	1.5037e-02	0.88	0.73
0.08	684	7.9543e-03	0.93	0.89	1036	7.8838e-03	0.93	0.88
0.04	1376	4.0839e-03	0.96	0.95	2082	4.0480e-03	0.96	0.96
0.02	2742	2.0756e-03	0.98	0.98	4148	2.0575e-03	0.98	0.98
0.01	5456	1.0567e-03	0.97	0.98	8252	1.0475e-03	0.97	0.98

Tabla 5.4: Errores numéricos para el Ejemplo dado por (5.50).

que las proyecciones definidas en (3.29) no son aplicables. Para este ejemplo, consideramos un sistema con la misma matriz que el Ejemplo 3.4.1, pero con diferentes parámetros ε y μ, esto es,

$$\begin{aligned} a_{11}(x) &= 5(x+1)^2, & a_{12}(x) &= -(1+x)^3, \\ a_{21}(x) &= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right), & a_{22}(x) &= 5e^{1-x}, \end{aligned} \tag{5.50}$$

y

$$f_1(x) = f_2(x) = 1, \qquad \text{en } [0,1].$$

Observamos que los órdenes de convergencia para los dos casos considerados en la Tabla 5.4 coinciden con los esperados según los Teoremas 3.3 y 3.4, lo cual sugiere la posibilidad de extender los resultados teóricos a este tipo de sistemas.

En relación con otras posibles extensiones de este trabajo a aproximaciones de orden superior, observamos que, aunque es posible definir mallas graduadas apropiadas que permiten estimaciones robustas de orden k para $k \geq 2$, las técnicas empleadas para probar estabilidad en el caso de elementos de orden 1 no se trasladan directamente al caso de mayor orden y requieren un análisis más elaborado. Además, un estudio preliminar indica que las mallas necesarias en estos casos presentan elementos extremadamente pequeños cerca del borde, lo cual plantea desafíos relativos a aritmética de punto flotante.

Además, demostramos un resultado de superconvergencia para la solución numérica obtenida mediante elementos finitos Q_1 sobre mallas graduadas, en el contexto de un problema modelo de reacción–difusión en dos dimensiones. Este resultado se basa en una propiedad de *supercloseness* y se potencia a través de un procedimiento de post–procesamiento, lo cual permite obtener aproximaciones de orden superior, de manera casi uniforme respecto del parámetro de perturbación singular.

Finalmente, abordamos la aproximación por elementos finitos del problema de Dirichlet para potencias fraccionarias de un operador elíptico simétrico de segundo orden, en

un dominio acotado. Para ello, adoptamos la caracterización espectral del operador fraccionario y su localización mediante una extensión tipo Caffarelli–Silvestre, lo que nos permitió reformular el problema original en una familia de ecuaciones de reacción–difusión en el dominio base.

A partir de la técnica de diagonalización introducida en [6], propusimos una estrategia para construir una única malla graduada en $\Omega = (0,1)^2$, capaz de aproximar de forma eficiente cada uno de estos problemas desacoplados. Utilizamos elementos finitos bilineales a trozos y las técnicas de posprocesamiento desarrolladas previamente que garantizan superconvergencia, lo cual nos permitió obtener una estimación de error casi lineal en la norma de energía en función del número total de grados de libertad. Este enfoque ofrece una mejora en la complejidad computacional respecto del método tridimensional estándar.

Como posible línea futura de investigación, se podrían extender estas ideas a operadores fraccionarios más generales o a dominios con geometría más compleja, explorando la robustez de las mallas graduadas y del posprocesamiento en tales contextos. Por otra parte, cabe destacar que los M sistemas lineales asociados a la aproximación de los problemas de reacción–difusión (5.21) presentan una estructura simple, y son de la forma

$$\mu_i A_1 + A_0 = d_s v_i(0) b, \qquad i = 1, \ldots, M,$$

donde las matrices A_0, A_1 y el vector b dependen únicamente de la malla graduada $\mathcal{T}_N$. Esta estructura permite construir los M sistemas lineales de manera simultánea una vez conocidos los pares de autovalores y autofunciones (μ_i, v_i), lo cual habilita la implementación de algoritmos de paralelización adecuados para mejorar el rendimiento computacional.

En resumen, los resultados obtenidos en esta tesis muestran que el uso de mallas graduadas constituye una herramienta poderosa en contextos donde la presencia de capas límite u operadores no locales presenta desafíos significativos para los métodos de elementos finitos clásicos. Las técnicas desarrolladas pueden ser extendidas y adaptadas a nuevos contextos, y abren numerosas posibilidades para investigaciones futuras, tanto desde el punto de vista teórico como computacional.

Bibliografía

[1] Acosta, G., and Borthagaray, J. P. A fractional Laplace equation: regularity of solutions and finite element approximations. *SIAM J. Numer. Anal. 55*, 2 (2017), 472–495.

[2] Adler, J., MacLachlan, S., and Madden, N. A first-order system Petrov-Galerkin discretization for a reaction-diffusion problem on a fitted mesh. *IMA J. Numer. Anal. 36*, 3 (2016), 1281–1309.

[3] Adler, J., MacLachlan, S., and Madden, N. First-Order System Least Squares Finite-Elements for Singularly Perturbed Reaction-Diffusion Equations. *Large-Scale Scientific Computing 11958* (2020), 3–14.

[4] Apel, T. *Anisotropic finite elements: Local estimates and applications.* Leipzig: Teubner; Chemnitz: Technische Univ., 1999.

[5] Armentano, M. G., Lombardi, A. L., and Penessi, C. Robust estimates in balanced norms for singularly perturbed reaction diffusion equations using graded meshes. *Journal of Scientific Computing 96* (2023), Article Number 18.

[6] Banjai, L., Melenk, J. M., Nochetto, R. H., Otárola, E., Salgado, A. J., and Schwab, C. Tensor fem for spectral fractional diffusion. *Foundations of Computational Mathematics 19* (2019), 901–962.

[7] Benson, D. A., Wheatcraft, S. W., and Meerschaert, M. M. Application of a fractional advection-dispersion equation. *Water resources research 36*, 6 (2000), 1403–1412.

[8] Bogdan, K., Burdzy, K., and Chen, Z.-Q. Censored stable processes. *Probab. Theory Relat. Fields 127*, 1 (2003), 89–152.

[9] Bramble, J. H., Pasciak, J. E., and Steinbach, O. On the stability of the L^2 projection in $H^1(\omega)$. *Math. Comput. 71*, 237 (2002), 147–156.

[10] Brenner, S. C. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer, 2008.

[11] Cabré, X., and Tan, J. Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the laplacian. *Advances in Mathematics 224*, 5 (2010), 2052–2093.

[12] Caffarelli, L., and Silvestre, L. An extension problem related to the fractional laplacian. *Communications in partial differential equations 32*, 8 (2007), 1245–1260.

[13] Cai, Z., and Ku, J. A dual finite element method for a singularly perturbed reaction-diffusion problem. *SIAM J. Numer. Anal. 58*, 3 (2020), 1654–1673.

[14] Ciarlet, P. G. *The finite element method for elliptic problems*. SIAM, 2002.

[15] Das, P., and Vigo-Aguiar, J. Parameter uniform optimal order numerical approximation of a class of singularly perturbed system of reaction diffusion problems involving a small perturbation parameter. *Journal of Computational and Applied Mathematics 354* (2019), 533–544.

[16] Di Nezza, E., Palatucci, G., and Valdinoci, E. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. *Bull. Sci. Math. 136*, 5 (2012), 521–573.

[17] Durán, R. G., and Lombardi, A. L. Error estimates on anisotropic $\mathcal{Q}_1$ elements for functions in weighted Sobolev spaces. *Math. Comput. 74*, 252 (2005), 1679–1706.

[18] Durán, R. G., Lombardi, A. L., and Prieto, M. I. Superconvergence for finite element approximation of a convection-diffusion equation using graded meshes. *IMA J. Numer. Anal. 32*, 2 (2012), 511–533.

[19] Durán, R. G., Lombardi, A. L., and Prieto, M. I. Supercloseness on graded meshes for $\mathcal{Q}_1$ finite element approximation of a reaction-diffusion equation. *J. Comput. Appl. Math. 242* (2013), 232–247.

[20] Duran, R. G., Muschietti, M. A., and Rodriguez, R. Asymptotically exact error estimators for rectangular finite elements. *SIAM journal on numerical analysis 29*, 1 (1992), 78–88.

[21] Eaton, J. W., Bateman, D., Hauberg, S., and Wehbring, R. *GNU Octave version 8.4.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations*, 2023.

[22] Evans, L. *Partial Differential Equations 2nd edn.* American Mathematical Society, 2010.

[23] G. Roos, H., and Schopf, M. Convergence and stability in balanced norms of finite element methods on Shishkin meshes for reaction-diffusion problems. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 95*, 6 (2015), 551–565.

[24] Gaucel, S., and Langlais, M. Some remarks on a singular reaction-diffusion system arising in predator-prey modeling . *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 8*, 1 (2007), 71–72.

[25] Grisvard, P. *Elliptic problems in nonsmooth domains.* SIAM, 2011.

[26] Guan, Q.-Y., and Ma, Z.-M. Reflected symmetric α-stable processes and regional fractional Laplacian. *Probab. Theory Relat. Fields 134*, 4 (2006), 649–694.

[27] Kan-On, Y., and Mimura, M. Singular perturbation approach to a 3-component reaction-diffusion system arising in population dynamics . *SIAM J. Math. Anal. 29*, 6 (1998), 1519–1536.

[28] Kopteva, N. Maximum norm a posteriori error estimate for a 2D singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem. *SIAM J Numer Anal 46*, 3 (2008), 1602–1618.

[29] Li, J., and Navon, I. M. Uniformly convergent finite element methods for singularly perturbed elliptic boundary value problems. I: Reaction-diffusion type. *Comput. Math. Appl. 35*, 3 (1998), 57–70.

[30] Li, J., and Wheeler, M. F. Uniform convergence and superconvergence of mixed finite element methods on anisotropically refined grids. *SIAM J. Numer. Anal. 38*, 3 (2000), 770–798.

[31] Lin, R., and Stynes, M. A balanced finite element method for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *SIAM J. Numer. Anal 50*, 5 (2012), 2729–2743.

[32] Lin, R., and Stynes, M. A balanced finite element method for a system of singularly perturbed reaction-diffusion two-point boundary value problems. *Numer. Algorithms 70*, 4 (2015), 691–707.

[33] Linss, T. Uniform superconvergence of a galerkin finite element method on shishkin-type meshes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal 16*, 5 (2000), 426–440.

[34] Linss, T. Analysis of a FEM for a coupled system of singularly perturbed reaction-diffusion equations. *Numer. Algorithms 50*, 3 (2009), 283–291.

[35] Linss, T. *Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems*, vol. 1985 of *Lect. Notes Math.* Berlin: Springer, 2010.

[36] Linss, T., and Madden, N. An improved error estimate for a numerical method for a system of coupled singularly perturbed reaction-diffusion equations. *Comput. Methods Appl. Math. 3*, 3 (2003), 417–423.

[37] Linss, T., and Madden, N. A finite element analysis of a coupled system of singularly perturbed reaction–diffusion equations. *Applied Mathematics and Computation 148* (2004), 869–880.

[38] Linss, T., and Madden, N. Layer-adapted meshes for a linear system of coupled singularly perturbed reaction-diffusion problems. *IMA J. Numer. Anal. 29*, 1 (2009), 109–125.

[39] Linss, T., and Stynes, M. Numerical solution of systems of singularly perturbed differential equations. *Computational methods in applied mathematics 9*, 2 (2009), 165–191.

[40] Liu, F., Madden, N., Stynes, M., and Zhou, A. A two-scale sparse grid method for a singularly perturbed reaction-diffusion problem in two dimensions. *IMA J. Numer. Anal. 29*, 4 (2009), 986–1007.

[41] Lombardi, A. L. *Analysis of Finite Element Methods for Singularly Perturbed Problems*. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, 2004.

[42] Madden, N., and Stynes, M. A uniformly convergent numerical method for a coupled system of two singularly perturbed linear reaction–diffusion problemss. *IMA J. Numer. Anal. 23*, 4 (2003), 627–644.

[43] Madden, N., and Stynes, M. A weighted and balanced FEM for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *Calcolo 58*, 2 (2021), 1–16.

[44] Matthews, S., O'Riordan, E., and Shishkin, G. I. A numerical method for a system of singularly perturbed reaction–diffusion equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics 145* (2002), 151–166.

[45] Melenk, J. M., and Xenophontos, C. Robust exponential convergence of *hp*-FEM in balanced norms for singularly perturbed reaction-diffusion equations. *Calcolo 53*, 1 (2016), 105–132.

[46] Melenk, J. M., Xenophontos, C., and Oberbroeckling, L. Analytic regularity for a singularly perturbed system of reaction-diffusion equations with multiple scales. *Adv. Comput. Math. 39*, 2 (2013), 367–394.

[47] Melenk, J. M., Xenophontos, C., and Oberbroeckling, L. Robust exponential convergence of *hp* FEM for singularly perturbed reaction-diffusion systems with multiple scales. *IMA J. Numer. Anal. 33*, 2 (2013), 609–628.

[48] Meng, X., and Stynes, M. Energy-norm and balanced-norm supercloseness error analysis of a finite volume method on Shishkin meshes for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *Calcolo 60*, 3 (2023), 37. Id/No 40.

[49] Mo, J., and Zhou, K. Singular perturbation for nonlinear species group reaction diffusion systems . *J. Biomath 21*, 4 (2006), 481–488.

[50] Nochetto, R. H., Otárola, E., and Salgado, A. J. A pde approach to fractional diffusion in general domains: a priori error analysis. *Foundations of Computational Mathematics 15* (2015), 733–791.

[51] Pao, C. Singular reaction diffusion equations of porous medium type. *Nonlinear Anal. 71*, 5-6 (2009), 2033–2052.

[52] Rathgeber, F., Ham, D. A., Mitchell, L., Lange, M., Luporini, F., McRae, A. T. T., Bercea, G.-T., Markall, G. R., and Kelly, P. H. J. Firedrake: automating the finite element method by composing abstractions. *ACM Trans. Math. Softw. 43*, 3 (2016), 24:1–24:27.

[53] Roos, H. G. Robust estimates in a balanced norm for finite element methods for singularly perturbed reaction–diffusion problems. *ZAMM–Journal of Applied*

Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 86, 11 (2006), 828–836.

[54] Roos, H. G. Remarks on balanced norm error estimates for systems of reaction-diffusion equations. *Applications of Mathematics 63*, 3 (2018), 273–279.

[55] Roos, H. G., Stynes, M., and Tobiska, L. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion-reaction and flow problems*, 2nd ed. ed., vol. 24 of *Springer Ser. Comput. Math.* Berlin: Springer, 2008.

[56] Shishkin, G. I. Grid approximation of singularly perturbed boundary value problems with a regular boundary layer. *Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Computing Center* (1990). In Russian.

[57] Shishkin, G. I. Mesh approximation of singularly perturbed boundary-value problems for systems of elliptic and parabolic equations. *Computational mathematics and mathematical physics 4*, 35 (1995), 429–446.

[58] Stinga, P. R., and Torrea, J. L. Extension problem and harnack's inequality for some fractional operators. *Communications in Partial Differential Equations 35*, 11 (2010), 2092–2122.

[59] Stynes, D., and Stynes, T. *Convection–diffusion problems. An introduction to their analysis and numerical solution*, vol. 196. American Mathematical Society, Atlantic Associationfor Research in the Mathematical Science, 2018.

[60] Stynes, M. Steady-state convection–diffusion problems. *Acta Numerica 14* (2005), 445–508.

[61] Stynes, M., and Tobiska, L. The sdfem for a convection-diffusion problem with a boundary layer: optimal error analysis and enhancement of accuracy. *SIAM journal on numerical analysis 41*, 5 (2003), 1620–1642.

[62] Zhang, Z. Finite element superconvergence approximation for one-dimensional singularly perturbed problems. *Numer. Methods Partial Differ. Eq. 18*, 3 (2002), 374–395.

[63] Zhang, Z. Finite element superconvergence on Shishkin mesh for 2-D convection-diffusion problems. *Math. Comput. 72*, 243 (2003), 1147–1177.

[64] Zhang, Z., and Zheng, H. Robust a priori error estimates in a streamline-diffusion finite element method for singularly perturbed reaction–diffusion problems. *IMA Journal of Numerical Analysis 27*, 4 (2007), 631–646.

[65] Zlamal, M. Superconvergence and reduced integration in the finite element method. *Math.Comp. 32*, 143 (1978), 663–685.