Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin

Práctica n$^{\text{o}}$ 3

1. Considere los siguientes problemas:

   Problema de la Suma de Subconjunto (PSS)

   Entrada: Un conjunto finito $P \subset \mathbb{Z}$ y un $k \in \mathbb{Z}$.
   Pregunta: ¿existe un $S \subseteq P$ tal que $\sum_{p \in S} p = k$?

   Búsqueda de Entero (BE)

   Entrada: Un conjunto finito $P \subset \mathbb{Z}$ y un $k \in \mathbb{Z}$.
   Pregunta: ¿existe un $p \in P$ tal que $p = k$?

   y la siguiente reducción de PSS a BE:

   "Dado $P \subset \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, construya $P' = \{\sum_{p \in S} p : S \subset P\}$. Claramente, la respuesta para PSS es afirmativa con P y k si y sólo si la respuesta para BE es afirmativa con P' y k."

   Sabiendo que PSS es $\mathcal{NP}$-completo [GJNP, pág. 223] y BE tiene complejidad lineal, ¿se podría probar que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$? ¿Por qué?

2. Sea un digrafo $D = (V, A)$ y considere el grafo G generado por la transformación dada en el Corolario 9.7 de [LOC, pag. 321]. Pruebe que D tiene un circuito hamiltoniano dirigido si y sólo si G tiene un circuito hamiltoniano.

3. Pruebe que el siguiente problema es $\mathcal{NP}$-completo (*Sugerencia*: ver Cor. 9.8 de [LOC]):

   Problema de TSP sobre grafos

   Entrada: un grafo $G = (V, E)$, costos $c \in \mathbb{R}^E$ y $k \in \mathbb{R}$.
   Pregunta: ¿tiene G un circuito hamiltoniano de costo a lo sumo k?

4. Para un grafo o digrafo dado, cuyo conjunto de vértices es V, decimos que una *colección de pares prohibidos* es un subconjunto $\mathscr{T}$ de $\{(u, v) \in V \times V : u \neq v\}$, y decimos que un conjunto $S \subset V$ (que puede definir una estructura como caminos o ciclos) es $\mathscr{T}$*-admisible* cuando contiene a lo sumo un vértice de cada par prohibido (es decir, no se puede dar que $u \in S$ y $v \in S$ al mismo tiempo, para todo (u, v) de $\mathscr{T}$). Considere los siguientes 3 problemas:

   Problema del camino dirigido con pares prohibidos (DPFP)

   Entrada: un digrafo $D = (V, A)$, vértices $s, t \in V$ tales que existe un st-camino dirigido en D, y una colección de pares prohibidos $\mathscr{T}$.
   Pregunta: ¿existe un st-camino dirigido de D $\mathscr{T}$-admisible?

   Problema del camino no dirigido con pares prohibidos (UPFP)

   Entrada: un grafo $G = (V, E)$, vértices $s, t \in V$ tales que existe un st-camino en G, y una colección de pares prohibidos $\mathscr{T}$.
   Pregunta: ¿existe un st-camino de G $\mathscr{T}$-admisible?

Problema del ciclo impar con pares prohibidos (OCFP)

Entrada: un grafo $G = (V, E)$ y una colección de pares prohibidos $\mathscr{T}$.
Pregunta: ¿existe un ciclo impar sin cuerdas (también denominado *agujero impar*) $\mathscr{T}$-admisible?

Sabiendo que DPFP es $\mathcal{NP}$-completo, demuestre que UPFP y OCFP son $\mathcal{NP}$-completos también. Para ello, reduzca polinomialmente DPFP a UPFP y luego UPFP a OCFP (*Sugerencia*: ver [EDGE, pág. 58]).

5. Sea Φ una fórmula 3-SAT con la siguiente propiedad que llamamos *estrella*: cada cláusula de Φ tiene exactamente 3 literales distintos (recordemos que un literal es una variable o su negación). Por ejemplo, Φ puede contener cláusulas como $x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2$ (porque x_1 y $\neg x_1$ se consideran literales distintos) pero se prohiben cláusulas como $x_1 \vee x_2$ (sólo tiene 2 literales) o $x_1 \vee x_1 \vee \neg x_2$ (x_1 está repetido). Definimos el siguiente problema:

   *Problema 3-SAT**

   Entrada: una fórmula Φ 3-SAT que satisface la propiedad estrella.
   Pregunta: ¿es satisfactible Φ para alguna asignación de sus variables?

   Demuestre que 3-SAT* es $\mathcal{NP}$-completo (reduciendo polinomialmente 3-SAT a 3-SAT*).

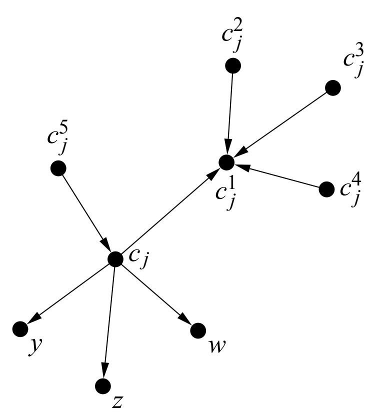
6. Considere el siguiente problema de decisión:

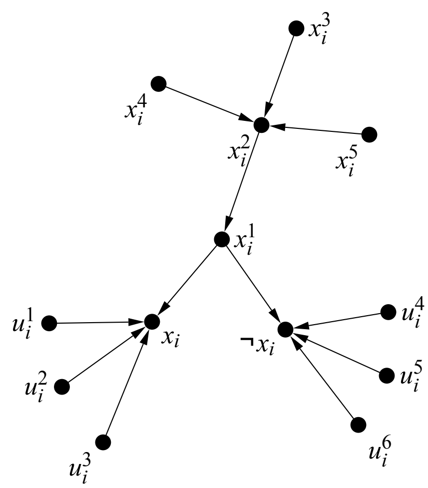
   Problema del k-coloreo aditivo orientado

   Entrada: un digrafo $D = (V, A)$.
   Pregunta: ¿existe un k-coloreo aditivo orientado de D?
   (vea la definición de coloreo aditivo orientado en la Práctica 2)

   a) Pruebe que el Problema del 1-coloreo aditivo orientado es polinomial.

   b) Considere los siguientes digrafos:





   Demuestre que si el digrafo de la izquierda admite un 2-coloreo aditivo orientado f entonces $f(x_i) + f(\neg x_i) \geq 3$.

   c) Demuestre que si el digrafo de la derecha admite un 2-coloreo aditivo orientado f entonces $f(y) + f(z) + f(w) \leq 5$.

   d) Consideremos la siguiente reducción polinomial de 3-SAT* al Problema del 2-coloreo aditivo orientado. Sea Φ una instancia de 3-SAT* con cláusulas $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ y variables $X = \{x_1, \ldots, x_q\}$ y sea el digrafo $D(\Phi)$ que consiste en una copia del digrafo izquierdo del ejercicio anterior para cada cláusula $c_j \in C$ y una copia del digrafo derecho anterior para cada variable $x_i \in X$. Además, para cada cláusula $c_j = y \vee z \vee w$ se agregarán los arcos (c_j, y), (c_j, z), (c_j, w) donde y, z, w son los vértices que representan aquellos literales. Por ejemplo, si $c_1 = x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3$, entonces se agregarán los arcos (c_1, x_1), (c_1, x_2) y $(c_1, \neg x_3)$. Demuestre que existe una asignación de verdad que satisface Φ si y sólo si el digrafo $D(\Phi)$ tiene un 2-coloreo aditivo orientado.

Sugerencia: Pruebe que si existe dicha asignación entonces existe el 2-coloreo, luego pruebe que si existe el 2-coloreo entonces existe la asignación. En ambos casos considere que una variable x_j es *true* cuando $f(x_j) = 1$ y *false* cuando $f(\neg x_j) = 1$ (cuando tanto $f(x_j)$ como $f(\neg x_j)$ valen 2, entonces considere que la variable puede asumir cualquier valor de verdad).

e) Pruebe que el Problema del 2-coloreo aditivo orientado en Bipartitos es $\mathcal{NP}$-completo.

7. Considere el siguiente problema de decisión, descripto en [DOMPACK]:

   Problema de Dominación Múltiple

   Entrada: un grafo $G = (V, E)$ y $k, \alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   Pregunta: ¿existe un conjunto k-dominante de G de tamaño a lo sumo α?
   (es decir, ¿existe un $D \subset V$ tal que $|N[v] \cap D| \geq k$ para todo $v \in V$ y $|D| \leq \alpha$?).

   Pruebe que si $\alpha = k$ entonces el Problema de Dominación Múltiple se resuelve en tiempo polinomial.

8. Considere el Teorema 1 de [DOMPACK] que demuestra que el siguiente problema de decisión es $\mathcal{NP}$-completo:

   Problema del Empaquetamiento Limitado en Splits

   Entrada: un grafo split $G = (V, E)$ y $k, \alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   Pregunta: ¿existe un k-empaquetamiento limitado de G de tamaño al menos α?
   (es decir, ¿existe un $B \subset V$ tal que $|N[v] \cap B| \leq k$ para todo $v \in V$ y $|B| \geq \alpha$?).

   En la prueba del teorema se contruye un grafo split G' a partir de un grafo G dado y se demuestra que G tiene un conjunto estable de tamaño s si y sólo si G' tiene un k-empaquetamiento limitado de tamaño ks.

   a) Justifique que la transformación utilizada en el teorema es polinomial.

   b) Pruebe que siempre existe un k-empaquetamiento limitado B de G' tal que para todo $e = v_p v_q \in E(G)$ y para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ entonces $v_p^i \notin B$ o $v_q^i \notin B$.

9. Sabiendo que el Problema de Dominación Múltiple en Bipartitos es $\mathcal{NP}$-completo, realice lo siguiente:

   a) Pruebe que el Problema del Empaquetamiento Limitado es $\mathcal{NP}$-completo en Bipartitos.

   b) En el Teorema 2 de [DOMPACK] se prueba que el Problema del k-Empaquetamiento Limitado es $\mathcal{NP}$-completo en Bipartitos, para todo $k \in \mathbb{N}$. ¿Qué diferencia hay con respecto al ítem (a)? ¿Cuál es más general?.

10. Un grafo $G = (V, E)$ es P_4-*sparse* cuando para todo conjunto $S \subset V$ tal que $|S| = 5$ tenemos que $G[S]$ tiene a lo sumo un camino P_4 inducido. Demuestre que la clase P_4-sparse es hereditaria.

11. Una *araña* es un grafo $V = (G, E)$ cuyo conjunto V puede ser particionado en S (stable), C (clique) y H (head) tales que $|S| = |C| \geq 2$, S es un conjunto estable de G, C es una clique de G, todo vértice de H es adyacente a todo vértice de C, y todo vértice de H no es adyacente a ningún vértice de S. Ya que $|S| = |C|$, consideramos $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ y $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ y decimos que la araña es *flaca* si $(s_i, c_j) \in E \Leftrightarrow i = j$, y que la araña es *gorda* si $(s_i, c_j) \in E \Leftrightarrow i \neq j$. En el caso en que $H = \varnothing$, se dice que la araña es *sin cabeza*.

    a) Pruebe que G es una araña flaca si y sólo si $\overline{G}$ es una araña gorda.
    b) Prueba que si G es una araña sin cabeza entonces G es P_4-sparse.
    c) Pruebe que si G es una araña entonces "G es P_4-sparse $\Leftrightarrow$ $G[H]$ P_4-sparse".

12. Considere el siguiente problema de optimización:

    Problema del Conjunto Estable Ponderado en Cografos

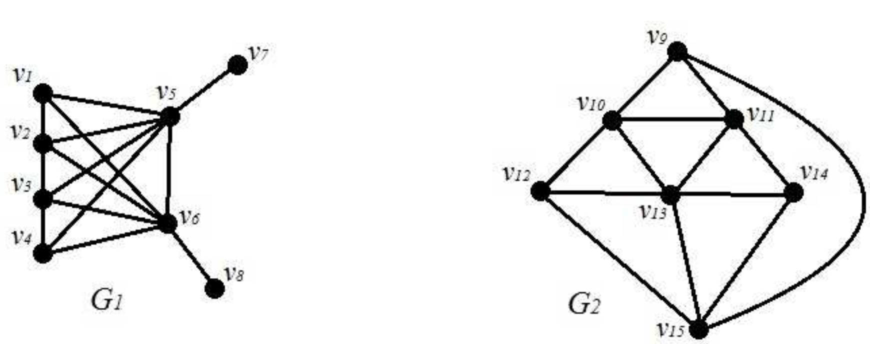
    Entrada: un cografo $G = (V, E)$ y pesos $w \in \mathbb{R}_+^V$.
    Objetivo: determine el conjunto estable S de G que maximice $\sum_{s \in S} w_s$.

    a) Describa un algoritmo que resuelva este problema, suponiendo que conoce una descomposición modular de G. *Sugerencia*: Defina $S(G)$ como la función que, dado un cografo, retorna el conjunto estable de máximo peso y determine $S(G[\{v\}])$ para todo $v \in V$ y $S(G_1 \cup G_2)$, $S(G_1 \vee G_2)$ a partir de suponer $S(G_1)$ y $S(G_2)$ conocidos.
    b) Si se permite que en la entrada se tome un grafo cuya descomposición modular genera vértices aislados y también arañas gordas, ¿qué modificaciones debe hacer al algoritmo del ítem (a)?

13. Sea $G = (V, E)$ un cografo. Describa algoritmos que obtengan $\chi(G)$ (el número cromático de G) y $\gamma(G)$ (el número de dominación de G), partiendo de una descomposición modular de G. Luego aplíquelos al siguiente cografo:

$$G = (\{v_1\} \cup \{v_2\}) \vee \big(\{v_3\} \vee (\{v_4\} \cup \{v_5\})\big).$$

14. Obtenga una fórmula para calcular $\chi(G)$ para los casos en que $G = (S \cup C \cup H, E)$ es una araña flaca y conoce $\chi(H)$. Realice lo mismo para una araña gorda. Teniendo en cuenta esto y lo visto en el ejercicio anterior, halle el número cromático de grafo $G = G_1 \vee G_2$ donde:



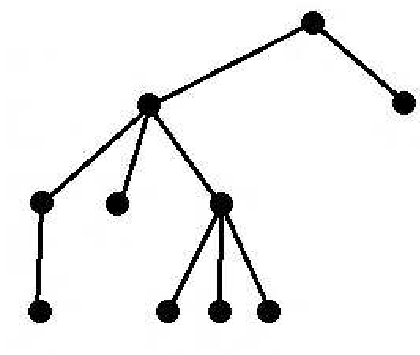
15. Sea $G = (V, E)$ un grafo, capacidades $c \in \mathbb{Z}_+^V$ y un conjunto de nodos admisibles $\mathscr{A} \subset V$ (véase [PACKTREE]). Decimos que B es un $(c, \mathscr{A})$-*empaquetamiento* de G si $B \subset \mathscr{A}$ y

para todo $v \in V$, $|N[v] \cap B| \leq c_v$. Por otro lado, sea $T = (V, E)$ un árbol. Decimos que $v \in V$ es *hoja* del árbol T cuando $d(v) = 1$, y es *stem* del árbol T cuando tiene al menos un vecino que es hoja de T. Para toda hoja $l \in V$, llamamos $s(l)$ al vértice adyacente a l. Dado un árbol $T = (V, E)$, pruebe que si $l \in V$ es una hoja de T tal que $c_l = 0$ entonces:

$$B \text{ es un } (c, \mathscr{A})\text{-}\textit{empaquetamiento} \text{ de } T \text{ si y sólo si } B \text{ es un } (c', \mathscr{A} \backslash \{l, s(l)\})\text{-}\textit{empaquetamiento} \text{ de } T \backslash \{l\}$$

donde $c' \in \mathbb{Z}_+^{V \backslash \{l\}}$ tal que $c'_v = c_v$ para todo $v \in V \backslash \{l\}$.

16. Resuelva el Problema de 2-Empaquetamiento Limitado para el siguiente árbol, utilizando el algoritmo para resolver el Problema de Empaquetamiento Generalizado:



Bibligrafía:

[EDGE] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *A characterization of edge-perfect graphs and the complexity of recognizing some combinatorial optimization games*. Discr. Optim. 10 (2013) 54–60.

[DOMPACK] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *The multiple domination and limited packing problems in graphs*. Inform. Proc. Let. 111 (2011) 1108-1113.

[PACKTREE] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *Arbitrary Limited Packings in Trees*. Manuscript.

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience.

[GJNP] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman.