



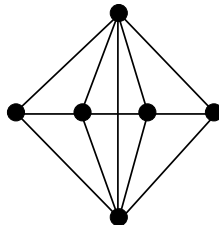
Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Pablo Torres

PRÁCTICA N° 1

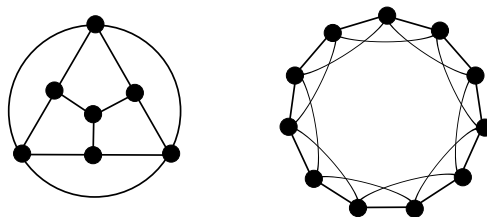
En esta práctica asumimos que todos los grafos son simples (sin lazos ni aristas múltiples).

1. Determinar todos los grafos con conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 4\}$. ¿Cuántos grafos no isomorfos hay? Para cada $n \in \mathbb{N}$, determinar $G(n)$, la cantidad total de grafos con conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$.
2. Sea G un grafo y \overline{G} su complemento. Si G es isomorfo a \overline{G} , ¿cuál es el cardinal de $E(G)$? Mostrar que dos grafos G y H son isomorfos si y solo si \overline{G} y \overline{H} son isomorfos.
3. Determinar todos los grafos no isomorfos con conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
4. Sea G el grafo que posee como conjunto de vértices a todos los subconjuntos de cardinal 2 del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y dos vértices son adyacentes si y sólo si los respectivos subconjuntos son disjuntos. Probar que G es isomorfo al grafo de Petersen, definido en [LMDC, pág. 545, figura 11.24(a)].
5.
 - a) Probar que para todo grafo G , $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|$, donde con $d(v)$ notamos el grado de v .
 - b) Demostrar que en todo grafo, la cantidad de vértices de grado impar de todo grafo es par.
6. Sea $G = (V, E)$. Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes:
 - a) G es un árbol,
 - b) $|E| = |V| - 1$ y G es conexo,
 - c) $|E| = |V| - 1$ y G es acíclico.
7. Determinar la cantidad de matchings perfectos en un grafo completo de $2n$ vértices.
8. Determinar un estable, una clique y un 1-empaquetamiento de cardinales máximos para el grafo de Petersen y para el siguiente grafo:



9. a) Sea G^n el grafo con n componentes conexas, cada una de ellas isomorfa a K_2 . ¿Cuántos estables maximales tiene G^n ?
- b) Probar que existen grafos para los cuales el número de cliques maximales es de orden exponencial respecto al número de vértices.

10. Encontrar el número cromático de los siguientes grafos:



11. a) Probar que un conjunto estable y una clique comparten a lo sumo un vértice.
- b) Probar que un conjunto de vértices S es estable y dominante de G si y sólo si S es estable maximal de G .
12. a) Probar que si M y M' son matchings de G entonces toda componente conexas del grafo $G[(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)]$ es un ciclo par o un camino.
- b) Mostrar que todo árbol tiene a lo sumo un matching perfecto.
Sugerencia: Proceder por inducción o usar el ítem (a).
13. La *distancia* entre 2 vértices u y v , $d(u, v)$, es la cantidad de arcos del camino más corto entre u y v . El *diámetro* de un grafo G es $\max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$. Probar que un grafo de diámetro a lo sumo dos no puede tener un 1-empaquetamiento de más de un elemento.
14. Demostrar que todo 1-empaquetamiento es un conjunto estable, pero no es válida la recíproca. Más aún, probar que la diferencia entre los cardinales máximos de un estable y un 1-empaquetamiento no es acotada. Es decir, para todo número natural k , existe un grafo G_k donde esa diferencia es al menos k .
15. Determinar un conjunto dominante y un código de identificación de cardinales mínimos para los ciclos de 4 y 5 vértices.
16. Sea S un subconjunto de vértices de un grafo G tal que $N[u] \cap S \neq N[v] \cap S$ para todo par de vértices u y v de G . Probar que existe $w \in V(G)$ tal que $S \cup \{w\}$ es un código de identificación de G .
17. [Ejercicio extra] Sea G un grafo con $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$, y sean $\Delta(G)$ el grado máximo de los vértices de G , $\delta(G)$ el grado mínimo de los vértices de G , $\chi(G)$ el número cromático de G , $\omega(G)$ el tamaño de la máxima clique de G , $\alpha(G)$ el cardinal del mayor conjunto estable de G y $\gamma(G)$ el cardinal del mínimo conjunto dominante de G . Probar:
- a) $\gamma(G)(\Delta(G) + 1) \geq n$.
- b) Si G es bipartito entonces $\omega(G)\alpha(G) \geq n$. ¿Es cierta esta desigualdad para grafos en general?
- c) $\chi(G)\alpha(G) \geq n$. ¿Qué relación tiene esta desigualdad con la anterior?
- d) $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$.

- e) $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.
- f) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.
- g) $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$.
- h) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.
- i) $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$.

Bibliografía:

[LMDC] R. Grimaldi. *Matemática Discreta y Combinatoria*. 3ra. edición. Pearson.

[LIGT] D. West. *Introduction to Graph Theory*. 2nd. Edition. Pearson.