FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE POSGRADO Y EDUCACIÓN CONTINUA

Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Pablo Torres

PRÁCTICA Nº 4

1. Considere los siguientes problemas:

   Problema de la Suma de Subconjunto (PSS)

   Entrada: $P \subset \mathbb{Z}$ finito y $k \in \mathbb{Z}$.
   Pregunta: ¿existe $S \subseteq P$ tal que $\sum_{p\in S} p = k$?

   Búsqueda de Entero (BE)

   Entrada: $P \subset \mathbb{Z}$ finito y $k \in \mathbb{Z}$.
   Pregunta: ¿ $k \in P$?

   Se sabe que PSS es $\mathcal{NP}$-completo [GJNP, pág. 223] y, claramente, BE es polinomial (en realidad es resoluble en tiempo lineal).

   a) Dada una entrada $P; k$ de PPS, construimos la entrada de BE dada por $P' = \{\sum_{s\in S} s : S \subset P\}$, $k' = k$. Pruebe que ésta es una transformación de PPS a BE.

   b) Dado que BE $\in \mathcal{NP}$, PPS $\in \mathcal{NP}-c$ y PPS se puede transformar a BE; ¿no estaría probado que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$? Justifique.

2. Una red es un digrafo $D = (V, A)$ y vector $c \in \mathbb{Z}_+^A$ de capacidades asociadas a sus arcos. Dados dos vértices distinguidos $s, t \in V$ (llamados *fuente* y *sumidero* respectivamente), decimos que $f \in \mathbb{Z}_+^A$ es un *st-flujo* de D si satisface:

   - *Restricciones de capacidad*: $f_e \leq c_e$ para todo $e \in A$, y
   - *Conservación del flujo*: $\sum_{v\in N^+(u)} f_{uv} = \sum_{v\in N^-(u)} f_{vu}$ para todo $u \in V \setminus \{s, t\}$.

   El *valor del flujo* f se denota $val(f)$ y es igual a $val(f) = \sum_{v\in N^+(s)} f_{sv} = \sum_{v\in N^-(t)} f_{vt}$.

   Consideremos el siguiente conocido problema de optimización:

   Problema de Flujo Máximo en una red (PFM)

   Entrada: $D = (V, A)$ digrafo, $s, t \in V$ y $c \in \mathbb{Z}_+^A$.
   Objetivo: hallar un *st*-flujo en D de valor máximo.

   El algoritmo de *Ford-Fulkerson* es un algoritmo polinomial que resuelve PFM [LCO, pág. 47] y, por lo tanto, PFM $\in \mathcal{P}$. Por otro lado, recordemos el

   Problema de Máximo Matching en Bipartitos

   Entrada: un grafo bipartito $G = (V, E)$.
   Objetivo: hallar un matching $M \subset E$ tal que $|M|$ es máximo.

   Hemos probado que éste es un problema de Conjunto Independiente Máximo en un sistema independiente que es intersección de dos matroides y por lo tanto es polinomial. Sin embargo, no hemos visto la prueba de este resultado más general.

Pruebe que el *Problema de Máximo Matching en Bipartitos* es polinomial transformando el mismo en PFM.
Sugerencia: Consulte [LCO, pág. 47].

3. Considere la transformación de 3-SAT a EXACT COVER dada en el Corolario 9.5 de [LCO, pag. 319].

   a) Construya el grafo G y determine el conjunto X y la colección de subconjuntos $\mathcal{C}$ correspondiente a la fórmula $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee \neg x_2)$.

   b) Pruebe que la transformación de 3-SAT a EXACT COVER es polinomial y correcta.

4. Sea Φ una fórmula 3-SAT con la siguiente propiedad que llamamos *estrella*: cada cláusula de Φ tiene exactamente 3 literales distintos (recordemos que un literal es una variable o su negación). Por ejemplo, Φ puede contener cláusulas como $x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2$ (porque x_1 y $\neg x_1$ se consideran literales distintos) pero se prohiben cláusulas como $x_1 \vee x_2$ (sólo tiene 2 literales) o $x_1 \vee x_1 \vee \neg x_2$ (x_1 está repetido). Definimos el siguiente problema:

   *Problema 3-SAT**

   Entrada: una fórmula Φ 3-SAT que satisface la propiedad estrella.
   Pregunta: ¿es satisfactible Φ para alguna asignación de sus variables?

   Demuestre que 3-SAT* es $\mathcal{NP}$-completo (reduciendo polinomialmente 3-SAT a 3-SAT*).

5. Pruebe que la transformación del *Problema del Circuito Hamiltoniano Dirigido* al *Problema del Circuito Hamiltoniano no Dirigido* dada en el Corolario 9.7 de [LCO, pag. 321] es polinomial y correcta.

6. Consideremos el **Problema de Dominación Múltiple** (PDM) definido así:

   Entrada: $G = (V, E)$ un grafo, $k, \alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   Pregunta: ¿existe un conjunto k-dominante de G de tamaño a lo sumo α?

   Pruebe que PDM se resuelve en tiempo polinomial en los siguientes casos:

   a) $\delta(G) \leq k - 2$

   b) $\alpha \leq k - 1$

   c) $\alpha = k$

   d) $\alpha \geq n$

   e) $k = n$.

   Observación: $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$, es decir, el grado mínimo de G.

7. Para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, definimos el **Problema de k-Dominación** (PkD) así:

   Entrada: $G = (V, E)$ un grafo, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   Pregunta: ¿existe un conjunto k-dominante de G de tamaño a lo sumo α?

   Análogamente, el **Problema de k-Empaquetamiento** (PkE) se define por:

   Entrada: $G = (V, E)$ un grafo, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   Pregunta: ¿existe un k-empaquetamiento de G de tamaño al menos α?

   Sean r y k tales que $1 \leq k < r$ y $k' = r + 1 - k$. Sea $\mathcal{G} = \{G : G \text{ es un grafo } r - \text{regular}\}$. Pruebe que P$kD(\mathcal{G})$ se puede reducir polinomialmente a Pk'E$(\mathcal{G})$ y PkE$(\mathcal{G})$ se puede reducir polinomialmente a Pk'D$(\mathcal{G})$.

   Observación: Un grafo G es r-regular si todos sus vértices tienen grado r.

8. Para todo $k \geq 1$, considere la transformación del *Problema del Conjunto Estable Máximo* (PCEM) a PkE en grafos split desarrollada en el Teorema 1 de [DOMPACK]. Dado un grafo G sea G' el grafo split que se obtiene por dicha transformación.

   a) Sea $k = 3$ y $G = (V, E)$ con $V = \{1, \ldots, 5\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 4)\}$. El conjunto $\{4, 5\}$ es un estable de G que certifica la respuesta positiva al problema PCEM si $\alpha = 2$. Construya G' y luego proponga un 3-empaquetamiento de G' que certifique la respuesta positiva de PkE para $\alpha' = k\alpha$.

   b) Justifique que la transformación utilizada en el teorema es polinomial.

   c) Dado B un k-empaquetamiento de G' pruebe que, para todo para todo $e = v_p v_q \in E(G) \cap B$ siempre existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $v_p^i \notin B$ y $v_q^i \notin B$.

   d) Sea k=1. Pruebe que si I es un estable de G entonces I es un 1-empaquetamiento de G'. Recíprocamente, pruebe que si G' tiene un 1-empaquetamiento de tamaño s, G tiene un estable I de tamaño s.

9. Considere la transformación del *PDM en Bipartitos* al *PEL en Bipartitos* desarrollada en el Teorema 2 de [DOMPACK]: sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito, $k, \alpha \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k \leq \min\{\alpha - 1, \delta(G) + 1\}$ (si no se satisface, sabemos que el problema es polinomial por el Ejercicio 6) y se propone un grafo bipartito $G' = (V', E')$ tal que

   - $V' = V \cup \bigcup_{v \in V} S_v$, donde $S_v = \{x_1^v, x_2^v, \ldots, x_{\Delta(G)-d(v)}^v\}$ para cada $v \in V$,
   - $E' = E \cup \bigcup_{v \in V} \{(v, x) : x \in S_v\}$.

   y un $k' = \Delta(G) - k + 1$ y $\alpha' = |V'| - \alpha$ (donde $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$).

   a) La instancia del PDM $G = (V, E)$ con $V = \{1, \ldots, 6\}$ y $E = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (2, 6)\}$; $k = 2$; $\alpha = 5$ tiene una respuesta positiva y se puede certificar con el conjunto dominante $\{1, 2, 3, 4, 6\}$. Construya el grafo G' y proponga un k-empaquetamiento de G' de tamaño $|V'| - \alpha$ a partir del conjunto dominante dado.

   b) Pruebe que, si G es regular, entonces $G' = G$.

   c) Pruebe que los vértices de V en G' tienen grado $\Delta(G)$ y los vértices nuevos (los de $\bigcup_{v \in V} S_v$) tienen grado 1.

   d) Pruebe que G' es bipartito indicando los vértices que conforman la bipartición.

   e) Justifique que la transformación es polinomial.

   f) Sean G y k tales que $\Delta(G) \leq k \leq \Delta(G) + 1$ y sea D un conjunto k-dominante de G tal que $|D| \leq \alpha$. Pruebe que $B = V' \backslash D$ es un k'-empaquetamiento de G' tal que $|B| \geq \alpha'$.

   g) Pruebe que si G' tiene un k'-empaquetamiento de B tal que $|B| \geq \alpha'$, G' tiene un k'-empaquetamiento de B' tal que $|B'| \geq \alpha'$ y $S_v \subset B'$ para todo $v \in V'$.

Bibligrafía:

[DOMPACK] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *The multiple domination and limited packing problems in graphs.* Inform. Proc. Let. 111 (2011) 1108-1113.

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization.* Wiley-Interscience.

[GJNP] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W.H. Freeman.