FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
Escuela de Posgrado y Educación Continua

# Tópicos Avanzados en Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

*Docentes:* Graciela Nasini, Daniel Severin, Pablo Torres

## Práctica nº 5

1. *a*) Dado $G = (V, E)$ y pesos $w \in \mathbb{Z}^V$, denotemos con $S(G)$ a un conjunto estable de peso máximo en $G$. Determine cómo encontrar $S(G_1 \cup G_2)$ y $S(G_1 \vee G_2)$ si se conoce $S(G_1)$ y $S(G_2)$.

   *b*) Recuerde que $\chi(G)$ es el número cromático de $G$. Calcule $\chi(G_1 \cup G_2)$ y $\chi(G_1 \vee G_2)$ en función de $\chi(G_1)$ y $\chi(G_2)$.

   *c*) Dibuje el grafo
$$G = (\{v_1\} \cup \{v_2\}) \vee \big(\{v_3\} \vee (\{v_4\} \cup \{v_5\})\big)$$
   y describa los pasos que realizaría el algoritmo de descomposición modular para obtener $\chi(G)$ y $S(G)$.

2. Un grafo $G = (V, E)$ es una *araña* si $V$ puede ser particionado en conjuntos $S$, $C$ y $H$ ($H$ puede ser vacío) tales que $|S| = |C| \geq 2$, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ es un conjunto estable, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ es una clique, todo vértice de $H$ es adyacente a todo vértice de $C$, todo vértice de $H$ no es adyacente a ningún vértice de $S$ y además se cumple una de las siguientes condiciones:

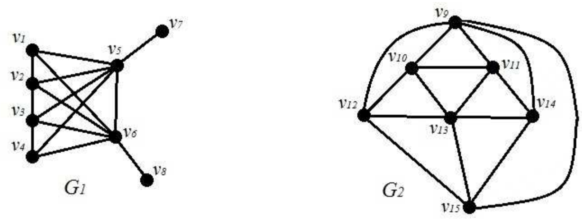
   I) $(s_i, c_j) \in E \Leftrightarrow i = j$ (araña *flaca*); II) $(s_i, c_j) \in E \Leftrightarrow i \neq j$ (araña *gorda*).

   *a*) Pruebe que $G$ es una araña flaca si y sólo si $\overline{G}$ es una araña gorda.

   *b*) Pruebe que si $G = (S, C, H)$ es un grafo araña, $G$ es split si y sólo si $G[H]$ es split.

   *c*) Determine $S(G)$ y $\chi(G)$ cuando $G$ es una araña flaca o gorda (en función de $S(H)$ y $\chi(H)$, respectivamente).

3. Describa los pasos que realizaría el algoritmo de descomposición modular para hallar el número cromático del grafo $G = G_1 \vee G_2$ donde:




4. Un grafo $G = (V, E)$ es $(q, q-4)$ si para todo conjunto $S \subset V$ tal que $|S| = q$, $G[S]$ tiene a lo sumo $q-4$ caminos $P_4$ inducidos. Los grafos $(4, 0)$ se denominan cografos y los $(5, 1)$, grafos $P_4$-sparse.

   *a*) Demuestre que, para todo $q \geq 4$, la clase de grafos $(q, q-4)$ es hereditaria.

*b*) Pruebe que si $G$ es una araña sin cabeza entonces $G$ es $P_4$-sparse.

*c*) Pruebe que si $G$ es una araña entonces "$G$ es $P_4$-sparse $\Leftrightarrow$ $G[H]$ $P_4$-sparse".

*d*) Pruebe que:

(i) todo grafo $(4,0)$ es un grafo $(q, q-4)$ para todo $q > 4$,

(ii) existen grafos $(5,1)$ que no son $(6,2)$,

(iii) existen grafos $(5,1)$ que son $(7,3)$ pero no son $(q, q-4)$ para ningún $q > 5$ y $q \neq 7$ (opcional).

Sugerencia: para las partes (ii) y (iii), considere las arañas sin cabeza.

5. Sea $G = (V, E)$ un grafo, capacidades $c \in \mathbb{Z}_+^V$ y un conjunto de nodos admisibles $\mathscr{A} \subset V$ Decimos que $B$ es un $(c, \mathscr{A})$-*empaquetamiento* de $G$ si $B \subset \mathscr{A}$ y para todo $v \in V$, $|N[v] \cap B| \leq c_v$.

Por otro lado, dado $T = (V, E)$ un árbol, $v \in V$ es *hoja* de $T$ si $d(v) = 1$ y $w$ es *stem* de $T$ si tiene al menos una hoja de $T$ en su vecindad. Notamos $L(T)$ y $S(T)$ al conjunto de hojas y stems de $T$, respectivamente. Además, si $v \in L(T)$, notamos $s(v)$ al vértice stem adyacente a $v$. Dado $w \in S(T)$, notamos $n_w$ a la cantidad de hojas adyacentes a $w$.

Dado un árbol $T = (V, E)$, $c \in \mathbb{Z}_+^V$ y $\mathscr{A} \subset V$ pruebe:

*a*) Sea $l \in L(T)$ tal que $c_l = 0$. Entonces $B$ es un $(c, \mathscr{A})$-*empaquetamiento* de $T$ si y sólo si $B$ es un $(c', \mathscr{A} \backslash \{l, s(l)\})$-*empaquetamiento* de $T \backslash \{l\}$.

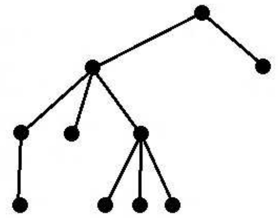
*b*) Suponga que, para todo $v \in L(T)$, $c_v \geq 1$ y $v \in \mathscr{A}$. Sea $s \in S(T)$ tal que $c_s < n_s$ y $H_s \subset L(T) \cap N(s)$ de cardinal $n_s - c_s$. Entonces existe un $(c, \mathscr{A})$-*empaquetamiento* de $T$ de cardinal máximo $B$ tal que $B$ es un $(c', \mathscr{A} \backslash H_s)$-*empaquetamiento* de $T \backslash H_s$ de cardinal máximo.

En los casos a) y b), $c'_v = c_v$ para todo $v \in V'$ donde $V'$ es el conjunto de vértices correspondiente al sugrafo de $T$ respectivo.

*c*) Suponga que, para todo $v \in L(T)$, $c_v \geq 1$ y $v \in \mathscr{A}$ y para todo $s \in S(T)$, $c_s \geq n_s$. Entonces existe un $(c, \mathscr{A})$-*empaquetamiento* de $T$ de cardinal máximo $B$ tal que $L(T) \subset B$ y $B' = B \setminus L(T)$ es un $(c', \mathscr{A} \backslash L(T))$-*empaquetamiento* de $T \backslash L(T)$ de cardinal máximo, donde $c'_v = c_v$ para todo $v \in V \backslash (L(T) \cup S(T))$ y $c'_s = c_s - n_s$ si $s \in S(T)$.

Sugerencia: véase [PACKTREE].

6. Resuelva el Problema de 2-Empaquetamiento Limitado para el siguiente árbol, utilizando el algoritmo para resolver el Problema de Empaquetamiento Generalizado:




Bibliografía:

[PACKTREE] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *Arbitrary Limited Packings in Trees.* Manuscript.