# Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

*Docentes:* Graciela Nasini, Daniel Severin, Pablo Torres

## Práctica nº 0 (segunda parte): Programación Lineal Entera.

1. Suponga que Ud. está interesado en elegir un conjunto de inversiones de entre 7 posibles. Sean las variables de decisión $x_i$, donde $x_i = 1$ si elige la inversión $i$, y 0 si no, para todo $i = 1, \ldots, 7$. Modele las siguientes restricciones. En caso de ser necesario incorpore variables binarias adicionales:

   *a*) No puede invertir en todas a la vez.

   *b*) Debe invertir en al menos una.

   *c*) La inversión 1 no puede ser elegida si la 3 lo es.

   *d*) La inversión 4 puede ser elegida sólo en el caso que también elija la 2.

   *e*) Debe, o bien elegir las inversiones 1 y 5 a la vez, o bien no elegir ninguna a la vez.

   *f*) Debe, o bien elegir al menos una de las inversiones 1,2,3, o bien al menos 2 de las inversiones 2,4,5,6.

2. Formule los siguientes problemas como Problemas de Programación Lineal Entera Mixta:

   *a*) Dados $C \in \mathbb{R}_+$ y $x_1, x_2$ tales que $0 \leq x_j \leq C$ para $j = 1, 2$, hallar $\min\{x_1, x_2\}$.

   *b*) Dados $C \in \mathbb{R}_+$ y $x_1, x_2$ tales que $0 \leq x_j \leq C$ para $j = 1, 2$, hallar $|x_1 - x_2|$.

   *c*) Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n, x^* \in X$, donde $X = \{x \in \{0,1\}^n : Ax \leq b\}$, hallar $\min\{cx : x \in X \backslash \{x^*\}\}$.

   *d*) Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n, x^* \in X$, donde $X = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b\}$, hallar $\min\{cx : x \in X \backslash \{x^*\}\}$.

3. Sean los poliedros $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^4_+ : 83x_1 + 61x_2 + 49x_3 + 20x_4 \leq 100\}$ y $P_2 = \{x \in \mathbb{R}^4_+ : 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4\}$. Pruebe que $P_2 \subsetneq P_1$.

4. Sean (PLE) $z_{IP} = \max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}$
   ($\mathrm{P}_{REL}$) $z_{LP} = \max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$. Pruebe que:

   *a*) $z_{IP} \leq z_{LP}$.

   *b*) Si $x^*$, la solución óptima de ($\mathrm{P}_{REL}$), es entera entonces $x^*$ también es una solución óptima de (PLE).

5. Formule los siguientes como problemas de Programación Entera Mixta y luego resuélvalos con LPsolve o SCIP:

*a*) En el Problema de la Planta Frigorífica, la empresa además dispone de 3 máquinas que, de habilitarse, permiten que se aumente la producción a 490 jamones, 440 lomos de cerdo, y 250 salchichones respectivamente, y que llamaremos máquinas J, L y S. Cada máquina tiene asociada un costo energético de \$50 por máquina habilitada. Además, por cuestiones operativas se debe cumplir que: 1) si se activa la máquina J entonces, o bien debe activarse la máquina L o bien la S, 2) si se activa la máquina L y la J no está activada, entonces también se debe activar la S.

*b*) En la versión de minimizar costos en la dieta variada del Problema de McDonalds, considere que además existe un costo fijo de \$ 0.50 por elegir un menú (es decir, si la cantidad fraccionaria de dicho menú es mayor estricto que 0). ¿Qué cambió respecto al tener en cuenta esta nueva restricción?
Ahora suponga que debe realizar la misma modificación, pero esta vez en el modelo de minimizar costos en la dieta estándar (es decir que los menues no se limitan a un máximo de 2), ¿Qué inconveniente encuentra y como lo resolvería?

6. Suponga que está asistiendo a una escuela de verano donde debe realizar 4 cursos por día. Cada curso dura una hora, pero debido a la gran cantidad de estudiantes, los cursos son repetidos varias veces en el dia por diferentes profesores. Ud. cuenta con la lista de cursos y sus repeticiones, que se pueden modelar como un conjunto $K = \{1, 2, 3, 4\}$ de cursos, un conjunto $I = \{(i, k) :$ repetición $i$ del curso $k, \ \forall\, k \in K\}$ y una lista de horarios $t_{ik} =$ hora entre las 8 a.m. y las 5 p.m. a la que comienza la repetición $i$ del curso $k$, para todo $(i, k) \in I$. Sus preferencias para elegir los horarios de los cursos son influenciadas por la reputación del profesor y la hora del día, las cuales las puede cuantificar en valores $p_{ik}$ para todo $(i, k) \in I$.

   *a*) Formule un problema de Programación Lineal Entera para poder obtener una planificación de horarios factible que maximice sus preferencias.

   *b*) Ud. observa que las jornadas son muy agotadoras. Modifique la formulación de manera que nunca tome más de dos horas consecutivas de clases sin un recreo.

   *c*) Su reloj despertador se rompió. Modifique la formulación de manera que su jornada comience lo más tarde posible.

7. Un conjunto de $n$ trabajos deben ser llevados a cabo por una computadora que puede realizar un trabajo a la vez. Cada trabajo $j$ tarda $p_j$ horas en ser completado. Además, los trabajos tienen asignada una prioridad $w_j$ de manera de que es deseable que los trabajos con mayor prioridad se ejecuten primero. Formule un problema de Programación Entera Mixta que permita conocer el horario de partida $s_j$ de cada trabajo, minimizando la suma ponderada $\sum_{j=1}^{n} w_j s_j$.

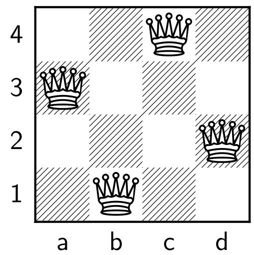
8. Usando LPsolve o SCIP, resuelva una instancia del Problema de Localización de Servicios sin restricciones de capacidad, donde $f_j$ es el costo de abrir un depósito y $c_{ij}$ el costo de satisfacer toda la demanda del cliente $i$ desde el depósito $j$, con 5 depósitos, 6 clientes, $f = (4, 3, 4, 4, 7)$ y

$$c = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 0 & 5 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

La formulación de este problema se encuentra en la pág. 10 de [LIP].

9. Formule y resuelva una instancia del Problema de Planificación de Lotes de Producción sobre 6 períodos, con demandas $(6,7,4,6,3,8)$, costos unitarios de producción $(3,4,3,4,4,5)$, costos unitarios de almacenamiento $(1,1,1,1,1,1)$, costos de set-up $(12,15,30,23,19,45)$ y una capacidad de producción máxima de 10 artículos por período. La versión no capacitada de este problema se encuentra en la pág. 11 de [LIP].

10. Considere el siguiente problema: dado $N \in \mathbb{Z}_+$, se parte de un tablero de $N \times N$ y se deben ubicar la mayor cantidad de reinas posibles, sabiendo que no pueden haber dos o más reinas en una misma fila, columna o diagonal. Por ejemplo, para $N = 4$ se pueden ubicar a lo sumo 4 reinas como lo indica el siguiente esquema[1]:




    *a*) Implemente un programa en C o C++ que, dado $N$ como valor de entrada, genere un archivo con el modelo de Programación Entera para resolver el problema de las $N$ reinas, donde se utilicen variables $x_{ij} \in \{0,1\}$ que indiquen si hay una reina en la casilla $(i,j)$ o no.

    *b*) Resuelva para $N = 10$ y muestre su solución con un esquema.

    *c*) Halle aquel $N$ para el cual su computadora no es capaz de resolver con SCIP el problema en el término de 10 minutos.

    *d*) Ahora considere la misma formulación pero relajando la integralidad de las variables binarias (es decir, que se permita que $x_{ij} \in [0,1]$ para todo $i$ y $j$). ¿Hasta qué $N$ es posible resolver esta nueva formulación con SCIP en el término de 10 minutos? ¿Cuál es la relación entre la cantidad de variables, la cantidad de restricciones y el tiempo consumido?

Bibligrafía:

[LIP] L. A. Wolsey. *Integer Programming*. Wiley-Interscience.

[1] En un tablero de $N \times N$, es claro que una solución no puede tener más de $N$ reinas. Si la tuviera, por el *Principio del Palomar*, hay al menos una columna con al menos 2 reinas, lo cual vuelve a la solución infactible. Por lo tanto, si una solución tiene $N$ reinas entonces es óptima.