FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
Escuela de Posgrado y Educación Continua

Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Pablo Torres

Práctica n° 1: Teoría de Grafos

En esta práctica asumimos que todos los grafos son simples (sin lazos ni aristas múltiples).

1. Sea G un grafo y $\overline{G}$ su complemento.

   a) Si G es isomorfo a $\overline{G}$, ¿cuál es el cardinal de $E(G)$? Mostrar que dos grafos G y H son isomorfos si y solo si $\overline{G}$ y $\overline{H}$ son isomorfos.

   b) Determinar todos los grafos no isomorfos con conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 4\}$.

2. Sea G el grafo que posee como conjunto de vértices a todos los subconjuntos de cardinal 2 del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y dos vértices son adyacentes si y sólo si los respectivos subconjuntos son disjuntos. Probar que G es isomorfo al grafo de Petersen, definido en [LMDC, pág. 545, figura 11.24(a)].

   En general, para $n \geq 2k$, el *grafo de Kneser* $KG(n, k)$ tiene por vértices todos los subconjuntos de cardinal k de un conjunto de cardinal n y dos vértices son adyacentes si sus correspondientes subconjuntos son disjuntos.

   a) Probar que $\alpha(KG(n, k)) \geq \binom{n-1}{k-1}$.

   b) Hallar $\omega(KG(n, k))$.

3. *a*) Probar que para todo grafo G, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.|E(G)|$, donde con $d(v)$ notamos el grado de v.

   b) Demostrar que en todo grafo, la cantidad de vértices de grado impar de todo grafo es par.

4. Sea $G = (V, E)$. Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

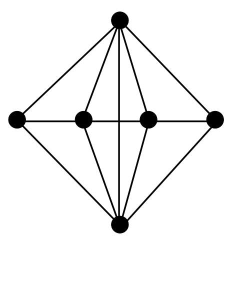
   a) G es un árbol,

   b) $|E| = |V| - 1$ y G es conexo,

   c) $|E| = |V| - 1$ y G es acíclico.

5. Determinar la cantidad de matchings perfectos en un grafo completo de $2n$ vértices.

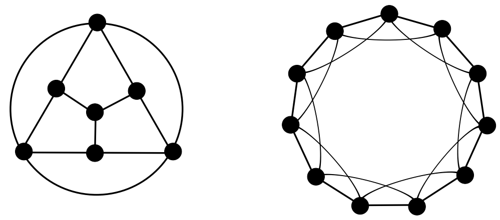
6. Determinar un estable, una clique y un 1-empaquetamiento de cardinales máximos para el grafo de Petersen y para el siguiente grafo:



7. *a*) Sea G^n el grafo con n componentes conexas, cada una de ellas isomorfa a K_2. ¿Cuántos estables maximales tiene G^n?

   b) Probar que existen grafos para los cuales el número de cliques maximales es de orden exponencial respecto al número de vértices.

8. Encontrar el número cromático de los siguientes grafos:



9. *a*) Probar que un conjunto estable y una clique comparten a lo sumo un vértice.

   b) Probar que un conjunto de vértices S es estable y dominante de G si y sólo si S es estable maximal de G.

10. *a*) Probar que si M y M' son matchings de G entonces toda componente conexa del grafo $G[(M \backslash M') \cup (M' \backslash M)]$ es un ciclo par o un camino.

    b) Mostrar que todo árbol tiene a lo sumo un matching perfecto.
    Sugerencia: Proceder por inducción o usar el ítem (a).

11. La *distancia* entre 2 vértices u y v, $d(u,v)$, es la cantidad de arcos del camino más corto entre u y v. El *diámetro* de un grafo G es $\max_{u,v \in V(G)} d(u,v)$. Probar que un grafo de diámetro a lo sumo dos no puede tener un 1-empaquetamiento de más de un elemento.

12. Demostrar que todo 1-empaquetamiento es un conjunto estable, pero no es válida la recíproca. Más aún, probar que la diferencia entre los cardinales máximos de un estable y un 1-empaquetamiento no es acotada. Es decir, para todo número natural k, existe un grafo G_k donde esa diferencia es al menos k.

13. Determinar un conjunto dominante y un código de identificación de cardinales mínimos para los ciclos de 4 y 5 vértices.

14. Sea S un subconjunto de vértices de un grafo G tal que $N[u] \cap S \neq N[v] \cap S$ para todo par de vértices u y v de G. Probar que existe $w \in V(G)$ tal que $S \cup \{w\}$ es un código de identificación de G.

15. [Ejercicio extra] Sea G un grafo con $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$, y sean $\Delta(G)$ el grado máximo de los vértices de G, $\delta(G)$ el grado mínimo de los vértices de G, $\chi(G)$ el número cromático de G, $\omega(G)$ el tamaño de la máxima clique de G, $\alpha(G)$ el cardinal del mayor conjunto estable de G y $\gamma(G)$ el cardinal del mínimo conjunto dominante de G. Probar:

    a) $\gamma(G)(\Delta(G)+1) \geq n$.

    b) Si G es bipartito entonces $\omega(G)\alpha(G) \geq n$. ¿Es cierta esta desigualdad para grafos en general?

    c) $\chi(G)\alpha(G) \geq n$. ¿Qué relación tiene esta desigualdad con la anterior?

    d) $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$.

e) $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.

f) $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.

g) $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n$.

h) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

i) $\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$.

Bibliografía:

[LMDC] R. Grimaldi. *Matemática Discreta y Combinatoria.* 3ra. edición. Pearson.

[LIGT] D. West. *Introduction to Graph Theory.* 2nd. Edition. Pearson.