FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
Escuela de Posgrado y Educación Continua

Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Pablo Torres

Práctica nº 3: Matroides y Algoritmos Golosos, Propiedad Hereditaria, Descripción de Familias por Subgrafo Prohibidos

1. Sea $G = (V, E)$ un grafo.

   a) Pruebe que si G es conexo, todo bosque maximal es un árbol.

   b) Pruebe que el *Problema del Árbol Generador Mínimo* se puede reducir al *Problema del Bosque de Peso Máximo*.

   c) Pruebe que, si $\mathcal{S} = E$ e $\mathcal{I} = \{J \subseteq \mathcal{S} : J \text{ es bosque de } G\}$, $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ es una matroide.

   d) Recordando que el algoritmo goloso resuelve correctamente el *Problema de Conjunto Independiente de Costo Máximo* sobre toda matroide y utilizando los items anteriores, pruebe que el algoritmo de Kruskal resuelve correctamente el *Problema del Árbol Generador Mínimo*.

2. Pruebe que las siguientes estructuras $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ son matroides:

   a) *Subconjuntos de columnas l.i.*: Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathcal{S} = \{1, \ldots, n\}$ e $\mathcal{I} = \{J \subseteq \mathcal{S} :$ las columnas indexadas por los elementos de J son l.i.$\}$.

   b) *Uniforme*: Sea $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}$ un conjunto finito e $\mathcal{I} = \{J \subseteq \mathcal{S} : |J| \leq k\}$.

3. Sea $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ un sistema independiente. Pruebe que los siguientes enunciados son equivalentes entre sí:

   (M2) Para todo $A \subset \mathcal{S}$ y $J_1, J_2 \in \mathcal{I}$ conjuntos independientes maximales de A, $|J_1| = |J_2|$.

   (M2') Para todos $J_1, J_2 \in \mathcal{I}$ tales que $|J_1| < |J_2|$, existe un $e \in J_2 \backslash J_1$ tal que $J_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

   (M2") Para todo $A \subset \mathcal{S}$ y $J \in \mathcal{I}$ tal que J es un conjunto independiente maximal de A, tenemos que J es un conjunto independiente máximo de A.

   Recuerde:

   - $J \in \mathcal{I}$ es *maximal* en $A \subset \mathcal{S}$ si $J \subset A$ y todo $e \in A \backslash J$ satisface $J \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$.
   - $J \in \mathcal{I}$ es *máximo* en $A \subset \mathcal{S}$ si $J \subset A$ y todo $J' \in \mathcal{I}$ tal que $J' \subset A$ satisface $|J'| \leq |J|$.

4. Considere un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$, es decir $E \subseteq V_1 \times V_2$.

   a) Pruebe que si $\mathcal{S} = E$ e $\mathcal{I}_M = \{J \subseteq E : J \text{ es un matching de } G\}$ entonces $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_M)$ es un sistema independiente pero no un matroide.

   b) Sea $\mathcal{S} = E$. Pruebe que, para $i = 1, 2$, si

   $$\mathcal{I}_i = \{J \subseteq E : \text{cada } v \in V_i \text{ es incidente en a lo sumo un arco de } J\},$$

   $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_i)$ es una matroide.

c) Pruebe que $\mathcal{I}_M = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

5. Sea un grafo $G = (V, E)$ y un conjunto $M \subseteq E$. Pruebe que M es un matching de G si y sólo si M es un estable de $L(G)$.

6. Se dice que una propiedad $\mathscr{P}$ sobre grafos es *hereditaria* (por subgrafos inducidos por nodos) si para cualquier grafo G que satisface $\mathscr{P}$, todo subgrafo inducido por nodos de G también satisface $\mathscr{P}$. Determine cuáles de las siguientes propiedades son hereditarias:

   a) G es bipartito

   b) G es planar

   c) G es grafo de línea

   d) G tiene un circuito euleriano

   e) G tiene un circuito hamiltoniano

   f) G tiene un k-coloreo

   g) G tiene un matching perfecto.

7. Para familias de grafos definidas de la forma

$$\mathcal{G} = \{G : G \text{ es un grafo con la propiedad } \mathscr{P}\},$$

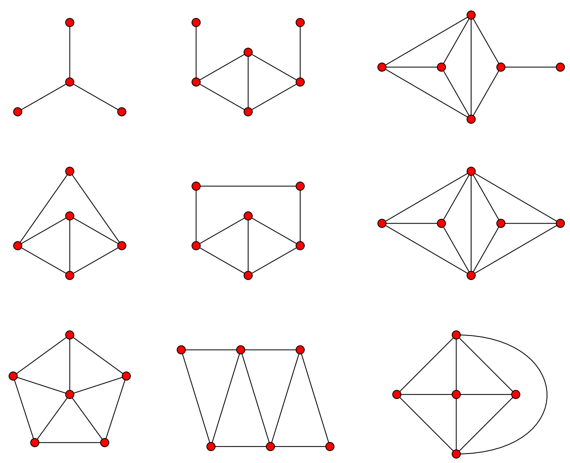
   con $\mathscr{P}$ una propiedad hereditaria, decimos que G es *mínimamente no* $\mathscr{P}$ si $G \notin \mathcal{G}$ y, para todo $v \in V(G)$, $G\backslash\{v\} \in \mathcal{G}$.

   a) Pruebe que $G \in \mathcal{G}$ si y sólo si G no contiene como subgrafo inducido ningún grafo mínimamente no $\mathscr{P}$.
   Observación: Por esta propiedad, los grafos mínimamente no $\mathscr{P}$ se denominan *subgrafos prohibidos minimales de* $\mathcal{G}$.

   b) ¿Cuáles son los subgrafos prohibidos de los grafos bipartitos? Justifique.

8. *a*) Pruebe que, en todo grafo de línea, sus aristas pueden ser particionadas en subgrafos completos de modo tal que todo nodo pertenece a lo sumo a dos subgrafos completos.

   b) Elija dos de los grafos siguientes, uno de 5 vértices y otro de 6, y pruebe que son mínimamente no de línea.



Observación: Se sabe que los grafos de la lista son todos los subgrafos prohibidos de los grafos de línea [GC, pág. 110].

Bibligrafía:

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization.* Wiley-Interscience.

[GC] Andreas Brandstädt, Van Bang Le, Jeremy P. Spinrad. *Graph classes: a survey.* SIAM monographs on discrete mathematics and applications, 1999.