



## Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

*Docentes:* Graciela Nasini, Daniel Severin, Pablo Torres

### PRÁCTICA N° 4: COMPLEJIDAD DE PROBLEMAS

1. Considere los siguientes problemas:

#### Problema de la Suma de Subconjunto (PSS)

*Entrada:*  $P \subset \mathbb{Z}$  finito y  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Pregunta:* ¿existe  $S \subseteq P$  tal que  $\sum_{p \in S} p = k$ ?

#### Búsqueda de Entero (BE)

*Entrada:*  $P \subset \mathbb{Z}$  finito y  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Pregunta:* ¿  $k \in P$  ?

Se sabe que PSS es  $\mathcal{NP}$ -completo [GJNP, pág. 223] y, claramente, BE es polinomial (en realidad es resoluble en tiempo lineal).

- Dada una entrada  $P; k$  de PPS, construimos la entrada de BE dada por  $P' = \{\sum_{s \in S} s : S \subset P\}$ ,  $k' = k$ . Pruebe que ésta es una transformación de PPS a BE.
- Dado que  $BE \in \mathcal{NP}$ ,  $PPS \in \mathcal{NP}$ -c y PPS se puede transformar a BE; ¿no estaría probado que  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ? Justifique.

2. Una red es un digrafo  $D = (V, A)$  y vector  $c \in \mathbb{Z}_+^A$  de capacidades asociadas a sus arcos. Dados dos vértices distinguidos  $s, t \in V$  (llamados *fuentes* y *sumidero* respectivamente), decimos que  $f \in \mathbb{Z}_+^A$  es un *st-flujo* de  $D$  si satisface:

- *Restricciones de capacidad:*  $f_e \leq c_e$  para todo  $e \in A$ , y
- *Conservación del flujo:*  $\sum_{v \in N^+(u)} f_{uv} = \sum_{v \in N^-(u)} f_{vu}$  para todo  $u \in V \setminus \{s, t\}$ .

El *valor del flujo*  $f$  se denota  $val(f)$  y es igual a  $val(f) = \sum_{v \in N^+(s)} f_{sv} = \sum_{v \in N^-(t)} f_{vt}$ .

Consideremos el siguiente conocido problema de optimización:

#### Problema de Flujo Máximo en una red (PFM)

*Entrada:*  $D = (V, A)$  digrafo,  $s, t \in V$  y  $c \in \mathbb{Z}_+^A$ .

*Objetivo:* hallar un *st-flujo* en  $D$  de valor máximo.

El algoritmo de *Ford-Fulkerson* es un algoritmo polinomial que resuelve PFM [LCO, pág. 47] y, por lo tanto,  $PFM \in \mathcal{P}$ . Por otro lado, recordemos el

#### Problema de Máximo Matching en Bipartitos

*Entrada:* un grafo bipartito  $G = (V, E)$ .

*Objetivo:* hallar un matching  $M \subset E$  tal que  $|M|$  es máximo.

Hemos probado que éste es un problema de Conjunto Independiente Máximo en un sistema independiente que es intersección de dos matroides y por lo tanto es polinomial. Sin embargo, no hemos visto la prueba de este resultado más general.

Pruebe que el *Problema de Máximo Matching en Bipartitos* es polinomial transformando el mismo en PFM.

*Sugerencia:* Consulte [LCO, pág. 47].

3. Considere la transformación de 3-SAT a EXACT COVER dada en el Corolario 9.5 de [LCO, pag. 319].
  - a) Construya el grafo  $G$  y determine el conjunto  $X$  y la colección de subconjuntos  $\mathcal{C}$  correspondiente a la fórmula  $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee \neg x_2)$ .
  - b) Pruebe que la transformación de 3-SAT a EXACT COVER es polinomial y correcta.
4. Pruebe que la transformación del *Problema del Circuito Hamiltoniano Dirigido* al *Problema del Circuito Hamiltoniano no Dirigido* dada en el Corolario 9.7 de [LCO, pag. 321] es polinomial y correcta.
5. Sea  $\Phi$  una fórmula 3-SAT con la siguiente propiedad que llamamos *estrella*: cada cláusula de  $\Phi$  tiene exactamente 3 literales distintos (recordemos que un literal es una variable o su negación). Por ejemplo,  $\Phi$  puede contener cláusulas como  $x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2$  (porque  $x_1$  y  $\neg x_1$  se consideran literales distintos) pero se prohíben cláusulas como  $x_1 \vee x_2$  (sólo tiene 2 literales) o  $x_1 \vee x_1 \vee \neg x_2$  ( $x_1$  está repetido). Definimos el siguiente problema:

*Problema 3-SAT\**

*Entrada:* una fórmula  $\Phi$  3-SAT que satisface la propiedad estrella.

*Pregunta:* ¿es satisfactible  $\Phi$  para alguna asignación de sus variables?

Demuestre que 3-SAT\* es  $\mathcal{NP}$ -completo (reduciendo polinomialmente 3-SAT a 3-SAT\*).

6. Consideremos el **Problema de Dominación Múltiple** (PDM) definido así:

*Entrada:*  $G = (V, E)$  un grafo,  $k, \alpha \in \mathbb{Z}_+$ .

*Pregunta:* ¿existe un conjunto  $k$ -dominante de  $G$  de tamaño a lo sumo  $\alpha$ ?

Pruebe que PDM se resuelve en tiempo polinomial en los siguientes casos:

- a)  $\delta(G) \leq k - 2$
- b)  $\alpha \leq k - 1$
- c)  $\alpha = k$
- d)  $\alpha \geq n$
- e)  $k = n$ .

*Observación:*  $n = |V|$ ;  $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$ , es decir, el grado mínimo de  $G$ .

7. Para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$ , definimos el **Problema de  $k$ -Dominación** ( $PkD$ ) así:

*Entrada:*  $G = (V, E)$  un grafo,  $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ .

*Pregunta:* ¿existe un conjunto  $k$ -dominante de  $G$  de tamaño a lo sumo  $\alpha$ ?

Análogamente, el **Problema de  $k$ -Empaquetamiento** ( $PkE$ ) se define por:

*Entrada:*  $G = (V, E)$  un grafo,  $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ .

*Pregunta:* ¿existe un  $k$ -empaquetamiento de  $G$  de tamaño al menos  $\alpha$ ?

Sean  $r$  y  $k$  tales que  $1 \leq k < r$  y  $k' = r + 1 - k$ . Sea  $\mathcal{G} = \{G : G \text{ es un grafo } r\text{-regular}\}$ . Pruebe que  $PkD(\mathcal{G})$  se puede reducir polinomialmente a  $Pk'E(\mathcal{G})$  y  $PkE(\mathcal{G})$  se puede reducir polinomialmente a  $Pk'D(\mathcal{G})$ .

8. Para todo  $k \geq 1$ , considere la transformación del *Problema del Conjunto Estable Máximo* (PCEM) a PkE en grafos split desarrollada en el Teorema 1 de [DOMPACK]. Dado un grafo  $G$  sea  $G'$  el grafo split que se obtiene por dicha transformación.

- a) Sea  $k = 3$  y  $G = (V, E)$  con  $V = \{1, \dots, 5\}$  y  $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 4)\}$ . El conjunto  $\{4, 5\}$  es un estable de  $G$  que certifica la respuesta positiva al problema PCEM si  $\alpha = 2$ . Construya  $G'$  y luego proponga un 3-empaquetamiento de  $G'$  que certifique la respuesta positiva de PkE para  $\alpha' = k\alpha$ .
- b) Justifique que la transformación utilizada en el teorema es polinomial.
- c) Dado  $B$  un  $k$ -empaquetamiento de  $G'$  pruebe que, para todo para todo  $e = v_p v_q \in E(G) \cap B$  siempre existe  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $v_p^i \notin B$  y  $v_q^i \notin B$ .
- d) Sea  $k=1$ . Pruebe que si  $I$  es un estable de  $G$  entonces  $I$  es un 1-empaquetamiento de  $G'$ . Recíprocamente, pruebe que si  $G'$  tiene un 1-empaquetamiento de tamaño  $s$ ,  $G$  tiene un estable  $I$  de tamaño  $s$ .

9. Considere la transformación del *PDM en Bipartitos* al *PEL en Bipartitos* desarrollada en el Teorema 2 de [DOMPACK]: sea  $G = (V, E)$  un grafo bipartito,  $k, \alpha \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $k \leq \min\{\alpha - 1, \delta(G) + 1\}$  (si no se satisface, sabemos que el problema es polinomial por el Ejercicio 6) y se propone un grafo bipartito  $G' = (V', E')$  tal que

- $V' = V \cup \bigcup_{v \in V} S_v$ , donde  $S_v = \{x_1^v, x_2^v, \dots, x_{\Delta(G)-d(v)}^v\}$  para cada  $v \in V$ ,
- $E' = E \cup \bigcup_{v \in V} \{(v, x) : x \in S_v\}$ .

y un  $k' = \Delta(G) - k + 1$  y  $\alpha' = |V'| - \alpha$  (donde  $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$ ).

- a) La instancia del PDM  $G = (V, E)$  con  $V = \{1, \dots, 6\}$  y  $E = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (2, 6)\}$ ;  $k = 2$ ;  $\alpha = 5$  tiene una respuesta positiva y se puede certificar con el conjunto dominante  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ . Construya el grafo  $G'$  y proponga un  $k$ -empaquetamiento de  $G'$  de tamaño  $|V'| - \alpha$  a partir del conjunto dominante dado.
- b) Pruebe que, si  $G$  es regular, entonces  $G' = G$ .
- c) Pruebe que los vértices de  $V$  en  $G'$  tienen grado  $\Delta(G)$  y los vértices nuevos (los de  $\bigcup_{v \in V} S_v$ ) tienen grado 1.
- d) Pruebe que  $G'$  es bipartito indicando los vértices que conforman la bipartición.
- e) Justifique que la transformación es polinomial.
- f) Sean  $G$  y  $k$  tales que  $\Delta(G) \leq k \leq \Delta(G) + 1$  y sea  $D$  un conjunto  $k$ -dominante de  $G$  tal que  $|D| \leq \alpha$ . Pruebe que  $B = V' \setminus D$  es un  $k'$ -empaquetamiento de  $G'$  tal que  $|B| \geq \alpha'$ .
- g) Pruebe que si  $G'$  tiene un  $k'$ -empaquetamiento de  $B$  tal que  $|B| \geq \alpha'$ ,  $G'$  tiene un  $k'$ -empaquetamiento de  $B'$  tal que  $|B'| \geq \alpha'$  y  $S_v \subset B'$  para todo  $v \in V'$ .

#### Bibliografía:

[DOMPACK] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *The multiple domination and limited packing problems in graphs*. Inform. Proc. Let. 111 (2011) 1108-1113.

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience.

[GJNP] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman.