Tópicos Avanzados en Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Pablo Torres

Práctica nº 5: Descomposición Modular y Clique-Width

1. *a*) Dado $G = (V, E)$ y pesos $w \in \mathbb{Z}^V$, denotemos con $S(G)$ a un conjunto estable de peso máximo en G. Determine cómo encontrar $S(G_1 \cup G_2)$ y $S(G_1 \vee G_2)$ si se conoce $S(G_1)$ y $S(G_2)$.

   b) Recuerde que $\chi(G)$ es el número cromático de G. Calcule $\chi(G_1 \cup G_2)$ y $\chi(G_1 \vee G_2)$ en función de $\chi(G_1)$ y $\chi(G_2)$.

   c) Dibuje el grafo
   $$G = (\{v_1\} \cup \{v_2\}) \vee \big(\{v_3\} \vee (\{v_4\} \cup \{v_5\})\big)$$
   y describa los pasos que realizaría el algoritmo de descomposición modular para obtener $\chi(G)$ y $S(G)$.

2. Un grafo $G = (V, E)$ es una *araña* de peso r si V puede ser particionado en conjuntos S, C y H (H puede ser vacío) tales que $|S| = |C| \geq 2$, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ es un conjunto estable, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ es una clique, todo vértice de H es adyacente a todo vértice de C, todo vértice de H no es adyacente a ningún vértice de S y además se cumple una de las siguientes condiciones:

   I) $(s_i, c_j) \in E \Leftrightarrow i = j$ (araña *flaca*); II) $(s_i, c_j) \in E \Leftrightarrow i \neq j$ (araña *gorda*).

   a) Pruebe que G es una araña flaca si y sólo si $\overline{G}$ es una araña gorda.

   b) Pruebe que si $G = (S, C, H)$ es un grafo araña, G es split si y sólo si $G[H]$ es split.

   c) Determine $S(G)$ y $\chi(G)$ cuando G es una araña flaca o gorda (en función de $S(H)$ y $\chi(H)$, respectivamente).

3. Dado un grafo $G = (V, E)$, la *distancia* entre dos vértices u, v, denotada $dist(u, v)$, es la longitud (cantidad de aristas) del camino más corto entre u y v. De no existir dicho camino se dice que la distancia es ∞. Un *k-ρ-coloreo* de G es una función $f : V \mapsto \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que si $f(u) = f(v) = i$ entonces $dist(u, v) \geq i + 1$. El *número ρ-cromático* de G, que notamos $\chi_\rho(G)$ es el mínimo k tal que G admite un k-ρ-coloreo.

   a) Hallar $\chi_\rho(P_4)$, $\chi_\rho(P_5)$ y $\chi_\rho(C_5)$.

   b) Calcular el número ρ-cromático de los grafos araña sin cabeza, i.e. $H = \varnothing$.

   c) Probar que si el diámetro de G es a lo sumo 2 entonces $\chi_\rho(G) = |V| + 1 - \alpha(G)$, donde $\alpha(G)$ es el número de estabilidad de G. El diámetro de un grafo es el máximo de las distancias entre sus vértices, i.e. $diam(G) = \text{máx}\{dist(u, v) : u, v \in V\}$.

4. Dado $r \geq 2$, A_r^0 es la araña gorda sin cabeza de peso r. Para $k \geq 1$, A_r^k es la araña gorda de peso r y cuya cabeza es isomorfa a A_r^{k-1}.

a) Hallar $\chi_\rho(A_r^0)$ para todo $r \geq 2$.

b) Calcular $\chi_\rho(A_5^2)$.

c) Determinar $\chi_\rho(A_r^k)$ para todo $k \geq 0$ y $r \geq 2$.

Sugerencia: Usar resultados del ejercicio anterior.

5. Sea $q \geq 4$. Un grafo $G = (V, E)$ es $(q, q-4)$ si para todo conjunto $S \subset V$ tal que $|S| = q$, $G[S]$ tiene a lo sumo $q-4$ caminos P_4 inducidos diferentes. Los grafos $(4, 0)$ se denominan *cografos* y los $(5, 1)$, grafos P_4-*sparse*.

   a) Demuestre que la clase de grafos $(q, q-4)$ es hereditaria.

   b) Pruebe que si G es una araña sin cabeza entonces G es P_4-sparse.

   c) Pruebe que si G es una araña con cabeza $H \neq \varnothing$ entonces

   $$\text{“}G \text{ es } P_4\text{-sparse} \Leftrightarrow G[H]\ P_4\text{-sparse”}.$$

   d) Pruebe que:

   (i) todo grafo $(4, 0)$ es un grafo $(q, q-4)$ para todo $q \geq 5$,

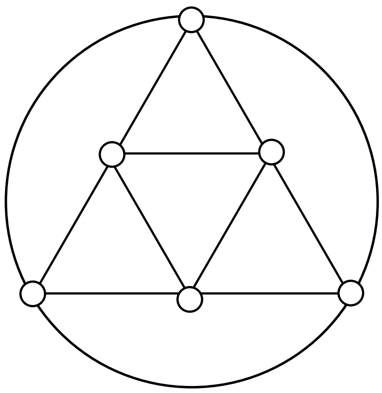
   (ii) existen grafos $(5, 1)$ que no son $(6, 2)$,

   (iii) **(opcional)** existen grafos $(5, 1)$ que son $(7, 3)$ pero no son $(q, q-4)$ para ningún $q \geq 6$ y $q \neq 7$.

   Sugerencia: para las partes (ii) y (iii), considere las arañas sin cabeza.

6. Hallar el número de 3-empaquetamiento del siguiente grafo por medio del algoritmo de descomposición modular.

   Sugerencia: véase Proposition 6 de [DOMPACK].



7. Sea $G = (V, E)$ un grafo, capacidades $c \in \mathbb{Z}_+^V$ y un conjunto de nodos admisibles $\mathscr{A} \subset V$ Decimos que B es un $(c, \mathscr{A})$-*empaquetamiento* de G si $B \subset \mathscr{A}$ y para todo $v \in V$, $|N[v] \cap B| \leq c_v$.

   Por otro lado, dado $T = (V, E)$ un árbol, $v \in V$ es *hoja* de T si $d(v) = 1$ y w es *stem* de T si tiene al menos una hoja de T en su vecindad. Notamos $L(T)$ y $S(T)$ al conjunto de hojas y stems de T, respectivamente. Además, si $v \in L(T)$, notamos $s(v)$ al vértice stem adyacente a v. Dado $w \in S(T)$, notamos n_w a la cantidad de hojas adyacentes a w.

   Dado un árbol $T = (V, E)$, $c \in \mathbb{Z}_+^V$ y $\mathscr{A} \subset V$ pruebe:

a) Sea $l \in L(T)$ tal que $c_l = 0$. Entonces B es un $(c, \mathscr{A})$-*empaquetamiento* de T si y sólo si B es un $(c', \mathscr{A} \backslash \{l, s(l)\})$-*empaquetamiento* de $T \backslash \{l\}$.

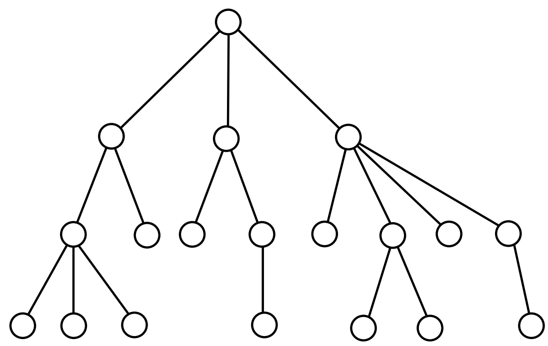
b) Suponga que, para todo $v \in L(T)$, $c_v \geq 1$ y $v \in \mathscr{A}$. Sea $s \in S(T)$ tal que $c_s < n_s$ y $H_s \subset L(T) \cap N(s)$ de cardinal $n_s - c_s$. Entonces existe un $(c, \mathscr{A})$-*empaquetamiento* de T de cardinal máximo B tal que B es un $(c', \mathscr{A} \backslash H_s)$-*empaquetamiento* de $T \backslash H_s$ de cardinal máximo.

En los casos a) y b), $c'_v = c_v$ para todo $v \in V'$ donde V' es el conjunto de vértices correspondiente al sugrafo de T respectivo.

c) Suponga que, para todo $v \in L(T)$, $c_v \geq 1$ y $v \in \mathscr{A}$ y para todo $s \in S(T)$, $c_s \geq n_s$. Entonces existe un $(c, \mathscr{A})$-*empaquetamiento* de T de cardinal máximo B tal que $L(T) \subset B$ y $B' = B \setminus L(T)$ es un $(c', \mathscr{A} \backslash L(T))$-*empaquetamiento* de $T \backslash L(T)$ de cardinal máximo, donde $c'_v = c_v$ para todo $v \in V \backslash (L(T) \cup S(T))$ y $c'_s = c_s - n_s$ si $s \in S(T)$.

Sugerencia: véase [PACKTREE].

8. Resuelva el *Problema de 3-empaquetamiento* para el siguiente árbol, utilizando el algoritmo para resolver el *Problema de Empaquetamiento Generalizado*:



9. Demuestre que $cw(K_n) = 2$ si $n \geq 2$. ¿Son los grafos completos los únicos grafos con clique-width 2?

   Nota: la definición de clique-width la puede encontrar en [APUNTE_CW].

10. Halle $cw(P_3)$. Pruebe que $cw(P_n) = 3$ si $n \geq 4$.

11. Pruebe que los árboles tienen clique-width a lo sumo 3.

12. Halle $cw(C_5)$ y $cw(C_6)$. Demuestre que $cw(C_n) \leq 4$ si $n \geq 7$.

13. Sean G y H dos grafos disjuntos y $v \in V(G)$, luego $G[H/v]$ denota el grafo obtenido por *reemplazo* en G de v por H, i.e. $V(G[H/v]) = (V(G) \cup V(H)) - \{v\}$ y

$$E(G[H/v]) = E(H) \cup \{e : e \in E(G) \text{ y } e \text{ es no incidente en } v\} \cup \{uw : u \in V(H),\ w \in V(G) \text{ y } w \text{ es adyacente a } v \text{ en } G\}.$$

    Pruebe que $cw(G[H/v]) \leq \text{máx}\{cw(G), cw(H)\}$.

14. Pruebe que los grafos bipartitos y los grafos split tienen clique-width no acotado.

    Sugerencia: pruebe que $\mathscr{F}_n \geq 2^{\frac{n^2}{4}}$, donde $\mathscr{F}_n$ se define en [APUNTE_CW].

15. Exprese la propiedad de conexidad de un grafo como una fórmula MSOL.

16. Pruebe que los problemas de optimización de "k-empaquetamiento de cardinal máximo" y "conjunto k-dominante de cardinal mínimo" son problemas LinEMSOL(τ_1).

17. Sean un grafo $G = (V, E)$, un entero positivo k y una función $f : V \mapsto \{0, \ldots, k\}$. Para cualquier $U \subset V$, denotamos $f(U) = \sum_{u \in U} f(u)$. Decimos que f es una *función* $\{k\}$-*dominante de* G si $f(N[v]) \geq k$ para todo $v \in V$. El problema de $\{k\}$-dominación consiste en hallar una función $\{k\}$-dominante de peso mínimo, i.e. tal que $f(V)$ sea mínimo. El parámetro $\gamma_{\{k\}}(G)$ vale dicho peso. Además, dado otro grafo H, notamos $G \odot H$ al grafo obtenido reemplazando todos los vértices de G por H (véase [APUNTE_CW]).

    a) Verifique que $\gamma_{\{3\}}(C_6) = \gamma_3(C_6 \odot K_3)$ sin calcular explícitamente los parámetros.

    b) Pruebe que $\gamma_{\{k\}}(G) = \gamma_k(G \odot K_k)$ para todo $k \geq 2$.

18. Demuestre que el problema de $\{k\}$-dominación es polinomial en familias de grafos con clique-width acotado por una constante.

Bibliografía:

[PACKTREE] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *Arbitrary Limited Packings in Trees.* Manuscript.

[DOMPACK] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *The multiple domination and limited packing problems in graphs.* Inform. Proc. Let. 111 (2011) 1108-1113.

[COURCELLE] B. Courcelle, J. A. Makowsky, U. Rotics. *Linear Time Solvable Optimization Problems on Graphs of Bounded Clique Width.* Theory of Computing Systems 33 (2000) 125–150.

[APUNTE_CW] Apunte de la cátedra que contiene un repaso de las definiciones de clique-width, MSOL, LinEMSOL y el Teorema de Courcelle.