Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Paola Tolomei, Pablo Torres

Práctica nº 0 (primera parte): Programación Lineal.

1. Modele los siguientes problemas como Programas Lineales y resuelva los mismos utilizando LPsolve o SCIP (ver Tareas de Laboratorio al final)

   a) **Planta Frigorífica:** Un frigorífico produce diariamente 480 jamones, 400 lomos de cerdo, y 230 salchichones cada día. Cada uno de estos productos puede ser vendido fresco o ahumado. El número total de jamones, lomos y salchichones que pueden ser ahumados en un día normal de trabajo es 420. Además, hasta 250 productos pueden ser ahumados durante horas extras a un costo más alto.

   Las ganancias netas de los productos vendidos frescos son: $8 para los jamones, $4 para los lomos y $4 para los salchichones. Las ganancias netas de los productos vendidos ahumados en tiempo normal son $14 para los jamones, $12 para los lomos y $13 para los salchichones, y ahumados en horas extras, $11 para los jamones, $7 para los lomos y $9 para los salchichones.

   El objetivo es encontrar la combinación de productos que maximiza la ganancia neta diaria total. Asumimos que la estrategia puede incluir decisiones que involucren fracciones de las piezas.

   b) **Disminución de la Contaminación:** Una empresa de acero debe reducir su emisión anual de tres tipos de contaminantes acorde a nuevos estándares, y se propone lograr este objetivo de la forma más económica.

   La reducción requerida (en millones de lb. por año) es de: 60 de partículas de materia, 150 de óxidos de azufre y 125 de hidrocarburos.

   La fabricación de acero tiene dos fuentes principales de contaminación, los altos hornos para fabricar el arrabio y los hornos de hogar abierto para transformar el hierro en acero. En ambos casos, se determinó que los métodos de abatimiento más efectivos son: aumentar la altura de las chimeneas [1], usar filtros en las chimeneas e incluir limpiadores de alto grado en los combustibles de los hornos.

   Todos estos métodos tienen limitaciones tecnológicas en cuanto a la cantidad de emisión que pueden eliminar en cada tipo de hornos, las cuales se resumen en la siguiente tabla (en millones de lb. por año):

Contaminante	**Chimeneas más altas**		**Filtros**		**Mejores combustibles**	
	Altos hornos	Hornos de hogar abierto	Altos hornos	Hornos de hogar abierto	Altos hornos	Hornos de hogar abierto
Partículas	12	9	25	20	17	13
Óxidos de azufre	35	42	18	31	56	49
Hidrocarburos	37	53	28	24	29	20

[1] las actuales regulaciones eliminan los incentivos para elevar la altura de las chimeneas, ya que se cree que generan más lluvia ácida al mantener los óxidos de azufre durante un tiempo más prolongado en el aire.

En la siguiente tabla se muestran las estimaciones de los costos totales de cada método de abatimiento en el caso de que fueran aplicado al 100 % de los hornos (en millones de dólares):

Método de Abatimiento	Altos hornos	Hornos de hogar abierto
Chimeneas más altas	8	10
Filtros	7	6
Mejores combustibles	11	9

La conclusión de los ingenieros fue que tendrían que usar alguna combinación de métodos. El objetivo es determinar los porcentajes de cada método de manera de satisfacer los requisitos ambientales y minimizar el costo estimado.

c) **Dieta McDonalds:**

En la siguiente la tabla se muestran los nutrientes diarios necesarios para una alimentación apropiada:

Nutriente	Valor nutritivo mínimo	Valor nutritivo máximo
Calorías	2000	
Carbohidratos	350	375
Proteinas	55	
Vitamina A	100	
Vitamina C	100	
Calcio	100	
Hierro	100	

A continuación, los valores nutritivos de los diferentes menúes disponibles en Mc Donalds[2]:

		Nutrientes						
Menúes	Precio	Cal	Carb	Prot	Vit. A	Vit. C	Calcio	Hierro
Cuarto de Libra con queso	$ 1.84	510	34	28	15	6	30	20
MacNífica con queso	$ 2.19	370	35	24	15	10	20	20
Big Mac	$ 1.84	500	42	25	6	2	25	20
MacFish filet	$ 1.44	370	38	14	2	0	15	10
MacChicken	$ 2.29	400	42	31	8	15	15	8
Papas fritas chicas	$ 0.77	220	26	3	0	15	0	2
Salsa MacMuffin	$ 1.29	345	27	15	4	0	20	15
Yoghurt diet	$ 0.60	110	12	9	10	4	30	0
Jugo de naranja	$ 0.72	80	20	1	2	120	2	2

1) Asumiendo que se pueden comprar cantidades fraccionarias de cada menú, determine el *costo mínimo* necesario para comer en McDonalds de manera de cubrir los nutrientes necesarios mínimos para una buena alimentación.
2) Determine la cantidad de calorías ingeridas en la dieta que resultó del ítem anterior.
3) Resuelva el mismo problema anterior agregando la restricción de no superar las 2500 calorías.
4) Modifique el problema anterior ajustando la nueva restricción a una dieta hipocalórica, es decir que las calorías ingeridas no pueden superar las 2000.
5) Determine el mínimo de calorías a ingerir en caso de comer en McDonalds asegurando los nutrientes necesarios para una buena alimentación.

[2]USA (2000).

6) Considere el caso en que se desea agregar variedad a la dieta, en el sentido de que no se pueda comer mas de dos menúes del mismo tipo. Resuelva tanto el problema de minimizar costos como el de minimizar calorías con esta propiedad, y luego realice un cuadro comparativo de los resultados obtenidos, con el siguiente formato:

Dieta variada	Costo mínimo	Calorías para costo mínimo	Calorías mínimas	Costo para calorías mínimas
No				
Si				

2. Formule los siguientes problemas como un Programa Lineal en forma canónica, es decir $\max\{cx : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n_+\}$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$:

a)
$$\begin{array}{rl} \max & 2x_1 + x_2 \\ s/a & 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 4x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + 2x_2 \\ s/a & |x_1 + x_2 + x_3| \leq 1 \\ & |2x_1 + x_2 - 2| \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rl} \min & |x_1| + |x_2| + |x_3| \\ s/a & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_3 = 3 \end{array}$$

3. Sea $\{\hat{x}_i : i = 1, \ldots, s\}$ un conjunto de soluciones óptimas de un programa lineal (PL) y $\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, s$, tales que $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$. Probar que $x^* = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \hat{x}_i$ es solución óptima de (PL).

4. Dado

$$(PL) \quad \begin{array}{ll} & \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \forall\ i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \quad \forall\ j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

y su problema Auxiliar asociado

$$(PA) \quad \begin{array}{ll} & \min x_0 \\ \text{s.t.} & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 \leq b_i, \quad \forall\ i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \quad \forall\ j = 0, \ldots, n. \end{array}$$

Probar que (PL) es factible si y sólo si el valor óptimo de (PA) es cero.

5. Dado (P) $\max\ \{cx\ :\ Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n_+\}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, notamos P_D a su problema dual, (P_D) $\min\ \{by\ :\ yA \geq c,\ y \in \mathbb{R}^m_+\}$.

Pruebe:

a) $(P_D)_D = P$,

b) Sean x e y soluciones factibles de (P) y (P_D) respectivamente. Entonces $c.x \leq b.y$.

c) Si P es no acotado, P_D es no factible.

d) Existen pares de problemas duales no factibles.

e) x e y soluciones factibles de (P) y (P_D) respectivamente. Entonces, x e y son soluciones óptimas de cada problema si y sólo si $c.x = b.y$.

f) (P) tiene una solución óptima si y sólo si (P_D) tiene solución óptima.

g) x e y soluciones factibles de (P) y (P_D) respectivamente. Entonces, x e y son soluciones óptimas de cada problema si y sólo si $y_i(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $x_j(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

h) Sea (P') una modificación de (P) que consiste en alterar el lado derecho de sus restricciones según un vector $t \in \mathbb{R}^m$, es decir (P') *max* $\{cx \ : \ Ax \leq b + t, \ x \in \mathbb{R}^n_+\}$. Probar que si x^* e y^* son soluciones óptimas de (P) y (P_D) respectivamente, el valor óptimo de (P') es *a lo sumo* $cx^* + ty^*$.

Nota: Si $t = t_i e^i$ con e^i el i-ésimo versor canónico para algún $i = 1, \ldots, m$ existe un entorno de valores para t_i donde el valor óptimo de (P') es *exactamente igual* a $cx^* + ty^* = cx^* + t_i y_i^*$.

6. Para cada uno de los siguientes PL's, exprese el valor óptimo y la solución óptima en términos de los parámetros de los problemas $(c, k, d, \alpha, d_1, d_2)$. Si la solución óptima no es única, es suficiente dar una de ellas.

   a) min $\{cx : 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}^n\}$

   b) min $\{cx : -1 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1; x \in \mathbb{R}^n\}$.

   c) min $\{cx : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 1; x \in \mathbb{R}^n\}$.

   d) max $\{cx : \sum_{i=1}^{n} x_i = k; 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}^n\}$ $(1 \leq k \leq n)$.

   e) max $\{cx : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k; 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}^n\}$ $(1 \leq k \leq n)$.

   f) max $\{cx : \sum_{i=1}^{n} y_i = k; -y \leq x \leq y \leq 1, x, y \in \mathbb{R}^n\}$ $(1 \leq k \leq n)$.

7. Determine los problemas duales de los programas lineales del ejercicio 6. Demuestre que la solución óptima propuesta en el problema del ejercicio 6.e, max $\{cx : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq k; x \leq 1, x \in \mathbb{R}^n_+\}$, es efectivamente óptima dando una solución factible de su problema dual y aplicando alguna propiedad del ejercicio anterior.

8. Sean la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, los vectores $B, d \in \mathbb{R}^n$ y los escalares $U, \alpha \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$. Consideremos el siguiente problema de control:

$$
(1) \qquad \begin{array}{ll} & \text{maximizar } d^T x(N) \\ \text{s.t.} & \\ & |u(t)| \leq U, \qquad \forall\, t = 0, \ldots, N-1 \\ & \sum_{t=0}^{N-1} |u(t)| \leq \alpha \end{array}
$$

donde los $x(t) \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}$ están relacionados a través de la recursión:

$$
x(0) = \mathbf{0}, \qquad x(t+1) = A.x(t) + u(t).B \ \ \forall\, t = 0, \ldots, N-1
$$

Observe que las variables del problema son $u(0), u(1), \ldots, u(N-1)$.

a) Modele el problema (1) como un Programa Lineal.

b) Implemente un algoritmo en C, C++ o SciLab para resolverlo directamente (sin recurrir a un optimizador lineal).
Sugerencia: El problema es una variación del ejercicio 6.e.

c) Resuelva la siguiente instancia (la cual proviene de una aplicación para describir el movimiento de dos masas unidas por un resorte):

$$A = \begin{pmatrix} 9,9007 \times 10^{-1} & 9,9340 \times 10^{-3} & -9,4523 \times 10^{-3} & 9,4523 \times 10^{-3} \\ 9,9340 \times 10^{-2} & 9,0066 \times 10^{-1} & 9,4523 \times 10^{-2} & -9,4523 \times 10^{-2} \\ 9,9502 \times 10^{-2} & 4,9793 \times 10^{-4} & 9,9952 \times 10^{-1} & 4,8172 \times 10^{-4} \\ 4,9793 \times 10^{-3} & 9,5021 \times 10^{-2} & 4,8172 \times 10^{-3} & 9,9518 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 9,9502 \times 10^{-2} \\ 4,9793 \times 10^{-3} \\ 4,9834 \times 10^{-3} \\ 1,6617 \times 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U = 2, \quad \alpha = 161, \quad N = 100.$$

Sugerencia: Puede bajar la instancia de la pág. de la Cátedra, como `control.sci`.

9. Utilizando la información que brinda LPsolve del problema dual conteste las siguientes preguntas:

   - Problema de la Planta Frigorífica: la empresa analiza la posibilidad de realizar una inversión que le permitiría aumentar la producción diaria de alguno de los 3 productos, ¿cuál es el producto que más promete ganancias? ¿hasta cuánto estaría dispuesta la empresa a invertir de manera que esta inversión resulte rentable? ¿cuál sería la pérdida monetaria si la empresa debe reducir en 10 unidades la capacidad de ahumar sus productos en tiempo normal?
   - Problema de Disminución de la Contaminación: si la reducción requerida en la tasa de emisión anual de partículas de materia aumenta hasta 70 millones de lb., ¿cuál es el costo adicional que implica para la empresa? Si el gobierno decide implementar un subsidio para desincentivar la elevación de chimeneas, ¿cuánto debería pagarle a la empresa para que ésta reduzca a la mitad su porcentaje de altos hornos a los que se les hará chimeneas más altas, sin perder dinero?

Tareas de Laboratorio

Esta práctica requiere el uso de las herramientas LPsolve y SCIP. LPsolve es un editor y optimizador de PL/PLE para problemas pequeños. SCIP es el mejor solver no comercial disponible para optimizar PL/PLE. Los instaladores y manuales se encuentran en la pág. de la Cátedra.

Nota: Para que pueda usar el mismo formato LP tanto en LPsolve como en SCIP, elija la opción "View → XLI_CPLEX" en LPsolve antes de editar un archivo. Luego de resolver, se puede navegar el resultado en LPsolve con la opción "Result → Objective". Para obtener la solución dual vaya a "Result → Sensitivity → Duals", y tome los valores de la columna "Value"; para obtener el entorno de valores para los cuales se puede aplicar la nota del ejercicio 5.h para una restricción a la vez tome los valores de las columnas "From" y "Till".