



## Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

*Docentes:* Graciela Nasini, Daniel Severin, Paola Tolomei, Pablo Torres

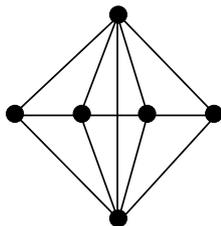
---

### PRÁCTICA N° 1: TEORÍA DE GRAFOS

En esta práctica asumimos que todos los grafos son simples (sin lazos ni aristas múltiples).

- Probar que para todo grafo  $G$ ,  $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$ , donde con  $d(v)$  notamos el grado de  $v$ .
  - Demostrar que en todo grafo, la cantidad de vértices de grado impar es par.
- Sea  $G$  un grafo y  $\overline{G}$  su complemento.
  - Si  $G$  es isomorfo a  $\overline{G}$ , ¿cuál es el cardinal de  $E(G)$ ? Mostrar que dos grafos  $G$  y  $H$  son isomorfos si y solo si  $\overline{G}$  y  $\overline{H}$  son isomorfos.
  - Determinar todos los grafos no isomorfos con conjunto de vértices  $\{1, 2, 3, 4\}$ .
- Determinar la cantidad de matchings perfectos en un grafo completo de  $2n$  vértices.
- En general, para  $n \geq 2k$ , el *grafo de Kneser*  $KG(n, k)$  tiene por vértices todos los subconjuntos de cardinal  $k$  de un conjunto de cardinal  $n$  y dos vértices son adyacentes si sus correspondientes subconjuntos son disjuntos.
  - Probar que  $KG(5, 2)$  es isomorfo al grafo de Petersen, definido en [LMDC, pág. 545, figura 11.24(a)].
  - Probar que  $\alpha(KG(n, k)) \geq \binom{n-1}{k-1}$ .
  - Hallar  $\omega(KG(n, k))$ .
- Sea  $G = (V, E)$ . Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes:
  - $G$  es un árbol,
  - $|E| = |V| - 1$  y  $G$  es conexo,
  - $|E| = |V| - 1$  y  $G$  es acíclico.
- Sea  $G^n$  el grafo con  $n$  componentes conexas, cada una de ellas isomorfa a  $K_2$ . ¿Cuántos estables maximales tiene  $G^n$ ?
  - Probar que existen grafos para los cuales el número de cliques maximales es de orden exponencial respecto al número de vértices.

7. Determinar un estable, una clique y un 1-empaquetamiento de cardinales máximos para el grafo de Petersen y para el siguiente grafo:



8. a) Probar que un conjunto estable y una clique comparten a lo sumo un vértice.  
 b) Probar que un conjunto de vértices  $S$  es estable y dominante de  $G$  si y sólo si  $S$  es estable maximal de  $G$ .  
 c) Demostrar que el número de estabilidad de un grafo es una cota superior de su número de dominación.
9. a) Probar que si  $M$  y  $M'$  son matchings de  $G$  entonces toda componente conexa del grafo  $G[(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)]$  es un ciclo par o un camino.  
 b) Mostrar que todo árbol tiene a lo sumo un matching perfecto.  
*Sugerencia:* Proceder por inducción o usar el ítem (a).
10. La *distancia* entre 2 vértices  $u$  y  $v$ ,  $d(u, v)$ , es la cantidad de arcos del camino más corto entre  $u$  y  $v$ . El *diámetro* de un grafo  $G$  es  $\max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$ . Probar que un grafo de diámetro a lo sumo dos no puede tener un 1-empaquetamiento de más de un elemento.
11. Demostrar que todo 1-empaquetamiento es un conjunto estable, pero no es válida la recíproca. Más aún, probar que la diferencia entre los cardinales máximos de un estable y un 1-empaquetamiento no es acotada. Es decir, para todo número natural  $k$ , existe un grafo  $G_k$  donde esa diferencia es al menos  $k$ .
12. Sea  $G$  un grafo con  $|V(G)| = n$  y  $|E(G)| = m$ , y sean  $\Delta(G)$  el grado máximo de los vértices de  $G$ ,  $\delta(G)$  el grado mínimo de los vértices de  $G$ ,  $\chi(G)$  el número cromático de  $G$ ,  $\omega(G)$  el tamaño de la máxima clique de  $G$ ,  $\alpha(G)$  el cardinal del mayor conjunto estable de  $G$  y  $\gamma(G)$  el cardinal del mínimo conjunto dominante de  $G$ . Probar:
- a) Demostrar que  $\gamma(G)(\Delta(G) + 1) \geq n$ . Probar que esta cota es *tan mala como queramos*, i.e. para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe un grafo  $G_k$  tal que  $\gamma(G)(\Delta(G) + 1) \geq n + k$ .
- b)  $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$ . Caracterizar los grafos que verifican esta desigualdad por igualdad.
- c) Si  $G$  es bipartito entonces  $\omega(G)\alpha(G) \geq n$ . ¿Es cierta esta desigualdad para grafos en general?
- d)  $\chi(G)\alpha(G) \geq n$ . Probar que esta cota es *tan mala como queramos*, i.e. para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe un grafo  $G_k$  tal que  $\chi(G)\alpha(G) \geq n + k$ .
- e)  $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$ .
- f)  $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$ . Recordar los *grafos color-crítico*.
- g)  $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ .
- h)  $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$ .

$$i) n \leq \chi(G)\chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

13. Sean  $G$  y  $H$  dos grafos simples. Una función  $\phi : V(G) \mapsto V(H)$  es un *homomorfismo* de  $G$  en  $H$  si  $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$  para toda  $uv \in E(G)$ . La notación  $G \rightarrow H$  significa que existe un homomorfismo de  $G$  en  $H$ .

a) Probar que si  $G$  es un grafo bipartito entonces  $G \rightarrow K_2$ .

b) Demostrar que  $\chi(G) = \text{mín}\{k : G \rightarrow K_k\}$ .

c) Probar que si  $G \rightarrow H$  entonces  $\omega(G) \leq \omega(H)$ .

d) Demostrar que una función  $\phi$  es un homomorfismo de  $G$  en  $H$  si y solo si para todo estable  $I$  de  $H$ ,  $\phi^{-1}(I)$  es un conjunto estable de  $G$ .

14. Dados dos grafos  $G$  y  $H$ , el grafo producto escalar de  $G$  y  $H$ , notado  $G \square H$  se define de la siguiente forma:

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H)$$

$$E(G \square H) = \{(g_1, h_1)(g_2, h_2) : [g_1 = g_2 \wedge h_1 h_2 \in E(H)] \vee [h_1 = h_2 \wedge g_1 g_2 \in E(G)]\}.$$

a) Probar que si  $G$  y  $H$  son subgrafos inducidos de  $G \square H$ .

b) Demostrar que  $\chi(G \square H) = \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}$ .

#### Bibliografía:

[LMDC] R. Grimaldi. *Matemática Discreta y Combinatoria*. 3ra. edición. Pearson.

[LIGT] D. West. *Introduction to Graph Theory*. 2nd. Edition. Pearson.