



Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Paola Tolomei, Pablo Torres

PRÁCTICA N° 3: MATROIDES Y ALGORITMOS GOLOSOS, PROPIEDAD HEREDITARIA, DESCRIPCIÓN DE FAMILIAS POR SUBGRAFO PROHIBIDOS

1. Pruebe que las siguientes estructuras $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ son matroides:

- Subconjuntos de columnas l.i.:* Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathcal{S} = \{1, \dots, n\}$ e $\mathcal{I} = \{J \subseteq \mathcal{S} : \text{las columnas indexadas por los elementos de } J \text{ son l.i.}\}$.
- Uniforme:* Sea $k \in \mathbb{N}$, \mathcal{S} un conjunto finito e $\mathcal{I} = \{J \subseteq \mathcal{S} : |J| \leq k\}$.

2. Sea $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ un sistema independiente. Pruebe que los siguientes enunciados son equivalentes entre sí:

- (M2) Para todo $A \subset \mathcal{S}$ y $J_1, J_2 \in \mathcal{I}$ conjuntos independientes maximales de A , $|J_1| = |J_2|$.
- (M2') Para todos $J_1, J_2 \in \mathcal{I}$ tales que $|J_1| < |J_2|$, existe un $e \in J_2 \setminus J_1$ tal que $J_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.
- (M2'') Para todo $A \subset \mathcal{S}$ y $J \in \mathcal{I}$ tal que J es un conjunto independiente maximal de A , tenemos que J es un conjunto independiente máximo de A .

Recuerde:

- $J \in \mathcal{I}$ es *maximal* en $A \subset \mathcal{S}$ si $J \subset A$ y todo $e \in A \setminus J$ satisface $J \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$.
- $J \in \mathcal{I}$ es *máximo* en $A \subset \mathcal{S}$ si $J \subset A$ y todo $J' \in \mathcal{I}$ tal que $J' \subset A$ satisface $|J'| \leq |J|$.

3. Considere un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$, es decir $E \subseteq V_1 \times V_2$.

- Pruebe que si $\mathcal{S} = E$ e $\mathcal{I}_M = \{J \subseteq E : J \text{ es un matching de } G\}$ entonces $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_M)$ es un sistema independiente pero no un matroide.
- Sea $\mathcal{S} = E$. Pruebe que, para $i = 1, 2$, si

$$\mathcal{I}_i = \{J \subseteq E : \text{cada } v \in V_i \text{ es incidente en a lo sumo un arco de } J\},$$

$(\mathcal{S}, \mathcal{I}_i)$ es una matroide.

- Pruebe que $\mathcal{I}_M = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

4. Sea $G = (V, E)$ un grafo.

- Pruebe que si G es conexo, todo bosque maximal es un árbol.
- Pruebe que el *Problema del Árbol Generador Mínimo* se puede reducir al *Problema del Bosque de Peso Máximo*.
- Pruebe que, si $\mathcal{S} = E$ e $\mathcal{I} = \{J \subseteq \mathcal{S} : J \text{ es bosque de } G\}$, $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ es una matroide.

d) Recordando que el algoritmo goloso resuelve correctamente el *Problema de Conjunto Independiente de Costo Máximo* sobre toda matroide y utilizando los items anteriores, pruebe que el algoritmo de Kruskal resuelve correctamente el *Problema del Árbol Generador Mínimo*.

5. Se dice que una propiedad \mathcal{P} sobre grafos es *hereditaria* (por subgrafos inducidos por nodos) si para cualquier grafo G que satisface \mathcal{P} , todo subgrafo inducido por nodos de G también satisface \mathcal{P} . Determine cuáles de las siguientes propiedades son hereditarias:

- a) G es bipartito
- b) G es planar
- c) G tiene un circuito euleriano
- d) G tiene un circuito hamiltoniano
- e) G tiene un k -coloreo
- f) G tiene un matching perfecto.

6. Para familias de grafos definidas de la forma

$$\mathcal{G} = \{G : G \text{ es un grafo con la propiedad } \mathcal{P}\},$$

con \mathcal{P} una propiedad hereditaria, decimos que G es *mínimamente no \mathcal{P}* si $G \notin \mathcal{G}$ y, para todo $v \in V(G)$, $G \setminus \{v\} \in \mathcal{G}$.

a) Pruebe que $G \in \mathcal{G}$ si y sólo si G no contiene como subgrafo inducido ningún grafo mínimamente no \mathcal{P} .

Observación: Por esta propiedad, los grafos mínimamente no \mathcal{P} se denominan *subgrafos prohibidos minimales de \mathcal{G}* .

b) Caracterice los grafos mínimamente no bipartitos.

7. Un grafo $G = (V, E)$ se dice *split* si existe una bipartición de V en los conjuntos Q y S tales que Q induce un grafo completo y S es un conjunto estable. Sea \mathcal{G} la familia de grafos split.

a) Pruebe que ser split es hereditario.

b) Pruebe que \mathcal{G} es autocomplementaria (es decir, $G \in \mathcal{G} \iff \bar{G} \in \mathcal{G}$).

c) Pruebe que los circuitos de 4 y 5 vértices son mínimamente no splits. ¿Son éstos los únicos subgrafos prohibidos de \mathcal{G} ?

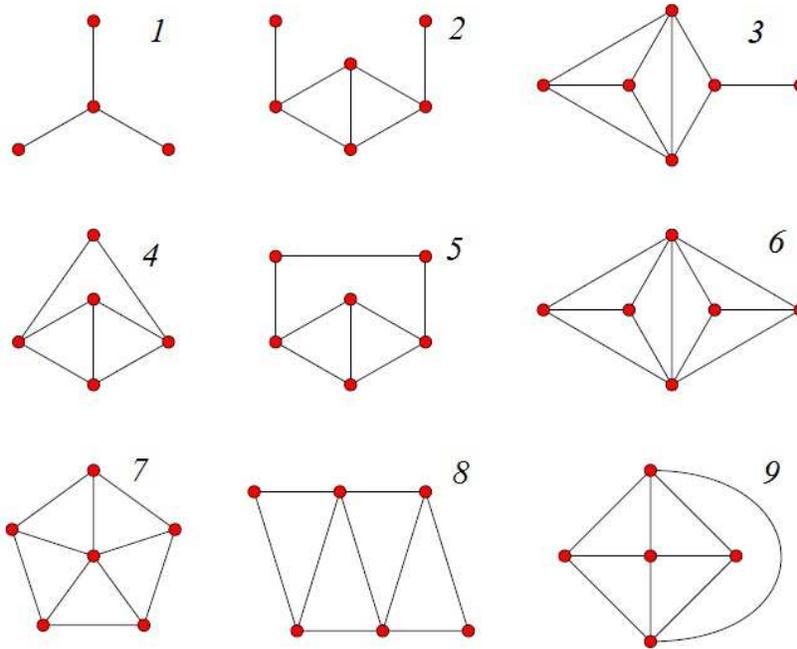
8. Un grafo G es perfecto si para todo subgrafo $G' \subset G$, $\omega(G') = \chi(G')$. Es decir, G' se puede colorear con k colores, siendo k el tamaño de la máxima clique de G' .

a) Pruebe que ser perfecto es hereditario.

b) Decimos que G' es un *agujero impar* de G si $G' \subset G$ y G' es un circuito impar de al menos 5 vértices. Análogamente, decimos que G' es un *anti-agujero impar* de G si $G' \subset G$ y G' es el complemento de un circuito impar. Pruebe que los agujeros y anti-agujeros impares son mínimamente no perfectos.

9. Un grafo $G = (V, E)$ es *de línea* si existe $G^* = (V^*, E^*)$ tal que $V = E^*$ y $(e_1, e_2) \in E$ si y sólo si e_1 y e_2 comparten un extremo en G^* . Por ejemplo, un completo K_n es un grafo de línea (por la existencia de $K_{1,n}$ en donde todas sus aristas son incidentes entre sí).

- a) Pruebe que ser de línea es hereditario.
- b) Pruebe que, en todo grafo de línea, sus aristas pueden ser particionadas en subgrafos completos de modo tal que todo nodo pertenece a lo sumo a dos subgrafos completos.
- c) Se sabe que los grafos de la lista son todos los subgrafos prohibidos de los grafos de línea [GC, pág. 110]. Pruebe que son mínimamente no de línea.



Bibliografía:

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience.

[GC] Andreas Brandstädt, Van Bang Le, Jeremy P. Spinrad. *Graph classes: a survey*. SIAM monographs on discrete mathematics and applications, 1999.