# Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

*Docentes:* Graciela Nasini, Daniel Severin, Paola Tolomei, Pablo Torres

## Práctica nº 4: Complejidad de Problemas

1. Considere los siguientes problemas:

   **Problema de la Suma de Subconjunto (PSS)**

   *Entrada*: $P \subset \mathbb{Z}$ finito y $k \in \mathbb{Z}$.
   *Pregunta*: ¿existe $S \subseteq P$ tal que $\sum_{p \in S} p = k$?

   **Búsqueda de Entero (BE)**

   *Entrada*: $P \subset \mathbb{Z}$ finito y $k \in \mathbb{Z}$.
   *Pregunta*: ¿ $k \in P$ ?

   *a*) Dada una entrada $P; k$ de PPS, construimos la entrada de BE dada por $P' = \{\sum_{s \in S} s : S \subset P\}$, $k' = k$. Pruebe que ésta es una transformación de PPS a BE.

   *b*) Se sabe que PSS es $\mathcal{NP}$-completo [GJNP, pág. 223] y, claramente, BE es resoluble en tiempo lineal. Con la transformación del item anterior, ¿ no estaríamos probando que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$? Justifique.

2. Consideremos el problema

   **Matching máximo en Bipartitos (MMB)**

   *Entrada*: $G = (V, E)$, un grafo bipartito.
   *Objetivo*: hallar un matching de $G$ de cardinal máximo.

   Sabemos que los matchings de un grafo bipartito conforman un sistema independiente que es intersección de dos matroides. Por el Teorema de Edmonds, sabemos entonces que MMB es polinomial. Describa un algorimo polinomial para resolver MMB.

   *Sugerencia:* Pruebe que el *Problema de Máximo Matching en Bipartitos* puede ser transformado en el *Problema de Flujo Máximo en una red* (PFM). Ver comentarios al final de la práctica.

3. Considere la transformación de 3-SAT a EXACT COVER dada en el Corolario 9.5 de [LCO, pag. 319].

   *a*) Construya el grafo $G$ y determine el conjunto $X$ y la colección de subconjuntos $\mathcal{C}$ correspondiente a la fórmula $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee \neg x_2)$.

   *b*) Pruebe que la transformación de 3-SAT a EXACT COVER es polinomial y correcta.

4. Una fórmula 3-SAT *satisface la propiedad estrella* si cada una de sus cláusulas tiene *exactamente* 3 literales distintos. Definimos el siguiente problema:

   **Problema 3-SAT***

   *Entrada*: $\Phi$, fórmula 3-SAT que satisface la propiedad estrella.
   *Pregunta*: ¿es $\Phi$ satisfactible?

Demuestre que 3-SAT* es $\mathcal{NP}$-completo, reduciendo polinomialmente 3-SAT a 3-SAT*.

Aclaración: un literal es una variable o su negación. Así una fórmula $\Phi$ que satisface la propiedad estrella puede contener cláusulas como $x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2$ ($x_1$ y $\neg x_1$ son literales distintos) pero no puede contener cláusulas como $x_1 \vee x_2$ (sólo 2 literales) o $x_1 \vee x_1 \vee \neg x_2$ ($x_1$ está repetido).

5. Pruebe que la transformación del *Problema del Circuito Hamiltoniano Dirigido* al *Problema del Circuito Hamiltoniano no Dirigido* dada en el Corolario 9.7 de [LCO, pag. 321] es polinomial y correcta.

6. Considere el siguiente problema:

   **Problema de Dominación Múltiple (PDM)**

   *Entrada*: $G = (V, E)$ un grafo, $k, \alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   *Pregunta*: ¿existe un conjunto $k$-dominante de $G$ de tamaño a lo sumo $\alpha$?

   Pruebe que PDM se resuelve en tiempo polinomial en los siguientes casos:

   *a*) $\delta(G) \leq k - 2$ ($\delta(G) = \text{mín}\{d(v) : v \in V\}$, es decir, el grado mínimo de $G$).
   *b*) $\alpha \leq k - 1$
   *c*) $\alpha = k$
   *d*) $\alpha \geq n$
   *e*) $k = n$.

7. Sea $k \in \mathbb{Z}_+$. Definimos los siguientes problemas:

   **Problema de $k$-Dominación (P$k$D)**

   *Entrada*: $G = (V, E)$ un grafo, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   *Pregunta*: ¿existe un conjunto $k$-dominante de $G$ de tamaño a lo sumo $\alpha$?

   **Problema de $k$-Empaquetamiento (P$k$E)**

   *Entrada*: $G = (V, E)$ un grafo, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   *Pregunta*: ¿existe un $k$-empaquetamiento de $G$ de tamaño al menos $\alpha$?

   Sean $r$ y $k$ tales que $1 \leq k < r$ y $\mathcal{G} = \{G : G \text{ es } r\text{-regular}\}$. Si $k' = r + 1 - k$, pruebe que P$k$D($\mathcal{G}$) se puede reducir polinomialmente a P$k'$E($\mathcal{G}$) y P$k$E($\mathcal{G}$) se puede reducir polinomialmente a P$k'$D($\mathcal{G}$).

   Recordatorio: Un grafo $G$ es $r$-regular si todos sus vértices tienen grado $r$.

8. Un grafo $G = (V, E)$ se dice *split* si existe una bipartición de $V$ en los conjuntos $Q$ y $S$ tales que $Q$ induce un grafo completo y $S$ es un conjunto estable. Se sabe que puede hallarse una tal partición de un grafo split en tiempo polinomial. Probar que el Problema del Conjunto Estable es polinomial en grafos split.

9. Considere la transformación del *Problema del Conjunto Estable (PCE)* a P$k$E en grafos split desarrollada en el Teorema 1 de [DOMPACK]. Dado un grafo $G$ sea $G'$ el grafo split que se obtiene por dicha transformación. Pruebe que si $I$ es un estable de $G$ entonces $I$ es un 1-empaquetamiento de $G'$. Recíprocamente, pruebe que si $G'$ tiene un 1-empaquetamiento de tamaño $s$, $G$ tiene un estable $I$ de tamaño $s$.

10. Considere la transformación del *PDM en Bipartitos* al *PEL en Bipartitos* desarrollada en el Teorema 2 de [DOMPACK]:

Dado $G = (V, E)$ un grafo bipartito y $k, \alpha \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k \leq \text{mín}\{\alpha - 1, \delta(G) + 1\}$ , sea $G' = (V', E')$ tal que

- $V' = V \cup \bigcup_{v \in V} S_v$, donde $S_v = \{x_1^v, x_2^v, \ldots, x_{\Delta(G)-d(v)}^v\}$ para cada $v \in V$,
- $E' = E \cup \bigcup_{v \in V} \{(v, x) : x \in S_v\}$.

y $k' = \Delta(G) - k + 1$ y $\alpha' = |V'| - \alpha$ (donde $\Delta(G) = \text{máx}\{d(v) : v \in V\}$).

*a*) Considere la instancia de PDM definida por $G = (V, E)$ con $V = \{1, \ldots, 6\}$ y $E = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (2, 6)\}$; $k = 2$ y $\alpha = 5$. El conjunto dominante $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ de $G$ es un certificado a la respuesta positiva del problema.

Construya el grafo $G'$ e indique el $k$-empaquetamiento de $G'$ de tamaño $|V'| - \alpha$ que se obtiene a partir del conjunto dominante dado.

*b*) Pruebe que $G'$ es bipartito indicando los vértices que conforman la bipartición.

*c*) Pruebe que, si $G$ es regular, entonces $G' = G$.

*d*) Pruebe que los vértices de $V$ en $G'$ tienen grado $\Delta(G)$ y los vértices nuevos (los de $\bigcup_{v \in V} S_v$) tienen grado 1.

*e*) Justifique que la transformación es polinomial.

*f*) Sean $G$ y $k$ tales que $\Delta(G) \leq k \leq \Delta(G) + 1$ y sea $D$ un conjunto $k$-dominante de $G$ tal que $|D| \leq \alpha$. Pruebe que $B = V' \backslash D$ es un $k'$-empaquetamiento de $G'$ tal que $|B| \geq \alpha'$.

*g*) Pruebe que si $G'$ tiene un $k'$-empaquetamiento de $B$ tal que $|B| \geq \alpha'$, $G'$ tiene un $k'$-empaquetamiento de $B'$ tal que $|B'| \geq \alpha'$ y $S_v \subset B'$ para todo $v \in V'$.

11. Definimos los siguientes problemas:

**Problema de dominación total (PDT)**:

*Entrada*: $G = (V, E)$ un grafo, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.
*Pregunta*: ¿existe un conjunto dominante total de $G$ de tamaño a lo sumo $\alpha$?

**Problema del Cubrimiento por Vértices (PCV)**:

*Entrada*: $G = (V, E)$ un grafo, $\beta \in \mathbb{Z}_+$.
*Pregunta*: ¿existe un cubrimiento por vértices de $G$ de tamaño a lo sumo $\beta$?

Sea $\mathcal{P}$ la familia de grafos planares. Se sabe que $\mathbf{PCV}(\mathcal{P}) \in \mathcal{NP}$-*c*.

Subdividir una arista $e = uv$ de $G$ es eliminar la arista $e$ y colocar un nuevo vértice $w$ y las aristas $uw$ y $vw$. Por otro lado, colocar un nuevo vértice pendiente $u$ a un vértice $v \in V$ es agregar a $G$ el vértice $u$ y la arista $uv$.

*a*) Dado un grafo simple $G$, probar que el grafo obtenido subdividiendo todas sus aristas es bipartito.

*b*) Sea $G*$ el grafo obtenido a partir de $G$ subdividiendo todas sus aristas y colocando luego un vértice pendiente a cada nuevo vértice de la subdivisión. Probar que si $G$ es planar entonces $G*$ es planar bipartito (i.e. planar y bipartito).

*c*) Dado un grafo $G = (V, E)$, probar que $G$ tiene un cubrimiento por vértices de tamaño a lo sumo $j$ si y solo si $G*$ tiene un conjunto dominante total de tamaño a lo sumo $j + |E|$.

*d*) ¿Los resultados de los items anteriores permiten probar que $\mathbf{PDT}(\mathcal{PB}) \in \mathcal{NP}$-$c$?

Recordatorio: Dado $G = (V, E)$, $D \subset V$ es un *conjunto dominante total* de $G$ tal que $|N(v) \cap D| \geq 1$ para todo $v \in V$. Por otro lado, $C \subset V$ es un *cubrimiento por vértices* de $G$ si toda arista de $G$ tiene al menos un extremo en $C$.

12. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Considemos 3-COL el problema de decidir si un grafo $G$ es 3-coloreable.

*a*) Probar que 3-COL puede transformarse polinomialmente a 3-SAT.
*Sugerencia:*

1) considerar 3 literales por vértice y cada literal representa un color.
2) Obtener una expresión lógica de 3-SAT que modele el hecho que un vértice recibe exactamente un color. (Es decir, la expresión es verdadera si y solo si el vértice recibe exactamente un color).
3) Dada una arista $e = uv$, hallar una expresión lógica de 3-SAT que modele el hecho que $u$ y $v$ no reciben el mismo color.
4) En base a lo anterior, dar una expresión lógica del 3-SAT para el 3-coloreo de un grafo $G$.

*b*) Sabiendo que 3-SAT es $\mathcal{NP}$-$c$, ¿el apartado anterior permite concluir que 3-COL es $\mathcal{NP}$-$c$? Justifique.

**Comentarios**

*Recordatorio:* Una red es un digrafo $D = (V, A)$ y vector $c \in \mathbb{Z}_+^A$ de capacidades asociadas a sus arcos. Dados dos vértices distinguidos $s, t \in V$ (llamados *fuente* y *sumidero* respectivamente), decimos que $f \in \mathbb{Z}_+^A$ es un *st-flujo* de $D$ si satisface:

- *Restricciones de capacidad*: $f_e \leq c_e$ para todo $e \in A$, y
- *Conservación del flujo*: $\sum_{v \in N^+(u)} f_{uv} = \sum_{v \in N^-(u)} f_{vu}$ para todo $u \in V \backslash \{s, t\}$.

El *valor del flujo* $f$ se denota $val(f)$ y es igual a $val(f) = \sum_{v \in N^+(s)} f_{sv} = \sum_{v \in N^-(t)} f_{vt}$.

El **Problema de Flujo Máximo en una red (PFM)** es definido como sigue:
*Entrada*: $D = (V, A)$ digrafo, $s, t \in V$ y $c \in \mathbb{Z}_+^A$.
*Objetivo*: hallar un *st*-flujo en $D$ de valor máximo.

El algoritmo (polinomial) de Ford-Fulkerson resuelve el PFM.

Bibligrafía:

[DOMPACK] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *The multiple domination and limited packing problems in graphs.* Inform. Proc. Let. 111 (2011) 1108-1113.

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization.* Wiley-Interscience.

[GJNP] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W.H. Freeman.