Tópicos Avanzados en Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Pablo Torres, Paola Tolomei

Práctica nº 5: Descomposición Modular, Clique-Width y MSOL

Complementos prácticas anteriores

1. Un grafo $G = (V, E)$ es una *araña* de peso r si V puede ser particionado en conjuntos S, C y H (H puede ser vacío) tales que $|S| = |C| \geq 2$, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ es un conjunto estable, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ es una clique, todo vértice de H es adyacente a todo vértice de C, todo vértice de H no es adyacente a ningún vértice de S y además se cumple una de las siguientes condiciones:

   I) $(s_i, c_j) \in E \Leftrightarrow i = j$ (araña *flaca*); II) $(s_i, c_j) \in E \Leftrightarrow i \neq j$ (araña *gorda*).

   Pruebe que :

   a) G es una araña flaca si y sólo si $\overline{G}$ es una araña gorda.
   b) G es araña flaca y araña gorda si y sólo si $G = P_4$.
   c) $G = (S, C, H)$ es un grafo araña, G es split si y sólo si $G[H]$ es split.

2. Sea $G = (S, C, H)$ una araña y $w \in \mathbb{Z}^{V(G)}$. Determine $\chi(G)$ y encuentre un estable de peso máximo de G, en función de $\chi(G[H])$ y de un estable de máximo peso en $G[H]$, respectivamente.

3. Dado un grafo $G = (V, E)$, la *distancia* entre dos vértices u, v, denotada $dist(u, v)$, es la longitud (cantidad de aristas) del camino más corto entre u y v. De no existir dicho camino se dice que la distancia es ∞. Un *k-ρ-coloreo* de G es una función $f : V \mapsto \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que si $f(u) = f(v) = i$ entonces $dist(u, v) \geq i + 1$. El *número ρ-cromático* de G, que notamos $\chi_\rho(G)$ es el mínimo k tal que G admite un k-ρ-coloreo.

   a) Hallar $\chi_\rho(P_4)$, $\chi_\rho(P_5)$ y $\chi_\rho(C_5)$.
   b) El diámetro de un grafo es el máximo de las distancias entre sus vértices, i.e. $diam(G) = \max\{dist(u, v) : u, v \in V\}$. Probar que $\chi_\rho(G) \leq |V| + 1 - \alpha(G)$, donde $\alpha(G)$ es el número de estabilidad de G. Además, demostrar que si $diam(G) \leq 2$ entonces vale la igualdad. ¿Vale la recíproca de esta última implicación? Es decir, ¿si $\chi_\rho(G) \leq |V| + 1 - \alpha(G)$ entonces $diam(G) \leq 2$?.

4. Dado $r \geq 2$, A_r^0 es la araña gorda sin cabeza de peso r. Para $k \geq 1$, A_r^k es la araña gorda de peso r y cuya cabeza es isomorfa a A_r^{k-1}.

   a) Hallar $\chi_\rho(A_r^0)$ para todo $r \geq 2$.
   b) Calcular $\chi_\rho(A_5^2)$.
   c) Determinar $\chi_\rho(A_r^k)$ para todo $k \geq 0$ y $r \geq 2$.

Sugerencia: Usar resultados del ejercicio anterior.

5. Sea $q \geq 4$. Un grafo $G = (V, E)$ es $(q, q-4)$ si para todo conjunto $S \subset V$ tal que $|S| = q$, $G[S]$ tiene a lo sumo $q-4$ caminos P_4 inducidos diferentes. Los grafos $(4, 0)$ se denominan *cografos* y los $(5, 1)$, grafos P_4-*sparse*.

   a) Demuestre que la clase de grafos $(q, q-4)$ es hereditaria.

   b) Pruebe que si G es una araña sin cabeza entonces G es P_4-sparse.

   c) Pruebe que si G es una araña con cabeza $H \neq \varnothing$ entonces

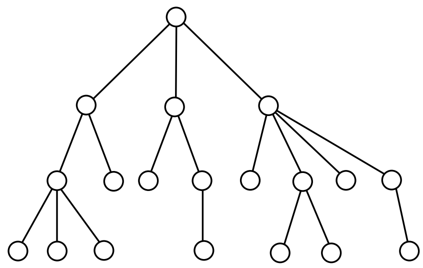
   $$\text{“}G \text{ es } P_4\text{-sparse} \Leftrightarrow G[H]\ P_4\text{-sparse”}.$$

   d) Probar que todo grafo $(4, 0)$ es un grafo $(q, q-4)$ para todo $q \geq 5$,

   e) Analizar la veracidad del siguiente enunciado: *Si* $q_1 < q_2$ *entonces los grafos* $(q_1, q_1 - 4)$ *son grafos* $(q_2, q_2 - 4)$.

   f) Demostrar que existen grafos $(5, 1)$ que son $(7, 3)$ pero no son $(q, q-4)$ para ningún $q \geq 6$ y $q \neq 7$.

6. Resuelva el *Problema de 3-empaquetamiento* para el siguiente árbol, utilizando el algoritmo para resolver el *Problema de Empaquetamiento Generalizado* (Sugerencia: véase [PACKTREE]):



Descomposición Modular, Clique-Width y MSOL

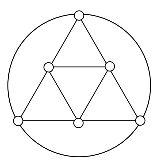
1. Dado $G = (V, E)$ y pesos $w \in \mathbb{Z}^V$, denotemos con $S(G)$ a un conjunto estable de peso máximo en G. Recuerde que $\chi(G)$ es el número cromático de G.

   a) Determine cómo encontrar $S(G_1 \oplus G_2)$ y $S(G_1 \vee G_2)$ si se conoce $S(G_1)$ y $S(G_2)$.

   b) Calcule $\chi(G_1 \oplus G_2)$ y $\chi(G_1 \vee G_2)$ en función de $\chi(G_1)$ y $\chi(G_2)$.

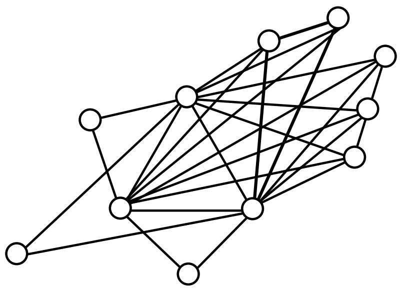
   c) Dibuje el grafo
   $$G = (\{v_1\} \oplus \{v_2\}) \vee \big(\{v_3\} \vee (\{v_4\} \oplus \{v_5\})\big)$$
   y describa los pasos que realizaría el algoritmo de descomposición modular para obtener $\chi(G)$ y $S(G)$.

2. *a*) Obtenga el árbol de descomposición modular del siguiente grafo.



   b) Describa los pasos que realiza el algoritmo de descomposición modular para hallar el número de 3-empaquetamiento del grafo del item anterior. Sugerencia: ver [DOMPACK].

3. Calcular mediante la descomposición modular un 2-empaquetamiento del siguiente grafo. Sugerencia: ver [DOMPACK].



4. Dado G denotamos con $cw(G)$ el valor de su clique-width. Ver definición en [APUNTE_CW]

   a) Demuestre que $cw(K_n) = 2$ si $n \geq 2$. ¿Son los grafos completos los únicos grafos con clique-width 2?

   b) Halle $cw(P_3)$. Pruebe que $cw(P_n) = 3$ si $n \geq 4$.

   c) Pruebe que los árboles tienen clique-width a lo sumo 3.

   d) Halle $cw(C_5)$ y $cw(C_6)$. Demuestre que $cw(C_n) \leq 4$ si $n \geq 7$.

5. Sean G y H dos grafos disjuntos y $v \in V(G)$, luego $G[H/v]$ denota el grafo obtenido por *reemplazo* en G de v por H, i.e. $V(G[H/v]) = (V(G) \cup V(H)) - \{v\}$ y

$$E(G[H/v]) = E(H) \cup \{e : e \in E(G) \text{ y } e \text{ es no incidente en } v\} \cup \\ \{uw : u \in V(H),\ w \in V(G) \text{ y } w \text{ es adyacente a } v \text{ en } G\}.$$

   Pruebe que $cw(G[H/v]) \leq \text{máx}\{cw(G), cw(H)\}$.

6. Pruebe que los grafos bipartitos y los grafos split tienen clique-width no acotado. *Sugerencia*: pruebe que $\mathscr{F}_n \geq 2^{\frac{n^2}{4}}$, donde $\mathscr{F}_n$ se define en [APUNTE_CW].

7. Exprese la propiedad de conexidad de un grafo como una fórmula MSOL.

8. Pruebe que los problemas de optimización de "k-empaquetamiento de cardinal máximo" y "conjunto k-dominante de cardinal mínimo" son problemas LinEMSOL(τ_1).

9. Sean $G = (V, E)$ un grafo, k un entero positivo y $f : V \mapsto \{0, \ldots, k\}$ una función. Para cualquier $U \subset V$, denotamos $f(U) = \sum_{u \in U} f(u)$. Decimos que f es una *función $\{k\}$-dominante de G* si $f(N[v]) \geq k$ para todo $v \in V$. El problema de $\{k\}$-dominación consiste en hallar una función $\{k\}$-dominante de peso mínimo, i.e. tal que $f(V)$ sea mínimo. El parámetro $\gamma_{\{k\}}(G)$ vale dicho peso.

   Además, dado un grafo H notamos $G \odot H$ al grafo obtenido reemplazando todos los vértices de G por H. Por ejemplo, $K_n \odot K_m$ es isomorfo a K_{n+m}.

   a) Verifique que $\gamma_{\{3\}}(C_6) = \gamma_3(C_6 \odot K_3)$ sin calcular explícitamente los parámetros.

   b) Pruebe que $\gamma_{\{k\}}(G) = \gamma_k(G \odot K_k)$ para todo $k \geq 2$.

   c) Demuestre que el problema de $\{k\}$-dominación es polinomial en familias de grafos con clique-width acotado por una constante. Sugerencia: Utilizar item *b* y ejercicio anterior.

10. Se sabe que el problema de obtener el *número ρ-cromático* es NP-difícil aún restringido a árboles. ¿Es este problema de optimización LinEMSOL(τ_1)? Justifique.

11. Se sabe que el problema de determinar si un grafo es 3 coloreable (3-COL) es NP-difícil para grafos generales. Determine la complejidad del 3-COL en la familia de grafos *distancia hereditarios*, i.e. la familia de grafos conexos tales que la distancia entre dos vértices cualesquiera en G es la misma que la distancia en cualquiera de sus subgrafos inducidos conexos.

    Sugerencia: Verificar si la familia de grafos tiene clique-width acotado.

    Ver: http://graphclasses.org

Bibligrafía:

[PACKTREE] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *Arbitrary Limited Packings in Trees.* Manuscript.

[COURCELLE] B. Courcelle, J. A. Makowsky, U. Rotics. *Linear Time Solvable Optimization Problems on Graphs of Bounded Clique Width.* Theory of Computing Systems 33 (2000) 125–150.

[APUNTE_CW] Apunte de la cátedra que contiene un repaso de las definiciones de clique-width, MSOL, LinEMSOL y el Teorema de Courcelle.