Tópicos Avanzados en Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Paola Tolomei, Pablo Torres

Práctica nº 6: Teoría Poliedral

1. Sean A una matriz entera $m \times n$ e I, la matriz identidad $n \times n$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (a) A es totalmente unimodular

   (b) (A, I) es totalmente unimodular.

   (c) A^T es totalmente unimodular.

2. Sea A una $\{0, 1, -1\}$-matriz tal que:

   (a) toda columna de A tiene a lo sumo dos entradas no nulas;

   (b) existe (M_1, M_2) una partición del conjunto de filas $M = \{1, \dots, m\}$ tal que para toda columna j, $\sum_{i \in M_1} a_{ij} - \sum_{i \in M_2} a_{ij} = 0$.

   Demuestre que A es totalmente unimodular.

3. Pruebe que la matriz de incidencia vértice-arco de todo digrafo es totalmente unimodular.

4. Para cada uno de los conjuntos siguientes X, determine el sistema de inecuaciones lineales cuyo conjunto solución es el poliedro $conv(X)$.

   (a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x + y \geq 3\} \cup \{(1, 1), (2, 2)\}$.

   (b) $X = \{(x, y \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+ : x \leq 6y; x \leq 16\}$.

5. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ finito. Pruebe que los siguientes enunciados son equivalentes:

   - X es afínmente independiente.
   - Para cualquier $w \in \mathbb{R}^n$, $\{x - w : x \in X\}$ es afínmente independiente.
   - Para cualquier $\hat{x} \in X$, $\{x - \hat{x} : x \in X - \{\hat{x}\}\}$ es linealmente independiente.

6. Sean $S \subset \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Probar que:

   (a) Si v es un vértice de $conv(S)$, entonces $v \in S$.

   (b) $\max\{cx : x \in S\} = \max\{cx : x \in conv(S)\}$.

7. Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_i \leq 1\}$.

   (a) Pruebe que $x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$ es una desigualdad válida de P y explicite la cara definida por esta desigualdad.

   (b) Sea $S = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ y $F = conv(S)$. Pruebe que F es cara de P y encuentre una desigualdad válida de P que la defina.

8. Dado $G = (V, E)$, STAB(G) es el poliedro cápsula convexa de los vectores característicos de los conjuntos estables de G. Pruebe que las siguientes son desigualdades válidas de STAB(G):

   (a) $\sum_{v \in V(G')} x_v \leq \alpha(G')$ con G' subgrafo inducido por nodos de G.

   (b) $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$ con Q clique maximal de G.

9. Sea

$$\text{CLIQUE}(G) = \{x \in \mathbb{R}^V_+ : \sum_{v \in Q} x_v \leq 1 \;\; \forall\, Q \text{ clique maximal de } G\}$$

   la relajación clique de STAB(G).

   (a) Sea G' un agujero impar de G y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^V$ tal que $\bar{x}_v = \frac{1}{2}$ si $v \in V(G')$ y $\bar{x}_v = 0$ si no. Pruebe que $\bar{x}$ es un punto extremo de CLIQUE(G).

   (b) Sea G' un anti-agujero impar de G y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^V$ tal que $\bar{x}_v = \frac{2}{|V(G')|}$ si $v \in V(G')$ y $\bar{x}_v = 0$ si no. Pruebe que $\bar{x}$ es un punto extremo de CLIQUE(G).

   (c) Sea G no perfecto. Encuentre $x^* \in \text{CLIQUE}(G) \setminus \text{STAB}(G)$ y una desigualdad que separe x^* de STAB(G).
   Observación: Recuerde que G es perfecto si y sólo si G no contiene agujeros ni anti-agujeros impares.

10. Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Pruebe que:

   (a) F una cara de P si y sólo si existe un subsistema $A^0 x \leq b^0$ de $Ax \leq b$ tal que $F = \{x \in P : A^0 x = b^0\}$.

   (b) Todo vértice de P es cara de P.
   Sugerencia: ver pág. 72 de [LLPNF] en la página de la cátedra.

   (c) Si P tiene vértices, $rango(A) = n$.

11. Sea el poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, $A^0 x = b^0$ el sistema de todas las ecuaciones implicadas por $Ax \leq b$ y $A^1 x \leq b^1$ el subsistema de desigualdades restantes. Probar que:

   (a) Si existe $\hat{x}$ tal que $A\hat{x} < b$ entonces $dim(P) = n$.
   Sugerencia: siendo e_i el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$, considere n puntos de la forma $\hat{x} + te_i$ para un adecuado $t > 0$.

   (b) $dim(P) = n - rango(A^0)$.
   Sugerencia: considere $d = n - rango(A^0)$ puntos de la forma $\hat{x} + ty^j$ para un adecuado t, donde $\hat{x} \in P$ tal que $A^1\hat{x} < b^1$ y $\{y^j : j = 1, \ldots, d\}$ es un conjunto de soluciones linealmente independientes de $A^0 x = b^0$.

12. Sea P el poliedro definido por el siguiente sistema (S):

$$\begin{cases} \quad\quad\quad\quad\quad\quad x_3 \quad\quad\quad = -4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \leq 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 0 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad - 5x_4 \leq -2 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad - x_4 \leq 2 \\ \quad - 3x_2 \quad\quad + 7x_4 \leq 6 \\ -x_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad \leq 0 \end{cases}$$

(a) Determine el sistema de ecuaciones derivado del sistema (S).

(b) Determine la dimensión de P.

(c) Identifique todos los puntos extremos de P.

(d) Pruebe que $F_1 = \{x \in P : x_1 = 1\}$ no es una cara de P.

(e) Pruebe que $F_2 = \{x \in P : x_2 - x_4 = 2\}$ es una faceta de P.

(f) Pruebe que $F_3 = \{x \in P : x_1 = 0\}$ es una cara de P pero no una faceta. ¿De qué dimensión es F_3?

13. Pruebe que:

    (a) Para todo grafo G, $STAB(G)$ es de dimensión completa y las siguientes desigualdades definen facetas:

        i. $x_v \geq 0$, $v \in V$.

        ii. $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$, Q clique maximal de G.

    (b) Si $k \geq 2$, $\sum_{v \in V} x_v \leq k$ define faceta de $STAB(C_{2k+1})$.
    Sugerencia: considere $V = \{0, 1, \ldots, 2k\}$ y los estables $S_i = \{i + 2t \ (mod\ n) : t = 0, \ldots, k-1\}$ para todo $i \in V$.

    (c) Si $k \geq 2$, $\sum_{v \in V} x_v \leq 2$ define faceta de $STAB(\overline{C_{2k+1}})$.

14. El grafo $W_n = C_n \vee \{u\}$, donde $u \notin V(C_n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ es llamado *rueda* de tamaño n. Pruebe que:

    (a) $\sum_{v=0}^{2k} x_v \leq k$ es una desigualdad válida de $STAB(W_{2k+1})$ pero no define faceta.

    (b) $kx_u + \sum_{v=0}^{2k} x_v \leq k$ define faceta de $STAB(W_{2k+1})$.
    Sugerencia: Considere los estables maximales del grafo.

Bibliografía:

[LLPNF] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, H. D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows.* 4th. Edition. John Wiley & Sons, Inc.

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization.* Wiley-Interscience.