Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Paola Tolomei, Pablo Torres

Práctica nº 1: Teoría de Grafos

En esta práctica asumimos que todos los grafos son simples (sin lazos ni aristas múltiples).

1. *a*) Probar que para todo grafo G, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.|E(G)|$, donde con $d(v)$ notamos el grado de v.
   b) Demostrar que en todo grafo, la cantidad de vértices de grado impar de todo grafo es par.

2. Sea G un grafo y $\overline{G}$ su complemento.
   a) Si G es isomorfo a $\overline{G}$, ¿cuál es el cardinal de $E(G)$? Mostrar que dos grafos G y H son isomorfos si y solo si $\overline{G}$ y $\overline{H}$ son isomorfos.
   b) Determinar todos los grafos no isomorfos con conjunto de vértices $\{1, 2, 3, 4\}$.

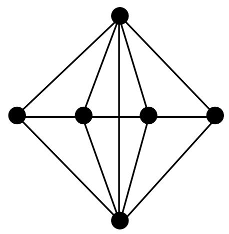
3. Determinar la cantidad de matchings perfectos en un grafo completo de $2n$ vértices.

4. Sea G el grafo que posee como conjunto de vértices a todos los subconjuntos de cardinal 2 del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y dos vértices son adyacentes si y sólo si los respectivos subconjuntos son disjuntos. Probar que G es isomorfo al grafo de Petersen, definido en [LMDC, pág. 545, figura 11.24(a)].

5. Sea $G = (V, E)$. Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes:
   a) G es un árbol,
   b) $|E| = |V| - 1$ y G es conexo,
   c) $|E| = |V| - 1$ y G es acíclico.

6. *a*) Sea G^n el grafo con n componentes conexas, cada una de ellas isomorfa a K_2. ¿Cuántos estables maximales tiene G^n?
   b) Probar que existen grafos para los cuales el número de cliques maximales es de orden exponencial respecto al número de vértices.

7. Determinar un estable, una clique y un 1-empaquetamiento de cardinales máximos para el grafo de Petersen y para el siguiente grafo:



8. *a*) Probar que un conjunto estable y una clique comparten a lo sumo un vértice.
   b) Probar que un conjunto de vértices S es estable y dominante de G si y sólo si S es estable maximal de G.
   c) Demostrar que el número de estabilidad de un grafo es una cota superior de su número de dominación.

9. *a*) Probar que si M y M' son matchings de G entonces toda componente conexa del grafo $G[(M \backslash M') \cup (M' \backslash M)]$ es un ciclo par o un camino.
   b) Mostrar que todo árbol tiene a lo sumo un matching perfecto.
   Sugerencia: Proceder por inducción o usar el ítem (a).

10. La *distancia* entre 2 vértices u y v, $d(u,v)$, es la cantidad de arcos del camino más corto entre u y v. El *diámetro* de un grafo G es $\max_{u,v\in V(G)} d(u,v)$. Probar que un grafo de diámetro a lo sumo dos no puede tener un 1-empaquetamiento de más de un elemento.

11. Demostrar que todo 1-empaquetamiento es un conjunto estable, pero no es válida la recíproca. Más aún, probar que la diferencia entre los cardinales máximos de un estable y un 1-empaquetamiento no es acotada. Es decir, para todo número natural k, existe un grafo G_k donde esa diferencia es al menos k.

12. Demostrar que $\gamma(G)(\Delta(G)+1) \geq n$. Probar que esta cota es *tan mala como queramos*, i.e. para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un grafo G_k tal que $\gamma(G)(\Delta(G)+1) \geq n+k$.

13. Sea $S = (v_1, v_2 \ldots, v_k)$ una secuencia de vértices distintos de un grafo G. Decimos que la secuencia S es *legal* si

$$N[v_i] \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} N[v_j] \neq \emptyset, \qquad \forall\, i = 2, \ldots, k,$$

Análogamente, decimos que S es *total legal* si

$$N(v_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} N(v_j) \neq \emptyset, \qquad \forall\, i = 2, \ldots, k.$$

El *número de dominación de Grundy*, $\gamma_{gr}(G)$, es el tamaño de la secuencia legal de máxima longitud, mientras que el *número de dominación de Grundy total*, $\gamma_{gr}^t(G)$, es el tamaño de la secuencia total legal de máxima longitud. Denotamos con $\widehat{S}$ al conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

   a) Pruebe que si D es un conjunto dominante (total) mínimo de G, entonces existe una secuencia legal (total) S de G tal que $D = \widehat{S}$.
   b) Sea S una secuencia legal (total) de máxima longitud de G. Pruebe que $\widehat{S}$ es un conjunto dominante (total) de G.
   c) Suponga que existen dos vértices u, v de un grafo G que satisfacen $N[u] = N[v]$ (se dice que u, v son *mellizos verdaderos*). Pruebe que $\gamma_{gr}(G) = \gamma_{gr}(G - v)$, donde $G - v$ representa el grafo luego de borrar el vértice v. Enuncie y pruebe un resultado similar para el caso “total”.
   d) Calcule $\gamma_{gr}(G)$ y $\gamma_{gr}^t(G)$ para los casos en que G es: i) un camino, ii) un ciclo.

14. Sea G un grafo con $|V(G)| = n$ y $|E(G)| = m$, y sean $\Delta(G)$ el grado máximo de los vértices de G, $\delta(G)$ el grado mínimo de los vértices de G, $\chi(G)$ el número cromático de G, $\omega(G)$ el tamaño de la máxima clique de G, $\alpha(G)$ el cardinal del mayor conjunto estable de G y $\gamma(G)$ el cardinal del mínimo conjunto dominante de G. Probar:

    a) $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$. Caracterizar los grafos que verifican esta desigualdad por igualdad.

    b) Si G es bipartito entonces $\omega(G)\alpha(G) \geq n$. ¿Es cierta esta desigualdad para grafos en general?

    c) $\chi(G)\alpha(G) \geq n$. Probar que esta cota es *tan mala como queramos*, i.e. para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un grafo G_k tal que $\chi(G)\alpha(G) \geq n + k$.

    d) $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$.

    e) $\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$. Recordar los *grafos color-crítico.*

    f) $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

    g) $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.

    h) $n \leq \chi(G)\chi(\bar{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

    i) $\gamma_{gr}(G) \leq n - \delta(G)$ y $\gamma_{gr}^t(G) \leq n - \delta(G) + 1$.

15. Una generalización del grafo de Petersen es el *grafo de Kneser* $KG(n, k)$ que, para $n \geq 2k$, tiene por vértices todos los subconjuntos de cardinal k de un conjunto de cardinal n, y dos vértices son adyacentes si sus correspondientes subconjuntos son disjuntos.

    a) Probar que $\alpha(KG(n, k)) \geq \binom{n-1}{k-1}$.

    b) Hallar $\omega(KG(n, k))$.

16. Sean G y H dos grafos simples. Una función $\phi : V(G) \mapsto V(H)$ es un *homomorfismo* de G en H si $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$ para toda $uv \in E(G)$. La notación $G \to H$ significa que existe un homomorfismo de G en H.

    a) Probar que si G es un grafo bipartito entonces $G \to K_2$.

    b) Demostrar que $\chi(G) = \text{mín}\{k : \ G \to K_k\}$.

    c) Probar que si $G \to H$ entonces $\omega(G) \leq \omega(H)$.

    d) Demostrar que una función ϕ es un homomorfismo de G en H si y solo si $\phi^{-1}(I)$ es un conjunto estable (independiente) de G para todo estable I de H.

17. Dados dos grafos G y H, el grafo producto escalar de G y H, notado $G\square H$ se define de la siguiente forma:

$$V(G\square H) = V(G) \times H$$

$$E(G\square H) = \{(g_1, h_1)(g_2, h_2) : \ [g_1 = g_2 \wedge h_1h_2 \in E(H)] \vee [h_1 = h_2 \wedge g_1g_2 \in E(G)]\}.$$

    a) Probar que si G y H son subgrafos inducidos de $G\square H$.

    b) Demostrar que $\chi(G\square H) = \text{máx}\{\chi(G), \chi(H)\}$.

Bibliografía:

[LMDC] R. Grimaldi. *Matemática Discreta y Combinatoria*. 3ra. edición. Pearson.

[LIGT] D. West. *Introduction to Graph Theory*. 2nd. Edition. Pearson.