FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
Escuela de Posgrado y Educación Continua

Tópicos Avanzados de Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Paola Tolomei, Pablo Torres

Práctica n° 4: Complejidad de Problemas

1. Considere los siguientes problemas:

   Problema de la Suma de Subconjunto (PSS)

   Entrada: $P \subset \mathbb{Z}$ finito y $k \in \mathbb{Z}$.
   Pregunta: ¿existe $S \subseteq P$ tal que $\sum_{p \in S} p = k$?

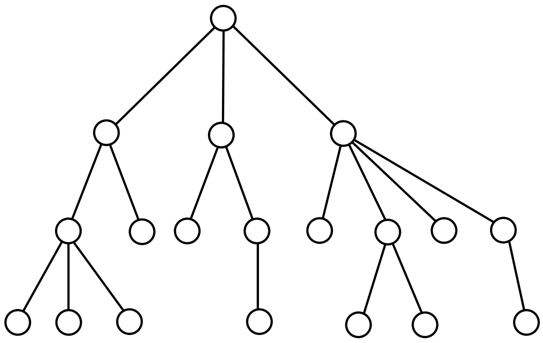
   Búsqueda de Entero (BE)

   Entrada: $P \subset \mathbb{Z}$ finito y $k \in \mathbb{Z}$.
   Pregunta: ¿ $k \in P$?

   a) Dada una entrada $P; k$ de PPS, construimos la entrada de BE dada por $P' = \{\sum_{s \in S} s : S \subset P\}$, $k' = k$. Pruebe que ésta es una transformación de PPS a BE.

   b) Se sabe que PSS es $\mathcal{NP}$-completo [GJNP, pág. 223] y, claramente, BE es resoluble en tiempo lineal. Con la transformación del item anterior, no estaríamos probando que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$? Justifique.

2. Halle un conjunto dominante total de mínimo cardinal en el siguiente árbol [TDOM, pág. 23].



3. Considere el problema

   Matching máximo en Bipartitos (MMB)

   Entrada: un grafo bipartito $G = (V, E)$.
   Objetivo: hallar un matching de G de cardinal máximo.

   Sabemos que los matchings de un grafo bipartito conforman un sistema independiente que es intersección de dos matroides. Por el Teorema de Edmonds, sabemos entonces que MMB es polinomial. Describa un algorimo polinomial para resolver MMB.

   Sugerencia: Ver comentarios al final de la práctica.

4. Considere la transformación de 3-SAT a EXACT COVER dada en el Corolario 9.5 de [LCO, pag. 319].

   a) Construya el grafo G y determine el conjunto X y la colección de subconjuntos $\mathcal{C}$ correspondiente a la fórmula $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee \neg x_2)$.

   b) Pruebe que la transformación de 3-SAT a EXACT COVER es polinomial y correcta.

5. Una fórmula 3-SAT *satisface la propiedad estrella* si cada una de sus cláusulas tiene *exactamente* 3 literales distintos.

   Definimos el siguiente problema:

   Problema 3-SAT*

   Entrada: Φ, fórmula 3-SAT que satisface la propiedad estrella.
   Pregunta: ¿es Φ satisfactible?

   Demuestre que 3-SAT* es $\mathcal{NP}$-completo, reduciendo polinomialmente 3-SAT a 3-SAT*.

   Recordemos que un literal es una variable o su negación. Así una fórmula Φ que satisface la propiedad estrella puede contener cláusulas como $x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2$ (porque x_1 y $\neg x_1$ se consideran literales distintos) pero se prohiben cláusulas como $x_1 \vee x_2$ (sólo tiene 2 literales) o $x_1 \vee x_1 \vee \neg x_2$ (x_1 está repetido).

6. Considere el problema:

   Grundy Total Sequence (GTS)

   Entrada: un grafo $G = (V, E)$.
   Objetivo: hallar una secuencia total legal de cardinal máximo en G.

   Sugerencia: Ver ejercicio 13 de la práctica 1 para recordar conceptos.

   a) Sea v un vértice de grado 1 en G y sea u su único vecino. Pruebe que si S' es una secuencia total legal de cardinal máximo en $G - \{u, v\}$ entonces (u, S', v) es una secuencia total legal de cardinal máximo de G. Asumimos que para un grafo sin aristas la secuencia vacía es total legal.

   b) Pruebe que el problema GTS es polinomial en árboles.

7. Pruebe que la transformación del *Problema del Circuito Hamiltoniano Dirigido* al *Problema del Circuito Hamiltoniano no Dirigido* dada en el Corolario 9.7 de [LCO, pag. 321] es polinomial y correcta.

8. Consideremos el **Problema de Dominación Múltiple (PDM)** definido así:

   Entrada: $G = (V, E)$ un grafo, $k, \alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   Pregunta: ¿existe un conjunto k-dominante de G de tamaño a lo sumo α?

   Pruebe que PDM se resuelve en tiempo polinomial en los siguientes casos:

   a) $\delta(G) \leq k - 2$ ($\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$, es decir, el grado mínimo de G).

   b) $\alpha \leq k - 1$

   c) $\alpha = k$

   d) $\alpha \geq n$

   e) $k = n$.

9. Sea $k \in \mathbb{Z}_+$. Definimos los siguientes problemas:

   Problema de k-Dominación (PkD)

   Entrada: $G = (V, E)$ un grafo, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   Pregunta: ¿existe un conjunto k-dominante de G de tamaño a lo sumo α?

   Problema de k-Empaquetamiento (PkE)

   Entrada: $G = (V, E)$ un grafo, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   Pregunta: ¿existe un k-empaquetamiento de G de tamaño al menos α?

   Sean r y k tales que $1 \leq k < r$ y $\mathcal{G} = \{G : G \text{ es } r\text{-regular}\}$. Si $k' = r + 1 - k$, pruebe que PkD($\mathcal{G}$) se puede reducir polinomialmente a Pk'E($\mathcal{G}$) y PkE($\mathcal{G}$) se puede reducir polinomialmente a Pk'D($\mathcal{G}$).

   Observación: Un grafo G es r-regular si todos sus vértices tienen grado r.

10. Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de vértices C es un *cubrimiento por vértices* de G si toda arista de G tiene al menos un extremo en C.

    Subdividir una arista $e = uv$ de G es eliminar la arista e y colocar un nuevo vértice w y las aristas uw y vw. Por otro lado, colocar un nuevo vértice pendiente u a un vértice $v \in V$ es agregar a G el vértice u y la arista uv.

    a) Dado un grafo simple G, probar que el grafo obtenido subdividiendo todas sus aristas es bipartito.
    b) Sea $G*$ el grafo obtenido a partir de G subdividiendo todas sus aristas y colocando luego un vértice pendiente a cada nuevo vértice de la subdivisión. Probar que si G es planar entonces $G*$ es planar bipartito (i.e. planar y bipartito).
    c) Dado un grafo $G = (V, E)$, probar que si $G*$ tiene un conjunto dominante total de tamaño a lo sumo $j + |E|$ entonces G tiene un cubrimiento por vértices de tamaño a lo sumo j.

11. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Considere el problema 3-COL de decidir si un grafo G es 3-coloreable.

    a) Probar que 3-COL puede transformarse polinomialmente a 3-SAT.
       Sugerencia:
       1) Considerar 3 literales por vértice y cada literal representa un color.
       2) Obtener una expresión lógica de 3-SAT que modele el hecho que un vértice recibe exactamente un color. (Es decir, la expresión es verdadera si y solo si el vértice recibe exactamente un color).
       3) Dada una arista $e = uv$, hallar una expresión lógica de 3-SAT que modele el hecho que u y v no reciben el mismo color.
       4) En base a lo anterior, dar una expresión lógica del 3-SAT para el 3-coloreo de un grafo G.
    b) Sabiendo que 3-SAT es $\mathcal{NP}$-*c*, ¿el apartado anterior permite concluir que 3-COL es $\mathcal{NP}$-*c*? Justifique.

12. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un k-coloreo equitativo de G es un k-coloreo de G tal que para dos clases de colores C_i, C_j (con $i, j = 1, \ldots, k$ e $i \neq j$), se satisface $||C_i| - |C_j|| \leq 1$. El *número cromático equitativo* $\chi_{eq}(G)$ es el mínimo k para el cual G admite un k-coloreo equitativo. Considere el problema k-COLEQ de *decidir* si $\chi_{eq}(G) \leq k$, y el problema COLEQ de *hallar* $\chi_{eq}(G)$.

a) Pruebe que 2-COLEQ es decidible en tiempo polinomial.

b) Sabiendo que 3-COLEQ es $\mathcal{NP}$-*c* (incluso en grafos linea de grafos 3-regulares) pruebe que COLEQ es $\mathcal{NP}$-difícil. ¿Puede afirmar además que COLEQ es $\mathcal{NP}$-difícil incluso en grafos linea de grafos 3-regulares? Justifique.

Comentarios

Respecto al ejercicio 3, pruebe que el *Problema de Máximo Matching en Bipartitos* puede ser transformado en el *Problema de Flujo Máximo en una red* (PFM). Recuerde que una red es un digrafo $D = (V, A)$ y un vector $c \in \mathbb{Z}_+^A$ de capacidades asociadas a sus arcos. Dados dos vértices distinguidos $s, t \in V$ (llamados *fuente* y *sumidero* respectivamente), decimos que $f \in \mathbb{Z}_+^A$ es un *st-flujo* de D si satisface:

- *Restricciones de capacidad*: $f_e \leq c_e$ para todo $e \in A$, y
- *Conservación del flujo*: $\sum_{v \in N^+(u)} f_{uv} = \sum_{v \in N^-(u)} f_{vu}$ para todo $u \in V \backslash \{s, t\}$.

El *valor del flujo* f se denota $val(f)$ y es igual a $val(f) = \sum_{v \in N^+(s)} f_{sv} = \sum_{v \in N^-(t)} f_{vt}$.

El **Problema de Flujo Máximo en una red (PFM)** es definido como sigue:
Entrada: $D = (V, A)$ digrafo, $s, t \in V$ y $c \in \mathbb{Z}_+^A$.
Objetivo: hallar un st-flujo en D de valor máximo.

El algoritmo (polinomial) de Ford-Fulkerson resuelve el PFM [LCO, pág. 47].

Bibligrafía:

[DOMPACK] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *The multiple domination and limited packing problems in graphs.* Inform. Proc. Let. 111 (2011) 1108-1113.

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization.* Wiley-Interscience.

[TDOM] Michael A. Henning, Anders Yeo. *Total Domination in Graphs* (Chapter 3).

[GJNP] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W.H. Freeman.