FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
Escuela de Posgrado y Educación Continua

Tópicos Avanzados en Optimización Combinatoria y Teoría de Grafos

Docentes: Graciela Nasini, Daniel Severin, Paola Tolomei, Pablo Torres

Práctica nº 6: Teoría Poliedral y Resolución de Modelos mediante Programación Lineal Entera

1. Para cada uno de los conjuntos siguientes X, determine el sistema de inecuaciones lineales cuyo conjunto solución es el poliedro $conv(X)$.

   (a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x + y \geq 3\} \cup \{(1, 1), (2, 2)\}$.

   (b) $X = \{(x, y \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+ : x \leq 6y; x \leq 16\}$.

2. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ finito. Pruebe que los siguientes enunciados son equivalentes:

   - X es afínmente independiente.
   - Para cualquier $w \in \mathbb{R}^n$, $\{x - w : x \in X\}$ es afínmente independiente.
   - Para cualquier $\hat{x} \in X$, $\{x - \hat{x} : x \in X - \{\hat{x}\}\}$ es linealmente independiente.

3. Sea P el poliedro definido por el siguiente sistema (S):

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad x_3 \qquad\quad = -4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \leq 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 0 \\ \qquad x_2 \qquad - 5x_4 \leq -2 \\ \qquad x_2 \qquad - x_4 \leq 2 \\ \quad - 3x_2 \qquad + 7x_4 \leq 6 \\ -x_1 \qquad\qquad\qquad \leq 0 \end{cases}$$

   (a) Determine el sistema de ecuaciones derivado del sistema (S).

   (b) Determine la dimensión de P.

   (c) Identifique todos los puntos extremos de P.

   (d) Pruebe que $F_1 = \{x \in P : x_1 = 1\}$ no es una cara de P.
   Sugerencia: Proponga $x^1, x^2 \in P$ tales que $x^1_1 < 1$ y $x^2_1 > 1$.

   (e) Pruebe que $F_2 = \{x \in P : x_2 - x_4 = 2\}$ es una faceta de P.

   (f) Pruebe que $F_3 = \{x \in P : x_1 = 0\}$ es una cara de P pero no una faceta. ¿De qué dimensión es F_3?

4. Considere $P = conv(S)$ donde S se define a continuación:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3) \in \{0,1\}^7 : y_j = 1 \Leftrightarrow \text{hay } j \text{ unos en } (x_1, x_2, x_3)\}$$

(a) Enumere los 8 puntos de S.

(b) Determine la dimensión de P y el sistema de ecuaciones derivado.

(c) Demuestre que la desigualdad $y_j \geq 0$ define faceta de P para todo $j = 0, 1, 2, 3$.
Sugerencia: Puede aprovechar lo realizado en el ítem anterior y la propiedad de que si X es un conjunto de puntos afinmente independientes y $X' \subset X$, entonces X' también lo es.

(d) Demuestre que $y_j \leq 1$ define una cara de P que no es faceta, para todo $j = 0, 1, 2, 3$.

(e) Demuestre que $y_3 \leq x_i$ define faceta de P para todo $i = 1, 2, 3$.

(f) Demuestre que $x_i \leq y_1 + y_2 + y_3$ define faceta de P para todo $i = 1, 2, 3$.

5. Dado $G = (V, E)$, STAB(G) es el poliedro cápsula convexa de los vectores característicos de los conjuntos estables de G.

   (a) Pruebe que las desigualdades $\sum_{v \in V(G')} x_v \leq \alpha(G')$ son válidas en $STAB(G)$, para todo G' subgrafo inducido por vértices de G.

   (b) Escriba las desigualdades anteriores para los casos particulares en que G' es: 1) una clique, 2) un agujero impar, 3) un anti-agujero impar.
   Nota: Las def. de *agujeros* están dadas en el Ej. 7 de la Práctica 2.

6. Dado $G = (V, E)$, la relajación clique de STAB(G) es el siguiente poliedro:

$$\text{CLIQUE}(G) = \{x \in \mathbb{R}^V_+ : \sum_{v \in Q} x_v \leq 1 \quad \forall\ Q \text{ clique maximal de } G\}.$$

   Chvátal probó que $STAB(G) = CLIQUE(G)$ si y sólo G es un grafo perfecto.
   Nota: La def. de *perfecto* es dada en el Ej. 7 de la Práctica 2. Además se sabe que G es perfecto si y sólo si no contiene agujeros ni anti-agujeros impares.

   (a) Sea G' un agujero impar de G y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^V$ tal que $\bar{x}_v = \frac{1}{2}$ si $v \in V(G')$ y $\bar{x}_v = 0$ si no. Pruebe que $\bar{x}$ es un punto extremo de CLIQUE(G).

   (b) Sea G' un anti-agujero impar de G y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^V$ tal que $\bar{x}_v = \frac{2}{|V(G')|-1}$ si $v \in V(G')$ y $\bar{x}_v = 0$ si no. Pruebe que $\bar{x}$ es un punto extremo de CLIQUE(G).

   (c) Sea G no perfecto. Encuentre $x^* \in \text{CLIQUE}(G) \setminus \text{STAB}(G)$ y una desigualdad que separe x^* de STAB(G).
   Sugerencia: Ver ítems anteriores y ejercicio anterior.

7. Dado $G = (V, E)$.

   (a) Pruebe que $STAB(G)$ es de dimensión completa.

   (b) Pruebe que, para todo grafo G, las siguientes desigualdades definen facetas de $STAB(G)$:

      i. $x_v \geq 0$, $v \in V$.

      ii. $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$, Q clique maximal de G.

   (c) Sea $G = C_{2k+1}$, con $k \geq 2$. Pruebe que $\sum_{v \in V} x_v \leq k$ define faceta de $STAB(G)$.
   Sugerencia: Para la facetitud, considere $V = \{0, 1, \ldots, 2k\}$ y los estables $S_i = \{i + 2t\ (mod\ n) : t = 0, \ldots, k-1\}$ para todo $i \in V$, y pruebe que la matríz cuyas filas son los vectores característicos de S_i es no-singular.

(d) Sea $G = \overline{C_{2k+1}}$ el complemento del circuito de $2k+1$ vértices, con $k \geq 2$. Pruebe que $\sum_{v \in V} x_v \leq 2$ define faceta de $STAB(G)$.

(e) El grafo $W_n = C_n \vee \{u\}$, donde $u \notin V(C_n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ es llamado *rueda* de tamaño n. Pruebe que:

i. $\sum_{v=0}^{2k} x_v \leq k$ es una desigualdad válida de $STAB(W_{2k+1})$ pero no define faceta.

ii. $kx_u + \sum_{v=0}^{2k} x_v \leq k$ define faceta de $STAB(W_{2k+1})$.

Sugerencia: Considere los estables maximales del grafo.

8. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $c \in \mathbb{R}_+^E$. Sea

$$(PE) \quad z = min\{cx : \sum_{u \in S; v \notin S} x_{uv} \geq 1 \ \ \forall \ S \subset V; \ x \in \{0,1\}^E\}.$$

(a) Pruebe que si x es una solución factible de (PE), el subgrafo de G inducido por los arcos $\{uv \in E : x_{uv} = 1\}$ es un grafo conexo.

(b) Pruebe que (PE) modela el Problema del Árbol Generador Mínimo.

9. Considere el problema de asignar viajes a conductores minimizando la cantidad de horas extras (ver [SLIDES1]). Recuerde que una instancia consiste en los siguientes elementos:

- $K = \{$conjunto de conductores$\}$; $V = \{$conjunto de viajes$\}$;
- $A = \{$pares ordenados de viajes que se pueden realizar consecutivamente$\}$
- $J = \{$pares ordenados primer-último viaje de una jornada factible$\}$
- c_{uv} = minutos extras de una jornada que comienza en u y finaliza en $v, \forall (u, v) \in J$

Llamamos Modelo 1 del problema al que utiliza variables de asignación conductor-viaje (ver [SLIDES1]).

Sea $J^* = \{(b, a) : (a, b) \in J\}$. Dado el digrafo $D^* = (V, A^*)$ con $A^* = A \cup J^*$, cada jornada laboral puede representarse como un circuito dirigido en D^* y el problema de asignación de conductores a viajes puede ser pensado como asignar a cada conductor un circuito dirigido en D^* con un único arco de J^*, de manera que los conjuntos de vértices que participan en cada circuito formen una partición de V.

Llamamos Modelo 2 a la formulación del problema como programa lineal entero, basado en las variables binarias:

$$z_{kuv} = \begin{cases} 1, & \text{si conductor } k \text{ toma viaje } u \text{ y luego } v \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

para todo $k \in K$, $(u, v) \in A^*$ (ver [SLIDES 2]).

Compare la performance de los modelos 1 y 2, determinando, para cada modelo el tamaño máximo que el solver SCIP es capaz de resolver en a lo sumo una hora de CPU.

Nota: Trabaje sobre las instancias dadas en la página de la cátedra y realice una tabla comparativa con los tiempos necesarios para cada instancia resuelta para alguno de los modelos, y proponga una estimación de la mejor performance de un modelo respecto al otro. Ver final de la práctica.

10. Continuando con el Problema de asignar viajes a conductores, llamamos Modelo 3 al que utiliza las siguientes variables binarias (ver [SLIDES2]):

$$z_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{si un mismo conductor toma viaje } u \text{ y luego } v \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

para todo $(u, v) \in A^*$. Este modelo utiliza las siguientes restricciones

$$\sum_{e \in P} z_e \leq |P| - 1 \qquad \forall\ P \text{ camino prohibido en } D = (V, A^*)$$

donde P es un *camino prohibido* si contiene al menos dos arcos, y su primer y último arco pertenece a J^*.

(a) Pruebe que si $z \in [0,1]^{A^*}$ satisface las restricciones asociadas a caminos prohibidos que sólo contienen dos arcos de J^* en sus extremos, z satisface todas las restricciones de caminos prohibidos.

Nota: Esta propiedad nos permite restringirnos sólo a caminos prohibidos que no tengan arcos de J^* excepto en sus extremos.

Sugerencia: Pruebe que si P es un camino prohibido que contiene k arcos que pertenecen a J^* con $k \geq 3$, entonces existen caminos prohibidos P_i con $i = 1, \ldots, k-1$ tales que cada P_i sólo contiene dos arcos de J^* en sus extremos y que si $z \in [0,1]^{A^*}$ satisface las restricciones asociadas a P_i para todo i entonces z también satisface la asociada a P.

(b) Consideremos el problema de separación de las restricciones de caminos prohibidos,

ENTRADA: $D^* = (V, A^*)$ digrafo, $J^* \subset A^*$, $z^* \in [0,1]^{A^*}$.
PREGUNTA: Existe un camino prohibido P tal que $\sum_{e \in P} z^*_e > |P| - 1$?

y el siguiente procedimiento (de complejidad polinomial en el tamaño de la entrada):

- Sea $\tilde{J} = \{e \in J^* : z^*_e > 0\}$.
- Para todo $(u, v) \in \tilde{J}$ y todo $(r, t) \in \tilde{J} \setminus \{(u, v)\}$ tal que $z^*_{uv} + z^*_{rt} > 1$ hacer
  i. Si $v = r$ entonces contestar **SI**, proponer $P = (u, v)(r, t)$ y PARAR.
  ii. Resolver el Problema de Camino Más Corto sobre $D = (V, A)$ con costos $c_e = 1 - z^*_e$ y vértice inicial v.
  iii. Si existe un vr-camino $\bar{P}$ de mínimo costo, y $c(\bar{P}) < z^*_{uv} + z^*_{rt} - 1$ entonces contestar **SI**, proponer $P = (u, v)\bar{P}(r, t)$ y PARAR.
- Contestar **NO** y PARAR.

Pruebe que el procedimiento propuesto resuelve el problema de separación de las restricciones de caminos prohibidos.

11. El siguiente Programa Entero (PE) modela el Problema de hallar la secuencia legal de máxima longitud de un grafo, $\gamma_{gr}(G)$ (vea Ej. 13 de la Práctica 1). Para todo $v \in V$ e $i = 1, \ldots, n$, sea y_{vi} una variable binaria tal que $y_{vi} = 1$ si v es elegido en el paso i; para todo $u \in V$ e $i = 1, \ldots, n$, sea x_{ui} una variable binaria tal que $x_{ui} = 1$ si u está disponible para ser marcado en el paso i (es decir, que no fue marcado por ningún vértice en los pasos anteriores). Llamamos a la siguiente formulación $\mathcal{F}_1$:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{v \in V} y_{vi}$$

subject to

$$\sum_{v \in V} y_{vi} \leq 1, \qquad \forall \ i = 1, \dots, n \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{vi} \leq 1, \qquad \forall \ v \in V \tag{2}$$

$$y_{vi+1} \leq \sum_{u \in N[v]} (x_{ui} - x_{ui+1}), \qquad \forall \ v \in V, \ i = 1, \dots, n-1 \tag{3}$$

$$x_{ui} + \sum_{v \in N[u]} y_{vi} \leq 1, \qquad \forall \ u \in V, \ i = 1, \dots, n \tag{4}$$

$$x_{ui+1} \leq x_{ui}, \qquad \forall \ u \in V, \ i = 1, \dots, n-1 \tag{5}$$

$$x, y \in \{0,1\}^{n^2} \tag{6}$$

(a) Explique coloquialmente qué realiza cada restricción. Por ejemplo, "la restricción (3) garantiza que v puede ser elegido en el siguiente paso $(i+1)$ sólo si en el paso actual (i) existe al menos un vértice no marcado de su vecindario."

(b) Es habitual agregar restricciones adicionales a un modelo que eliminen soluciones enteras, para así reducir el árbol de búsqueda, siempre que la correctitud del modelo quede garantizada. Un tipo de soluciones a eliminar son las denominadas *simétricas*, soluciones para las cuales existe otra (que no se elimina) con el mismo valor objetivo. Otro tipo de soluciones a eliminar son aquellas cuyo valor objetivo se sabe que no es óptimo. Explique qué soluciones son eliminadas por los siguientes grupos de restricciones, y a qué tipo corresponden (simétricas, no-óptimas o ambas).

i. *Grupo 1.*

$$x_{u1} + \sum_{v \in N[u]} y_{v1} \geq 1, \qquad \forall \ u \in V \tag{7}$$

$$x_{ui+1} + \sum_{v \in N[u]} y_{vi+1} \geq x_{ui}, \qquad \forall \ u \in V, \ i = 1, \dots, n-1 \tag{8}$$

ii. *Grupo 2.* Sea LB una cota inferior de $\gamma_{gr}(G)$.

$$\sum_{v \in V} y_{vi} = 1, \qquad \forall \ i = 1, \dots, LB \tag{9}$$

$$\sum_{v \in V} y_{vi+1} \leq \sum_{v \in V} y_{vi}, \qquad \forall \ i = LB, \dots, n-1 \tag{10}$$

(c) Llamamos $\mathcal{F}_2$ a la formulación que consiste de las restricciones (2)-(10). Pruebe que cualquier solución factible $x, y \in \mathbb{R}_+^{n^2}$ de la relajación lineal de $\mathcal{F}_2$ satisface las restricciones (1).
Ayuda: Utilice las del *Grupo 2.*

(d) Sea el poliedro $P_1 = conv(S_1)$, donde S_1 son las soluciones enteras de $\mathcal{F}_1$. Demuestre que la siguiente es una familia de desigualdades válidas de P_1 y diseñe un procedimiento que las separe en tiempo polinomial (vea el formato del ítem (b) del ejercicio anterior):

$$x_{ui} + \sum_{j=1}^{i} y_{wj} \leq 1, \qquad \forall \ u \in V, \ w \in N[u], \ i = 2, \dots, n$$

(e) Sea G el grafo *paw*: $G = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3)\})$. En los archivos `paw1.lp`, `paw1.poi` y `paw1.ieq` (en `paw.zip`) se hallan, respectivamente, la formulación $\mathcal{F}_1$, los puntos enteros S_1 y la descripción completa de P_1 (generadas con 2 herramientas: [Porta] y [ZerOne]). Por ej., en `paw1.lp`, las restricciones `c1-c4` se corresponden con las (1) de (PE). En `paw1.ieq`, las restricciones `( 1)-( 20)` se corresponden con aquellas desigualdades de no-negatividad que definen facetas de P_1. Debido a una limitación de [Porta], las variables x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, ..., x_{44}, y_{11}, y_{12}, ..., y_{44} se enumeran consecutivamente, recibiendo los nombres `x1`, `x2`, ..., `x32`.

i. En `paw1.ieq`, ¿qué restricciones de entre las de $\mathcal{F}_1$, es decir (1)-(5), identifican las desigualdades del grupo `( 21)-( 32)`?

ii. Del grupo `( 33)-(273)`, identifique 3 desigualdades que se correspondan con aquellas de $\mathcal{F}_1$, es decir (1)-(5).

iii. De `( 33)-(273)`, elija una desigualdad que no sea ninguna de las (1)-(5). Para estar seguro de que no lo sea, proponga una solución factible (x^*, y^*) de la relajación lineal de $\mathcal{F}_1$ que viola la desigualdad. Luego pruebe su validez en P_1.
Sugerencia: Dada una desigualdad $\alpha x \leq \beta$ y una solución x^*, la violación es $\alpha x^* - \beta$. Para hallar la máxima violación posible use como función objetivo αx sobre la relajación lineal de (PE). Esta se puede obtener eliminando los 3 renglones de `Binaries` correspondientes a la restricción (6) en `paw1.lp`.

iv. De `(274)-(694)`, escoja una desigualdad y demuestre que es válida en P_1.

(f) También se halló la descripción completa del grafo paw, para la formulación $\mathcal{F}_2$ usando $LB = 2$. Los datos $\mathcal{F}_2$, S_2 y P_2 se encuentran en los archivos `paw2.*` (note la drástica reducción de las soluciones enteras producido por las restricciones (7)-(10) que se manifiesta al comparar los archivos `*.poi`).

i. Demuestre que $dim(P_2) = 5$.

ii. Demuestre que $x_{12} \leq x_{11}$ no define faceta de P_2.

iii. Demuestre que $y_{21} \geq 0$ define faceta de P_2. Luego, identifique cuál de las desigualdades que aparece en `paw2.ieq` se corresponde a ella (¡así es! una de ellas lo es, sólo que está "enmascarada" por el sistema minimal de ecuaciones).
Sugerencia: Use la misma sugerencia que el Ej. 4 ítem (c).

Notas:

El Ejercicio 9 requiere el uso de las herramientas LPsolve, Zimpl y SCIP. LPsolve es un editor y optimizador de programas lineales enteros (PLEs), pero en este ejercicio sólo lo utilizamos como editor. Zimpl es un compilador de lenguaje de modelado matemático a PLEs y SCIP es el mejor solver no comercial disponible para optimizar PLEs. Comience realizando los siguientes pasos:

- Descargue el archivo denominado `Instalador-lpsolve-5.5.2.0.exe` de la pág. de la Cátedra y ejecútelo. Luego de realizada la instalación, puede borrar este archivo.
- Cree en su máquina un directorio de trabajo y descomprima el archivo `modelos.zip` de la pág. de la Cátedra, en este directorio. En la carpeta se crearán los siguientes archivos:
  - `modelo`i`.zpl` (para $i = 1, 2$): Modelo i en lenguaje de modelado matemático.
  - `instancia`j`.zpl` (para $j = 1, \ldots, 8$): Instancias en lenguaje de modelado matemático.
  - `correr_modelo`i`.bat`: Programa que utiliza Zimpl/SCIP para resolver `modelo`i`.zpl`.
  - `manual_zimpl.pdf`: Manual del lenguaje de modelado matemático.
  - `zimpl.exe`, `scip.exe`, `scip-3.0.2....dll`: Archivos auxiliares.

- En `modelo1.zpl` se encuentra actualmente el Modelo 1 con los datos de la Instancia 1. Para resolver este problema ejecute `correr_modelo1.bat`. Luego de finalizada la optimización, se creará un archivo `modelo1.log` con los resultados de la optimización. Lea este archivo con un editor (puede usar LPsolve para tal fin). El archivo se compone de varias secciones. Una de las secciones se llama "primal solution" y contiene el valor de la función objetivo y los valores de aquellas variables de la solución entera óptima que no son cero. En la sección "Statistics", en la línea "Total Time" figura el tiempo de CPU transcurrido (en segundos).
- Para resolver el problema que utiliza el Modelo 1 y otra Instancia j, reemplace las líneas que corresponden a la Instancia 1 en el archivo `modelo1.zpl` por las que figuran en `instancia`j`.zpl`. Luego realice el paso anterior.
  Nota: Para efectuar dicho reemplazo, ejecute LPsolve y abra `instancia`j`.zpl`. Elija todas las líneas y cópielas con Ctrl-C. Luego abra `modelo1.zpl` y reemplace las líneas 3-12 con las de la instancia (elija esas líneas y luego presione Ctrl-V). Finalmente, grabe el archivo `modelo1.zpl`.
- Para resolver el problema que utiliza el Modelo 2 y la Instancia 1, primero debe completar el archivo `modelo2.zpl` con las restricciones del mismo (actualmente en el archivo sólo se encuentran definidos los datos de la Instancia 1, los conjuntos A^*, $\delta^*_+(v)$, $\delta^*_-(v)$, las variables $z(k,u,v)$ y la funcion objetivo) siguiendo la lógica del archivo `modelo1.zpl`. Luego utilice el programa `correr_modelo2.bat`. En caso de error, el mismo será mostrado en la ventana que corre dicho programa. Si la optimización se lleva a cabo sin problemas, se creará un archivo `modelo2.log` con los resultados de la optimización. Verifique que la solución óptima coincida con la obtenida al resolver esta instancia con el Modelo 1.
- Para resolver el problema que utiliza el Modelo 2 y otra Instancia j, realice los mismos pasos propuestos para el Modelo 1.

A continuación se da el detalle de cada instancia, por si se desean comprobar los resultados:

Número	Conductores	Viajes	Minutos extra
1	2	7	78
2	5	19	32
3	10	39	47
4	15	59	101
5	20	77	172
6	25	97	455
7	30	117	588
8	35	137	687

Bibliografía:

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization.* Wiley-Interscience.

[SLIDES1] M. E. Alvarado, G. Nasini, D. Severin. *Optimización de la Asignación Conductores-Viajes en una empresa de transporte: un algoritmo de mejoras basado en un modelo de Programación Lineal Entera.* LXII Reunión anual de la UMA (2013).

[SLIDES2] F. Bertero, G. Nasini, D. Severin. *El Problema de Asignación Conductores-Viajes en empresas de transporte público: Nuevos modelos de Programación Lineal Entera.* 12º Simposio Argentino de Investigación Operativa, 43ª JAIIO (2014).

[Porta] T. Christof, A. Löbel. Polyhedron Representation Transformation Algorithm. `http://porta.zib.de`

[ZerOne] M.E. Lübbecke. ZerOne: Vertex enumeration for $0-1$ polytopes (ver. 1.8.1), 1999.