Clique-width

El *clique-width* de un grafo G es el número mínimo de etiquetas necesarias para construir G utilizando las siguientes cuatro operaciones:

1. *Creación* de un nuevo vértice v con etiqueta i (denotado por $i(v)$).
2. *Unión disjunta* de dos grafos etiquetados G y H (denotado por $G \oplus H$).
3. *Join*: Conexión por una arista de cada vértice con etiqueta i con cada vértice con etiqueta j ($i \neq j$, denotado por $\eta_{i,j}$).
4. *Re-etiquetado*: Renombrar etiqueta i a etiqueta j (denotado $\rho_{i \to j}$)

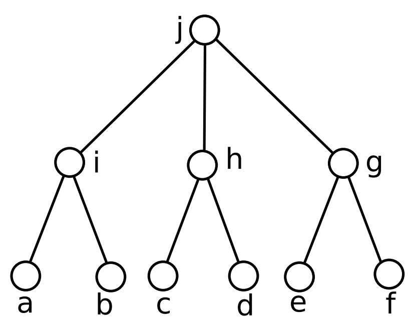
Todo grafo G puede ser construido por una expresión algebraica usando estas cuatro operaciones. Por ejemplo, un camino de cinco vértices a, b, c, d, e, puede ser construido de la siguiente forma:

$$\eta_{3,2}(3(e) \oplus \rho_{3\to 2}(\rho_{2\to 1}(\eta_{3,2}(3(d) \oplus \rho_{3\to 2}(\rho_{2\to 1}(\eta_{3,2}(3(c) \oplus \eta_{2,1}(2(b) \oplus 1(a))))))))).$$

Una tal expresión se denomina k-expresión si utiliza a lo sumo k etiquetas diferentes. Luego, el *clique-width* de G, denotado $cw(G)$, es el mínimo k para el cual existe una k-expresión que construya G.

Ejemplo

El siguiente grafo:



tiene la siguiente 3-expresión:

$$\eta_{32}(3(j) \oplus ((\eta_{21}(2(g) \oplus 1(e) \oplus 1(f))) \oplus (\eta_{21}(2(g) \oplus 1(e) \oplus 1(f))) \oplus (\eta_{21}(2(g) \oplus 1(e) \oplus 1(f)))))$$

MSOL

Con respecto a las propiedades en grafos, si una fórmula puede ser definida usando vértices y conjuntos de vértices de un grafo, los operadores lógicos OR, AND, NOT (denotados por $\vee$, $\wedge$, $\neg$), los cuantificadores lógicos $\forall$ y $\exists$ sobre vértices y conjuntos de vértices, la relación de pertenencia $\in$, el operador igualdad $=$ para vértices y la relación binaria de adyacencia adj, donde $adj(u, v)$ es verdadera si y solo si u y v son adyacentes, entonces la fórmula es expresable en *lógica monádica de segundo orden* τ_1 (MSOL(τ_1)).

Observación 1: En lugar de escribir $u \in X$, es usual usar la notación $X(u)$.

Observación 2: Con $a \to b$ denotamos la relación de implicancia, la cual se reduce a $\neg a \vee b$.

Ejemplos:

1) X es conjunto independiente:

$$Ind(X) \equiv \forall u, v((X(u) \wedge X(v)) \to \neg adj(u, v))$$

2) X, Y, Z son una partición de $V(G)$:

$$Part(X, Y, Z) \equiv \forall v(X(v) \vee Y(v) \vee Z(v)) \wedge \neg \exists u((X(u) \wedge Y(u)) \vee (X(u) \wedge Z(u)) \vee (Z(u) \wedge Y(u)))$$

3) G es 3-coloreable:

$$3Col \equiv \exists X, Y, Z(Part(X, Y, Z) \wedge Ind(X) \wedge Ind(Y) \wedge Ind(Z))$$

Un problema de optimización P es un LinEMSOL(τ_1) problema de optimización sobre grafos, si puede ser definido de la siguiente forma. Dado un grafo G y funciones $f_1, \ldots, f_m$ a valores enteros sobre los vértices de G, encontrar una asignación z al conjunto de variables libres en θ tal que

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} |z(X_i)|_j = opt \left\{ \sum_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij} |z'(X_i)|_j : \theta(X_1, \ldots, X_l) \text{ es verdadera para } G \text{ y } z' \right\},$$

donde θ es una MSOL(τ_1) fórmula con conjunto de variables libres $X_1, \ldots, X_l$, $a_{ij} : i \in \{1, \ldots, l\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ son números enteros y $|z(X_i)|_j := \sum_{a \in z(X_i)} f_j(a)$.

Ejemplo

Dado un grafo G, el problema de la *Clique de Peso Entero Máximo* es un problema LinEMSOL(τ_1) ya que puede ser expresado de la siguiente forma. Dado un grafo G y una función f_1 que asocia pesos enteros a sus vértices, encontrar una asignación z al conjunto de variables libres X_1 in θ tal que:

$$|z(X_1)|_1 = \max\{|z'(X_1)|_1 : \theta(X_1) \text{ es verdadera para } G \text{ y } z'\}$$

donde $\theta(X_1)$ está definida por:

$$\theta(X_1) = \forall u, v((X_1(u) \wedge X_1(v) \wedge u \neq v) \to adj(u, v)).$$

Se conoce que los conceptos de LinEMSOL(τ_1) y clique-width son particularmente útiles combinados como muestra el siguiente resultado:

Teorema [1, 2] *Sea q una constante y $\mathcal{C}(q)$ una clase de grafos con clique-width a lo sumo q. Entonces todo problema LinEMSOL(τ_1) sobre $\mathcal{C}(q)$ puede ser resuelto en tiempo polinomial.*

Luego, por ejemplo, el problema de k-coloreo con k fijo, es poliniomial en las familias de grafos con clique-width acotado por una constante.

Más definiciones y propiedades

Dada una clase de grafos $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_n$ denota el número de grafos con etiquetas que *distinguen* sus n vértices (i.e., grafos con conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, n\}$) en la clase $\mathscr{F}$. Por ejemplo, si $\mathscr{F}$ es la familia de caminos, entonces $\mathscr{F}_3 = 3$ pues solo se pueden armar los caminos P_3 cuyos conjuntos de aristas son $\{(1,2),(2,3)\}$, $\{(1,2),(1,3)\}$ y $\{(1,3),(2,3)\}$. Si $\mathscr{F}$ es la familia de grafos completos, entonces $\mathscr{F}_n = 1$ para todo n.

No es difícil ver que para cualquier clase de grafos $\mathscr{F}$ resulta $0 \leq \mathscr{F}_n \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (para evitar simetrías, el conjunto de aristas siempre se puede representar con pares (i,j) con $i < j$).

Luego, una clase de grafos $\mathscr{F}$ es *factorial* si para todo n, $n^{c_1 n} \leq \mathscr{F}_n \leq n^{c_2 n}$ para algunas constantes c_1 y c_2. Algunas clases de grafos factoriales son los grafos planares y grafos de línea.

Si no existe una constante c tal que $\mathscr{F}_n \leq n^{cn}$ para todo n, entonces se dice que $\mathscr{F}$ es *superfactorial.*

Se conoce que si una clase de grafos es superfactorial entonces su clique-width es no acotado.

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo k, un subconjunto B de vértices de G es un *k-empaquetamiento* de G si para todo $v \in V$, $|B \cap N[v]| \leq k$. Notamos $L_k(G)$ al máximo cardinal de un k-empaquetamiento de G. El *Problema de k-Empaquetamiento* es el de hallar un k-empaquetamiento de G de cardinal máximo. De forma similar, un subconjunto D de vértices de G es un *conjunto k-dominante* de G si para todo $v \in V$, $|B \cap N[v]| \geq k$. Notamos $\gamma_k(G)$ al mínimo cardinal de un conjunto k-dominante de G. El *Problema de k-Dominación* es el de hallar un conjunto k-dominante de G de cardinal mínimo.

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo k, una función $f : V \mapsto \{0, \ldots, k\}$ es una función $\{k\}$-dominante de G si $f(N[v]) \geq k$ ($f(U) = \sum_{u \in U} f(u)$, $\forall U \subseteq V$). El *Problema de $\{k\}$-Dominación* es hallar una función $\{k\}$-dominante de peso mínimo, i.e. tal que $f(V)$ sea mínimo. Notamos $\gamma_{\{k\}}(G)$ al mínimo peso de las funciones $\{k\}$-dominantes de G.

Sean G y H dos grafos disjuntos y $v \in V(G)$, luego $G[H/v]$ denota el grafo obtenido por *reemplazo* en G de v por H, i.e. $V(G[H/v]) = (V(G) \cup V(H)) - \{v\}$ y

$$\begin{aligned} E(G[H/v]) = E(H) \cup \{e : e \in E(G) \text{ y } e \text{ es no incidente en } v\} \cup \\ \{uw : u \in V(H),\ w \in V(G) \text{ y } w \text{ es adyacente a } v \text{ en } G\}. \end{aligned}$$

Dados grafos G y H, notamos $G \odot H$ al grafo obtenido reemplazando todos los vértices de G por H. Si, por ejemplo K_i es el grafo completo de i vértices, $K_n \odot K_m$ es isomorfo a K_{n+m}.

References

[1] B. Courcelle, J. A. Makowsky, U. Rotics, *Linear Time Solvable Optimization Problems on Graphs of Bounded Clique Width*, Theory of Computing Systems 33, (2000) 125–150.

[2] S. Oum, P. Seymour, *Approximating clique-width and branch-width*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 96, (2006) 514–528.