Tópicos avanzados en optimización combinatoria y teoría de grafos.

Pablo Torres

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario

Abordajes de problemas NP-completos

INTRODUCCIÓN

Definición: Dado $\pi \in NP-c$ y $\mathscr{F}$ una familia particular de entradas de π, notamos con $\pi(\mathscr{F})$ al (nuevo) problema con entradas en $\mathscr{F}$ y misma pregunta que π.

Introducción

Definición: Dado $\pi \in NP-c$ y $\mathscr{F}$ una familia particular de entradas de π, notamos con $\pi(\mathscr{F})$ al (nuevo) problema con entradas en $\mathscr{F}$ y misma pregunta que π.

Ejemplo:

$\underline{\pi : CH_nD.}$

E : G, grafo,

P : ¿tiene G un ciclo hamiltoniano no dirigido?

INTRODUCCIÓN

Definición: Dado $\pi \in NP-c$ y $\mathscr{F}$ una familia particular de entradas de π, notamos con $\pi(\mathscr{F})$ al (nuevo) problema con entradas en $\mathscr{F}$ y misma pregunta que π.

Ejemplo:

$\underline{\pi : CH_nD.}$

$E:$ G, grafo,

$P:$ ¿tiene G un ciclo hamiltoniano no dirigido?

$\mathscr{F}$: flia. de grafos planares $\rightarrow$ $\pi(\mathscr{F}) \in NP-c$.

INTRODUCCIÓN

Definición: Dado $\pi \in NP-c$ y $\mathscr{F}$ una familia particular de entradas de π, notamos con $\pi(\mathscr{F})$ al (nuevo) problema con entradas en $\mathscr{F}$ y misma pregunta que π.

Ejemplo:

$\underline{\pi : CH_nD.}$

E : G, grafo,

P : ¿tiene G un ciclo hamiltoniano no dirigido?

$\mathscr{F}$: flia. de grafos planares $\rightarrow$ $\pi(\mathscr{F}) \in NP-c$.

$\mathscr{F}$: flia. de grafos completos $\rightarrow$ $\pi(\mathscr{F}) \in P$.

Introducción

Observación: $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$,

Introducción

Observación: $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$,

- $\pi(\mathscr{F}_2) \in P \implies \pi(\mathscr{F}_1) \in P$.

INTRODUCCIÓN

Observación: $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$,

- $\pi(\mathscr{F}_2) \in P \implies \pi(\mathscr{F}_1) \in P$.
- $\pi(\mathscr{F}_1) \in NP-c \implies \pi(\mathscr{F}_2) \in NP-c$.

INTRODUCCIÓN

Observación: $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$,

- $\pi(\mathscr{F}_2) \in P \implies \pi(\mathscr{F}_1) \in P$.
- $\pi(\mathscr{F}_1) \in NP - c \implies \pi(\mathscr{F}_2) \in NP - c$.
- $\pi(\mathscr{F}_2) \in NP - c \not\Longrightarrow \pi(\mathscr{F}_1) \in NP - c$.

INTRODUCCIÓN

Observación: $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$,

- $\pi(\mathscr{F}_2) \in P \implies \pi(\mathscr{F}_1) \in P$.
- $\pi(\mathscr{F}_1) \in NP - c \implies \pi(\mathscr{F}_2) \in NP - c$.
- $\pi(\mathscr{F}_2) \in NP - c \not\Longrightarrow \pi(\mathscr{F}_1) \in NP - c$.
- $\pi(\mathscr{F}_1) \in P \not\Longrightarrow \pi(\mathscr{F}_2) \in P$.

INTRODUCCIÓN

Observación: $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$,

- $\pi(\mathscr{F}_2) \in P \implies \pi(\mathscr{F}_1) \in P$.
- $\pi(\mathscr{F}_1) \in NP-c \implies \pi(\mathscr{F}_2) \in NP-c$.
- $\pi(\mathscr{F}_2) \in NP-c \not\Longrightarrow \pi(\mathscr{F}_1) \in NP-c$.
- $\pi(\mathscr{F}_1) \in P \not\Longrightarrow \pi(\mathscr{F}_2) \in P$.

Ejemplo:
π: Problema de dominación total,

$\mathscr{F}_1$: árboles,

INTRODUCCIÓN

Observación: $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$,

- $\pi(\mathscr{F}_2) \in P \implies \pi(\mathscr{F}_1) \in P$.
- $\pi(\mathscr{F}_1) \in NP-c \implies \pi(\mathscr{F}_2) \in NP-c$.
- $\pi(\mathscr{F}_2) \in NP-c \not\Longrightarrow \pi(\mathscr{F}_1) \in NP-c$.
- $\pi(\mathscr{F}_1) \in P \not\Longrightarrow \pi(\mathscr{F}_2) \in P$.

Ejemplo:
π: Problema de dominación total,

$\mathscr{F}_1$: árboles,

$\mathscr{F}_1$: grafos planares bipartitos.

Introducción

Observación: $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$,

- $\pi(\mathscr{F}_2) \in P \implies \pi(\mathscr{F}_1) \in P$.
- $\pi(\mathscr{F}_1) \in NP-c \implies \pi(\mathscr{F}_2) \in NP-c$.
- $\pi(\mathscr{F}_2) \in NP-c \not\Longrightarrow \pi(\mathscr{F}_1) \in NP-c$.
- $\pi(\mathscr{F}_1) \in P \not\Longrightarrow \pi(\mathscr{F}_2) \in P$.

Ejemplo:
π: Problema de dominación total,

$\mathscr{F}_1$: árboles,

$\mathscr{F}_1$: grafos planares bipartitos.

$\pi(\mathscr{F}_1) \in P$,
$\pi(\mathscr{F}_2) \in NP-c$ (ejercicio).

Problemas de dominación

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es k-dominante (total) de G si $|N[v] \cap S| \geq k$ ($|N(v) \cap S| \geq k$), $\forall v \in V$.

PROBLEMAS DE DOMINACIÓN

Definición: Dado un grafo $G=(V,E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es k-dominante (total) de G si $|N[v] \cap S| \geq k$ ($|N(v) \cap S| \geq k$), $\forall v \in V$.

Definición: Dado un grafo $G=(V,E)$ y $k \in \mathbb{N}$, una función $f : V \mapsto \{0,1\}$ se dice k-dominante (total) de G si $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq k$ ($\sum_{u \in N(v)} f(u) \geq k$), $\forall v \in V$.

Problemas de dominación

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es k-dominante (total) de G si $|N[v] \cap S| \geq k$ ($|N(v) \cap S| \geq k$), $\forall v \in V$.

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, una función $f : V \mapsto \{0, 1\}$ se dice k-dominante (total) de G si $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq k$ ($\sum_{u \in N(v)} f(u) \geq k$), $\forall v \in V$.

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, una función $f : V \mapsto \{0, 1, \ldots, k\}$ se dice $\{k\}$-dominante (total) de G si $\sum_{u \in N[v]} f(u) \geq k$ ($\sum_{u \in N(v)} f(u) \geq k$), $\forall v \in V$.

PROBLEMAS DE DOMINACIÓN

Class	DOM $k=1$	k-DOM $k>1$	$\{k\}$-DOM $k>1$	DOM-T $k=1$	k-DOM-T $k>1$	$\{k\}$-DOM-T $k>1$
Strongly chordal	P	P	P	P	?	?
Dually chordal	P	NP-c	P	P	NP-c	?
Doubly chordal	P	NP-c	P	P	NP-c	?
Bounded cw	P	P	P	P	P	P
Split	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c
Planar	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c
Bipartite	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c
Bipartite Planar	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c
Chordal Bipartite	NP-c	NP-c	NP-c	P	P	P

Problemas de empaquetamiento

PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es un k-empaquetamiento de G si $|N[v] \cap S| \leq k$, $\forall v \in V$.

Problemas de empaquetamiento

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es un k-empaquetamiento de G si $|N[v] \cap S| \leq k$, $\forall v \in V$.

$\underline{\pi : Emp.}$

E : G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

Problemas de empaquetamiento

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es un k-empaquetamiento de G si $|N[v] \cap S| \leq k$, $\forall v \in V$.

$\underline{\pi : Emp.}$

$E :$ G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

- Emp(árboles) es polinomial (2010).

Problemas de empaquetamiento

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es un k-empaquetamiento de G si $|N[v] \cap S| \leq k$, $\forall v \in V$.

$\underline{\pi : Emp.}$

E : G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

- Emp(árboles) es polinomial (2010).
- Emp(bipartitos) es $NP-c$ (2011) (ejercicio).

Problemas de empaquetamiento

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es un k-empaquetamiento de G si $|N[v] \cap S| \leq k$, $\forall v \in V$.

$\underline{\pi : Emp.}$

E : G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

- Emp(árboles) es polinomial (2010).
- Emp(bipartitos) es $NP-c$ (2011) (ejercicio).
- Emp(split) es $NP-c$ (2011).

PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

Definición: Dado un grafo $G = (V,E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es un k-empaquetamiento de G si $|N[v] \cap S| \leq k$, $\forall v \in V$.

$\underline{\pi : Emp.}$

$E :$ G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

- Emp(árboles) es polinomial (2010).
- Emp(bipartitos) es $NP - c$ (2011) (ejercicio).
- Emp(split) es $NP - c$ (2011).

$\underline{\pi : EST.}$

$E :$ G, grafo, $x \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un conjunto estable de G de cardinal al menos x?

Problemas de empaquetamiento

Definición: Dado un grafo $G = (V,E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es un k-empaquetamiento de G si $|N[v] \cap S| \leq k$, $\forall v \in V$.

$\underline{\pi : Emp.}$

$E :$ G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

- Emp(árboles) es polinomial (2010).
- Emp(bipartitos) es $NP-c$ (2011) (ejercicio).
- Emp(split) es $NP-c$ (2011).

$\underline{\pi : EST.}$

$E :$ G, grafo, $x \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un conjunto estable de G de cardinal al menos x?

EST es $NP-c$ en grafos generales.

Problemas de empaquetamiento

Definición: Dado un grafo $G = (V,E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es un k-empaquetamiento de G si $|N[v] \cap S| \leq k$, $\forall v \in V$.

$\underline{\pi : Emp.}$

$E:$ G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

- Emp(árboles) es polinomial (2010).
- Emp(bipartitos) es $NP-c$ (2011) (ejercicio).
- Emp(split) es $NP-c$ (2011).

$\underline{\pi : EST.}$

$E:$ G, grafo, $x \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un conjunto estable de G de cardinal al menos x?

EST es $NP-c$ en grafos generales. ¿EST(split)?

Problemas de empaquetamiento

Definición: Dado un grafo $G = (V, E)$ y $k \in \mathbb{N}$, un conjunto S de vértices de G es un k-empaquetamiento de G si $|N[v] \cap S| \leq k$, $\forall v \in V$.

$\underline{\pi : Emp.}$

$E:$ G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

- Emp(árboles) es polinomial (2010).
- Emp(bipartitos) es $NP-c$ (2011) (ejercicio).
- Emp(split) es $NP-c$ (2011).

$\underline{\pi : EST.}$

$E:$ G, grafo, $x \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un conjunto estable de G de cardinal al menos x?

EST es $NP-c$ en grafos generales. ¿EST(split)? ¿EST(bipartitos)?

PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

- $Emp(\text{split}) \in NP$

PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

- Emp(split)$\in NP$
- $EST \to Emp$(split).

Problemas de empaquetamiento

- Emp(split)$\in NP$
- $EST \to Emp$(split).

<u>$\pi : EST$.</u>

$E:$ G, grafo, $x \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un conjnto estable de G de cardinal al menos x?

<u>$\pi : Emp$(split).</u>

$E:$ H, grafo split, $k, j \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

Problemas de empaquetamiento

- Emp(split)$\in NP$
- $EST \to Emp$(split).

$\pi : EST.$

$E:$ G, grafo, $x \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un conjnto estable de G de cardinal al menos x?

$\pi : Emp$(split).

$E:$ H, grafo split, $k,j \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

(G,x):

- $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
- $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

Problemas de empaquetamiento

- Emp(split)$\in NP$
- $EST \to Emp$(split).

$\pi : EST.$

$E :$ G, grafo, $x \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un conjnto estable de G de cardinal al menos x?

$\pi : Emp$(split).

$E :$ H, grafo split, $k,j \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

(G,x):

- $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
- $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

(H,k,j),

Problemas de empaquetamiento

- Emp(split)$\in NP$
- $EST \to Emp$(split).

<u>$\pi : EST$.</u>

E : G, grafo, $x \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un conjnto estable de G de cardinal al menos x?

<u>$\pi : Emp$(split).</u>

E : H, grafo split, $k,j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

(G,x):

- $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
- $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

(H,k,j), $1 \leq k \leq \Delta(G)$:

- $V(G) = E(G) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} V^i \right)$, $V^i = \{v_1^i, v_2^i, \ldots, v_n^i\}$,

PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

- Emp(split)$\in NP$
- $EST \to Emp$(split).

<u>$\pi : EST.$</u>

E : G, grafo, $x \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un conjnto estable de G de cardinal al menos x?

<u>$\pi : Emp$(split).</u>

E : H, grafo split, $k,j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

(G,x):

- $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
- $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

(H,k,j), $1 \leq k \leq \Delta(G)$:

- $V(G) = E(G) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} V^i\right)$, $V^i = \{v_1^i, v_2^i, \ldots, v_n^i\}$,
- $e = v_p v_q$, $N_H[e] = E(G) \cup \{v_p^i, v_q^i : \; i = 1, \ldots, k\}$.

Problemas de empaquetamiento

- Emp(split)$\in NP$
- $EST \to Emp$(split).

$\pi : EST.$

$E:$ G, grafo, $x \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un conjnto estable de G de cardinal al menos x?

$\pi : Emp$(split).

$E:$ H, grafo split, $k,j \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

(G,x):

- $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,
- $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

(H,k,j), $1 \leq k \leq \Delta(G)$:

- $V(G) = E(G) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} V^i \right)$, $V^i = \{v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i\}$,
- $e = v_p v_q$, $N_H[e] = E(G) \cup \{v_p^i, v_q^i : \ i = 1, \dots, k\}$.
- $j = kx$.

Problemas de empaquetamiento

Deseamos probar que:

G tiene un estable de tamaño al menos $x \iff H$ tiene un k-empaquetamiento de tamaño al menos $j = kx$.

Problemas de empaquetamiento

$\underline{\pi : Emp.}$

E : G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

$\underline{\pi : k - Emp.}$

E : G, grafo, $j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

Problemas de empaquetamiento

$\underline{\pi : Emp.}$

$E:$ G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

$\underline{\pi : k - Emp.}$

$E:$ G, grafo, $j \in \mathbb{N}$.

$P:$ ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

- $Emp \in P \implies k - Emp \in P$.
- $k - Emp \in NP - c \implies Emp \in NP - c$.

Problemas de empaquetamiento

$\pi : Emp.$

$E :\ G$, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

$\pi : k - Emp.$

$E :\ G$, grafo, $j \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

- $Emp \in P \implies k - Emp \in P$.
- $k - Emp \in NP - c \implies Emp \in NP - c$.
- $k - Emp$(split)$\in NP - c$.

PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

$\underline{\pi : Emp.}$

$E :$ G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

$\underline{\pi : k - Emp.}$

$E :$ G, grafo, $j \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

- $Emp \in P \implies k - Emp \in P$.
- $k - Emp \in NP - c \implies Emp \in NP - c$.
- $k - Emp$(split)$\in NP - c$.

$\underline{\pi : 3 - Col.}$

$E :$ G, grafo.

$P :$ ¿Existe un 3-coloreo de G?

$\underline{\pi : Col.}$

$E :$ G, grafo $k \in \mathbb{N}$.

$P :$ ¿Existe un k-coloreo de G?

PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

$\underline{\pi : Emp.}$

E : G, grafo, $k,j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

$\underline{\pi : k - Emp.}$

E : G, grafo, $j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

- $Emp \in P \implies k - Emp \in P$.
- $k - Emp \in NP - c \implies Emp \in NP - c$.
- $k - Emp$(split)$\in NP - c$.

$\underline{\pi : 3 - Col.}$

E : G, grafo.

P : ¿Existe un 3-coloreo de G?

$\underline{\pi : Col.}$

E : G, grafo $k \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-coloreo de G?

- $3 - Col(P_6$-free$)\in P$ y $COL(P_6$-free$)\in NP - c$.

PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

$\underline{\pi : Emp.}$

E : G, grafo, $k,j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

$\underline{\pi : k - Emp.}$

E : G, grafo, $j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

- $Emp \in P \implies k - Emp \in P$.
- $k - Emp \in NP - c \implies Emp \in NP - c$.
- $k - Emp$(split)$\in NP - c$.

$\underline{\pi : 3 - Col.}$

E : G, grafo.

P : ¿Existe un 3-coloreo de G?

$\underline{\pi : Col.}$

E : G, grafo $k \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-coloreo de G?

- $3 - Col(P_6$-free$)\in P$ y $COL(P_6$-free$)\in NP - c$.
- $3 - Col \in NP - c$,

PROBLEMAS DE EMPAQUETAMIENTO

$\underline{\pi : Emp.}$

E : G, grafo, $k, j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de G de cardinal al menos j?

$\underline{\pi : k - Emp.}$

E : G, grafo, $j \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-empaquetamiento de H de cardinal al menos j?

- $Emp \in P \implies k - Emp \in P$.
- $k - Emp \in NP - c \implies Emp \in NP - c$.
- $k - Emp$(split)$\in NP - c$.

$\underline{\pi : 3 - Col.}$

E : G, grafo.

P : ¿Existe un 3-coloreo de G?

$\underline{\pi : Col.}$

E : G, grafo $k \in \mathbb{N}$.

P : ¿Existe un k-coloreo de G?

- $3 - Col(P_6$-free$)\in P$ y $COL(P_6$-free$)\in NP - c$.
- $3 - Col \in NP - c$, ¿$2 - Col$?

El problema de empaquetamiento en árboles

El problema de empaquetamiento en árboles

- $c \in \mathbb{Z}^V$: capacidades,
  B es un c-empaquetamiento de G si $|B \cap N[v]| \leq c_v$, $\forall v \in V$.

El problema de empaquetamiento en árboles

- $c \in \mathbb{Z}^V$: capacidades,
  B es un c-empaquetamiento de G si $|B \cap N[v]| \leq c_v$, $\forall v \in V$.
- $\mathscr{A} \subseteq V$, *conjunto de nodos admisibles*.

El problema de empaquetamiento en árboles

- $c \in \mathbb{Z}^V$: capacidades,
  B es un c-empaquetamiento de G si $|B \cap N[v]| \leq c_v$, $\forall v \in V$.
- $\mathscr{A} \subseteq V$, *conjunto de nodos admisibles*.
- B es un $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de G si B es un c-empaquetamiento y $B \subseteq \mathscr{A}$.

El problema de empaquetamiento en árboles

- $c \in \mathbb{Z}^V$: capacidades,
  B es un c-empaquetamiento de G si $|B \cap N[v]| \leq c_v$, $\forall v \in V$.
- $\mathscr{A} \subseteq V$, *conjunto de nodos admisibles*.
- B es un $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de G si B es un c-empaquetamiento y $B \subseteq \mathscr{A}$.
- $L_{c,\mathscr{A}}(G) = \text{máx}\{|B| : \ B$ es $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de$G\}$.

El problema de empaquetamiento en árboles

- $c \in \mathbb{Z}^V$: capacidades,

  B es un c-empaquetamiento de G si $|B \cap N[v]| \leq c_v$, $\forall v \in V$.

- $\mathscr{A} \subseteq V$, *conjunto de nodos admisibles*.

- B es un $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de G si B es un c-empaquetamiento y $B \subseteq \mathscr{A}$.

- $L_{c,\mathscr{A}}(G) = \text{máx}\{|B| : B$ es $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de$G\}$.

- $PEG \rightarrow$ *Problema de empaquetamiento generalizado*: Dado un grafo G, $c \in \mathbb{Z}^V$ y $\mathscr{A} \subseteq V$, hallar $L_{c,\mathscr{A}}(G)$.

El problema de empaquetamiento en árboles

- $c \in \mathbb{Z}^V$: capacidades,
  B es un c-empaquetamiento de G si $|B \cap N[v]| \leq c_v$, $\forall v \in V$.
- $\mathscr{A} \subseteq V$, *conjunto de nodos admisibles*.
- B es un $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de G si B es un c-empaquetamiento y $B \subseteq \mathscr{A}$.
- $L_{c,\mathscr{A}}(G) = \max\{|B| :$ B es $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de$G\}$.
- $PEG \rightarrow$ *Problema de empaquetamiento generalizado*: Dado un grafo G, $c \in \mathbb{Z}^V$ y $\mathscr{A} \subseteq V$, hallar $L_{c,\mathscr{A}}(G)$.

Observación: Un k-empaquetamiento es un $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento con $c_v = k$, $\forall v \in V$ y $\mathscr{A} = V$.

El problema de empaquetamiento en árboles

- $c \in \mathbb{Z}^V$: capacidades,
  B es un c-empaquetamiento de G si $|B \cap N[v]| \leq c_v$, $\forall v \in V$.
- $\mathscr{A} \subseteq V$, *conjunto de nodos admisibles*.
- B es un $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de G si B es un c-empaquetamiento y $B \subseteq \mathscr{A}$.
- $L_{c,\mathscr{A}}(G) = \text{máx}\{|B| : \ B$ es $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de$G\}$.
- $PEG \rightarrow$ *Problema de empaquetamiento generalizado*: Dado un grafo G, $c \in \mathbb{Z}^V$ y $\mathscr{A} \subseteq V$, hallar $L_{c,\mathscr{A}}(G)$.

Observación: Un k-empaquetamiento es un $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento con $c_v = k$, $\forall v \in V$ y $\mathscr{A} = V$.

PEG es polinomial en árboles

El problema de empaquetamiento en árboles

- $c \in \mathbb{Z}^V$: capacidades,
  B es un c-empaquetamiento de G si $|B \cap N[v]| \leq c_v$, $\forall v \in V$.
- $\mathscr{A} \subseteq V$, *conjunto de nodos admisibles*.
- B es un $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de G si B es un c-empaquetamiento y $B \subseteq \mathscr{A}$.
- $L_{c,\mathscr{A}}(G) = \text{máx}\{|B| :$ B es $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento de$G\}$.
- $PEG \rightarrow$ *Problema de empaquetamiento generalizado*: Dado un grafo G, $c \in \mathbb{Z}^V$ y $\mathscr{A} \subseteq V$, hallar $L_{c,\mathscr{A}}(G)$.

Observación: Un k-empaquetamiento es un $(c, \mathscr{A})$-empaquetamiento con $c_v = k$, $\forall v \in V$ y $\mathscr{A} = V$.

PEG es polinomial en árboles $\Longrightarrow$ Emp(áboles) es polinomial.

El problema de empaquetamiento en árboles

Sea T un árbol.

- $L(T)$ es el conjunto formado por las hojas de T.

El problema de empaquetamiento en árboles

Sea T un árbol.

- $L(T)$ es el conjunto formado por las hojas de T.
- $S(T)$ *stems* de T, vértices adyacentes a hojas de T.

El problema de empaquetamiento en árboles

Sea T un árbol.

- $L(T)$ es el conjunto formado por las hojas de T.
- $S(T)$ *stems* de T, vértices adyacentes a hojas de T.
- $l \in L(T)$, $s(l) \in N(l)$.

El problema de empaquetamiento en árboles

Sea T un árbol.

- $L(T)$ es el conjunto formado por las hojas de T.
- $S(T)$ *stems* de T, vértices adyacentes a hojas de T.
- $l \in L(T)$, $s(l) \in N(l)$.
- $s \in S(T)$, $n(s)$ es el número de hojas adyacentes a s.

PEM: Algoritmo para árboles

- $T = (V,E)$ árbol, $c \in \mathbb{Z}^V$, $\mathscr{A} \subseteq V$.
- Inicialización: $B = \emptyset$.

PEM: Algoritmo para árboles

- $T=(V,E)$ árbol, $c \in \mathbb{Z}^V$, $\mathscr{A} \subseteq V$.
- Inicialización: $B=\emptyset$.

<u>Iteración</u>: $(T,c,\mathscr{A},B)$

PEM: Algoritmo para árboles

- $T = (V, E)$ árbol, $c \in \mathbb{Z}^V$, $\mathscr{A} \subseteq V$.
- Inicialización: $B = \emptyset$.

Iteración: $(T, c, \mathscr{A}, B)$

1. Si ($\mathscr{A} = \emptyset$ o $V(T) = \emptyset$), **PARAR**. B es óptimo.

PEM: Algoritmo para árboles

- $T = (V, E)$ árbol, $c \in \mathbb{Z}^V$, $\mathscr{A} \subseteq V$.
- Inicialización: $B = \emptyset$.

<u>Iteración</u>: $(T, c, \mathscr{A}, B)$

1. Si ($\mathscr{A} = \emptyset$ o $V(T) = \emptyset$), **PARAR**. B es óptimo.
2. Si existe $v \in L(T):\ c_v = 0$ entonces

   Iteración$(T - \{v\}, c*, \mathscr{A} - \{v, s(v)\}, B)$.

PEM: Algoritmo para árboles

- $T=(V,E)$ árbol, $c \in \mathbb{Z}^V$, $\mathscr{A} \subseteq V$.
- Inicialización: $B=\emptyset$.

<u>Iteración</u>: $(T,c,\mathscr{A},B)$

1. Si ($\mathscr{A}=\emptyset$ o $V(T)=\emptyset$), **PARAR**. B es óptimo.
2. Si existe $v \in L(T):\ c_v = 0$ entonces

   Iteración$(T-\{v\}, c*, \mathscr{A}-\{v,s(v)\}, B)$.
3. Si existe $v \in L(T):\ v \notin \mathscr{A}$ entonces

   Iteración$(T-\{v\}, c*, \mathscr{A}, B)$.

PEM: Algoritmo para árboles

- $T = (V,E)$ árbol, $c \in \mathbb{Z}^V$, $\mathscr{A} \subseteq V$.
- Inicialización: $B = \emptyset$.

<u>Iteración</u>: $(T, c, \mathscr{A}, B)$

1. Si ($\mathscr{A} = \emptyset$ o $V(T) = \emptyset$), **PARAR**. B es óptimo.
2. Si existe $v \in L(T): \; c_v = 0$ entonces

   Iteración$(T - \{v\}, c*, \mathscr{A} - \{v, s(v)\}, B)$.
3. Si existe $v \in L(T): \; v \notin \mathscr{A}$ entonces

   Iteración$(T - \{v\}, c*, \mathscr{A}, B)$.
4. Si $R = \{s \in S(T): \; c_s < n(s)\} \neq \emptyset$ entonces, para cada $s \in R$

   Elegir $H_s \subseteq L(T) \cap N(s)$ t.q. $|H_s| = n(s) - c_s$

   Iteración$(T - H_s, c*, \mathscr{A} - H_s, B)$.

PEM: Algoritmo para árboles

- $T = (V, E)$ árbol, $c \in \mathbb{Z}^V$, $\mathscr{A} \subseteq V$.
- Inicialización: $B = \emptyset$.

<u>Iteración</u>: $(T, c, \mathscr{A}, B)$

1. Si ($\mathscr{A} = \emptyset$ o $V(T) = \emptyset$), **PARAR**. B es óptimo.
2. Si existe $v \in L(T)$: $c_v = 0$ entonces

   Iteración$(T - \{v\}, c*, \mathscr{A} - \{v, s(v)\}, B)$.
3. Si existe $v \in L(T)$: $v \notin \mathscr{A}$ entonces

   Iteración$(T - \{v\}, c*, \mathscr{A}, B)$.
4. Si $R = \{s \in S(T) : c_s < n(s)\} \neq \emptyset$ entonces, para cada $s \in R$

   Elegir $H_s \subseteq L(T) \cap N(s)$ t.q. $|H_s| = n(s) - c_s$

   Iteración$(T - H_s, c*, \mathscr{A} - H_s, B)$.
5. $B \leftarrow B \cup L(T)$.

   $c_v \leftarrow c_v - |B \cap N[v]|$, $\forall v$

   $\mathscr{A} \leftarrow \mathscr{A} - (L(T) \cup \{s(l) : c_l = 1, l \in L(T)\})$

   Iteración$(T - L(T), c, \mathscr{A}, B)$.