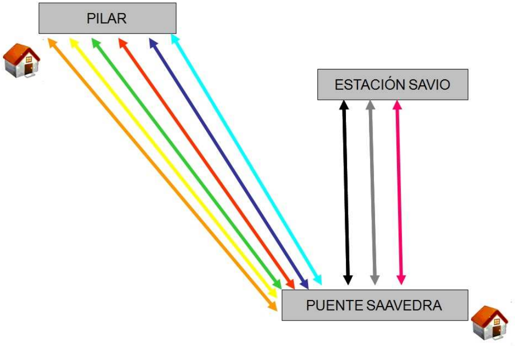
El Problema de Asignación de Conductores-Viajes en empresas de transporte público: nuevos modelos de Programación Lineal Entera

Federico Bertero[1], Graciela Nasini[1,2], Daniel Severin[1,2]

[1] Universidad Nacional de Rosario [2] CONICET

12º Simposio Argentino de Investigación Operativa (43º JAIIO)
Universidad de Palermo, Buenos Aires
Septiembre de 2014

INTRODUCCIÓN



- Aprox. 700 viajes diarios en días de semana, 500 en fin de semana.
- 200 conductores
- 95 coches en dos depósitos

PROBLEMA DE ASIGNACIÓN CONDUCTORES-VIAJES

Asignar los 700 viajes a los conductores de forma tal que:

Problema de Asignación Conductores-Viajes

Asignar los 700 viajes a los conductores de forma tal que:

- Las jornadas laborales comiencen y finalicen en el mismo depósito.
- Se respeten los descansos acorde a legislación nacional y convenios sindicales.
- La duración de la jornada está comprendida entre 6:30 y 9:30 hs.

Asignar los 700 viajes a los conductores de forma tal que:

- Las jornadas laborales comiencen y finalicen en el mismo depósito.
- Se respeten los descansos acorde a legislación nacional y convenios sindicales.
- La duración de la jornada está comprendida entre 6:30 y 9:30 hs.

...y minimizando la cantidad total de horas extras

(horas extras = max$\{$0, duración jornada - 8 hs.$\}$)

Asignar los 700 viajes a los conductores de forma tal que:

- Las jornadas laborales comiencen y finalicen en el mismo depósito.
- Se respeten los descansos acorde a legislación nacional y convenios sindicales.
- La duración de la jornada está comprendida entre 6:30 y 9:30 hs.

...y minimizando la cantidad total de horas extras
(horas extras = max{0, duración jornada - 8 hs.})

Solución actual de la empresa:
1. Etapa automática: sistema comercial para generar asignaciones.

Asignar los 700 viajes a los conductores de forma tal que:

- Las jornadas laborales comiencen y finalicen en el mismo depósito.
- Se respeten los descansos acorde a legislación nacional y convenios sindicales.
- La duración de la jornada está comprendida entre 6:30 y 9:30 hs.

...y minimizando la cantidad total de horas extras
(horas extras = max{0, duración jornada - 8 hs.})

Solución actual de la empresa:
1. Etapa automática: sistema comercial para generar asignaciones.

No siempre respetan las restricciones y no siempre son óptimas

Asignación de viajes a un conductor:

Salida	Duración	Orig–Dest	Descanso	Descanso mínimo
7:23	79	Pil–Saa	31	10
9:13	107	Saa–Pil	13	14
11:13	82	Pil–Saa	26	10
13:01	108	Saa–Pil	–	–

☞ No respeta los tiempos de descanso

Conductor 1:

Salida	Duración	Orig–Dest	Descanso
14:30	85	Pil–Saa	23
16:18	80	Saa–Pil	20
17:58	170	Pil–Saa	27
21:15	61	Saa–Est	0
22:16	30	Est–Pil	–

duración jornada = 8:40 hs. $\rightarrow$ 40 minutos extras

Conductor 2:

Salida	Duración	Orig–Dest	Descanso
14:42	83	Pil–Saa	26
16:31	88	Saa–Pil	21
18:20	123	Pil–Saa	16
20:39	84	Saa–Pil	–

duración jornada = 7:39 hs.

Conductor 1:

Salida	Duración	Orig–Dest	Descanso
14:42	83	Pil–Saa	13
16:18	80	Saa–Pil	20
17:58	170	Pil–Saa	27
21:15	61	Saa–Est	0
22:16	30	Est–Pil	–

duración jornada = 8:28 hs. → 28 minutos extras ☺

Conductor 2:

Salida	Duración	Orig–Dest	Descanso
14:30	85	Pil–Saa	36
16:31	88	Saa–Pil	21
18:20	123	Pil–Saa	16
20:39	84	Saa–Pil	–

duración jornada = 7:51 hs.

Asignar los 700 viajes a los conductores de forma tal que:

- Las jornadas laborales comiencen y finalicen en el mismo depósito.
- Se respeten los descansos acorde a legislación nacional y convenios sindicales.
- La duración de la jornada está comprendida entre 6:30 y 9:30 hs.

...y minimizando la cantidad total de horas extras

(horas extras = max{0, duración jornada - 8 hs.})

Solución actual de la empresa:

1. Etapa automática: sistema comercial para generar asignaciones.

No siempre respetan las restricciones y no siempre son óptimas

2. Etapa manual: empleados de la empresa deben manipular las asignaciones.

- $K = conductores$

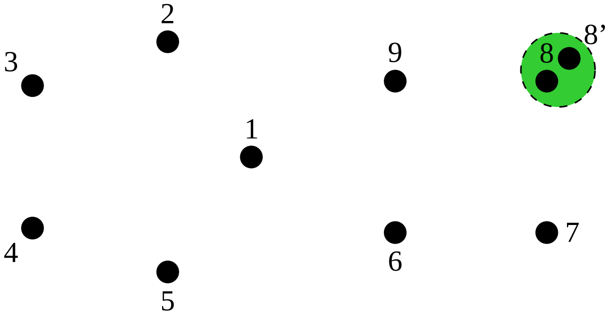
- $K = conductores$

- $V = viajes\ a\ cubrir$

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_2'$$

Ciertas situaciones se modelan duplicando subconjunto de viajes V_2

  - V_1 =viajes sin mellizos
  - V_2 =viajes con mellizos
  - V_2' =mellizos $\longleftarrow$ sólo uno de entre $v \in V_2$ y v' se cubre



Viajes: $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ $V_2 = \{8\}$ $V_2' = \{8'\}$

- Modelo basado en variables de asig. viaje-conductor:

$$x_{kv} = \begin{cases} 1, & \text{si conductor } k \text{ toma viaje } v \\ 0, & \text{si no} \end{cases}, \ \forall\, k \in K,\ v \in V$$

$$y_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{si algún cond. comienza con } a \text{ y termina con } b \\ 0, & \text{si no} \end{cases}, \ \forall\, (a,b) \in J$$

- Modelo basado en variables de asig. viaje-conductor:

$$x_{kv} = \begin{cases} 1, & \text{si conductor } k \text{ toma viaje } v \\ 0, & \text{si no} \end{cases}, \quad \forall\, k \in K,\ v \in V$$

$$y_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{si algún cond. comienza con } a \text{ y termina con } b \\ 0, & \text{si no} \end{cases}, \quad \forall\, (a,b) \in J$$

- **Instancia real**: $|K| = 191$, $|V| = 715$ (+ 103 mellizos)

  ☞ $\color{red}{Variables = 171000,\ \ Restricciones = 8M}$

- Modelo basado en variables de asig. viaje-conductor:

$$x_{kv} = \begin{cases} 1, & \text{si conductor } k \text{ toma viaje } v \\ 0, & \text{si no} \end{cases}, \quad \forall\, k \in K,\ v \in V$$

$$y_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{si algún cond. comienza con } a \text{ y termina con } b \\ 0, & \text{si no} \end{cases}, \quad \forall\, (a,b) \in J$$

- **Instancia real**: $|K| = 191$, $|V| = 715$ (+ 103 mellizos)

  ☞ $Variables = 171000$, $Restricciones = 8M$

- **Otras instancias**:

  ☞ $|K| = 10$, $|V| = 40 \rightarrow 2700$ seg.

  ☞ $|K| = 11$, $|V| = 44 \rightarrow$ no resuelve

- Rápido en instancias de 2-3 conductores
  Disponemos de solución dada por soft. comercial
  $\downarrow$
  Alg. de mejora para abordar instancia real

Trabajo anterior

- Rápido en instancias de 2-3 conductores
  Disponemos de solución dada por soft. comercial
  $\downarrow$
  Alg. de mejora para abordar instancia real

- *OPT-2*:
  - ☞ Resuelve 14.500 modelos de 2 cond. $\rightarrow$ 45 seg.
  - ☞ Cond. infactibles: 65 (de 191) $\longrightarrow$ 57 12 %
  - ☞ Min. extras: 3956 $\longrightarrow$ 3872 2.1 %

  En un mes, se ahorran 6.3 jornadas de 8hs. ☺

- Rápido en instancias de 2-3 conductores
  Disponemos de solución dada por soft. comercial
  $\downarrow$
  Alg. de mejora para abordar instancia real

- *OPT-2*:
  ☞ Resuelve 14.500 modelos de 2 cond. $\rightarrow$ 45 seg.
  ☞ Cond. infactibles: 65 (de 191) $\longrightarrow$ 57 12%
  ☞ Min. extras: 3956 $\longrightarrow$ 3872 2.1%
  En un mes, se ahorran 6.3 jornadas de 8hs. ☺

- *OPT-3*:
  ☞ Resuelve 1.250.000 modelos de 3 cond. $\rightarrow$ 5256 seg.
  ☞ Cond. infactibles: 65 (de 191) $\longrightarrow$ 55 15%
  ☞ Min. extras: 3956 $\longrightarrow$ 3815 3.6%
  En un mes, se ahorran 10.6 jornadas de 8hs. ☺

- $K = conductores$
- $V = viajes\ a\ cubrir$

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_2'$$

Ciertas situaciones se modelan duplicando subconjunto de viajes V_2

- V_1 =viajes sin mellizos
- V_2 =viajes con mellizos
- V_2' =mellizos $\longleftarrow$ sólo uno de entre $v \in V_2$ y v' se cubre

- $K = conductores$
- $V = viajes\ a\ cubrir$

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_2'$$

Ciertas situaciones se modelan duplicando subconjunto de viajes V_2

  - V_1 =viajes sin mellizos
  - V_2 =viajes con mellizos
  - V_2' =mellizos $\longleftarrow$ sólo uno de entre $v \in V_2$ y v' se cubre

- $A = pares\ factibles\ de\ viajes\ consecutivos$

NUEVO MODELO PLE I

- $K =$ *conductores*

- $V =$ *viajes a cubrir*

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_2'$$

  Ciertas situaciones se modelan duplicando subconjunto de viajes V_2
  - V_1 =viajes sin mellizos
  - V_2 =viajes con mellizos
  - V_2' =mellizos $\longleftarrow$ sólo uno de entre $v \in V_2$ y v' se cubre

- $A =$ *pares factibles de viajes consecutivos*

- $J =$ *pares factibles de primer y último viaje de una jornada*

Nuevo modelo PLE I

- $K =$ *conductores*

- $V =$ *viajes a cubrir*

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_2'$$

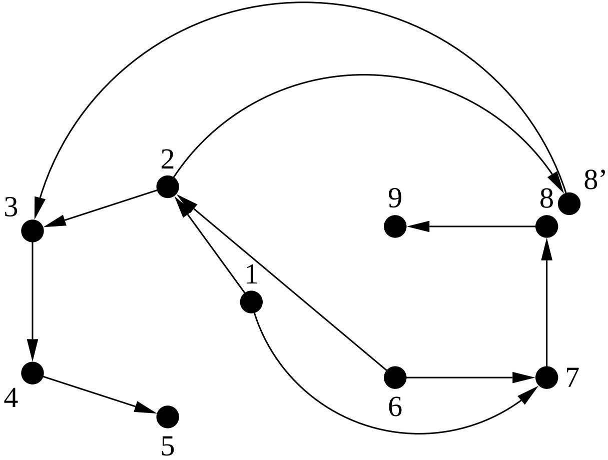
  Ciertas situaciones se modelan duplicando subconjunto de viajes V_2
  - V_1 =viajes sin mellizos
  - V_2 =viajes con mellizos
  - V_2' =mellizos $\longleftarrow$ sólo uno de entre $v \in V_2$ y v' se cubre

- $A =$ *pares factibles de viajes consecutivos*

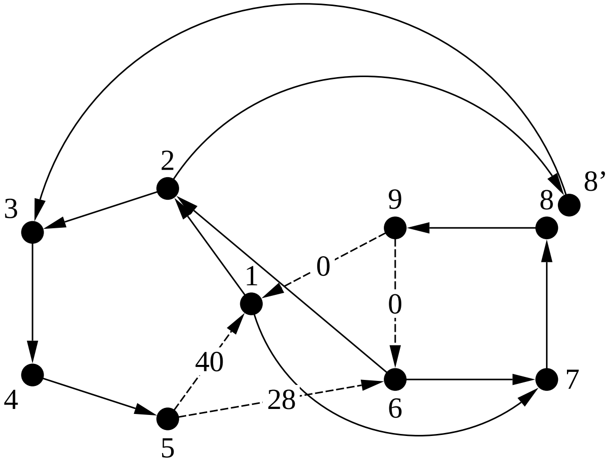
- $J =$ *pares factibles de primer y último viaje de una jornada*

- $c_{ab} =$ *cant. horas extras de jornada que comienza en a y termina en b,* $\forall\ (a,b) \in J$

NUEVO MODELO PLE I

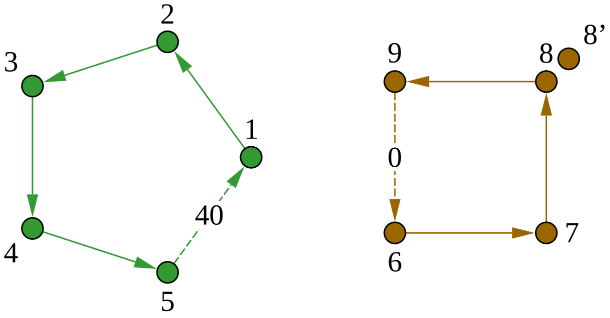


$$A = \textit{pares factibles de viajes consecutivos}$$



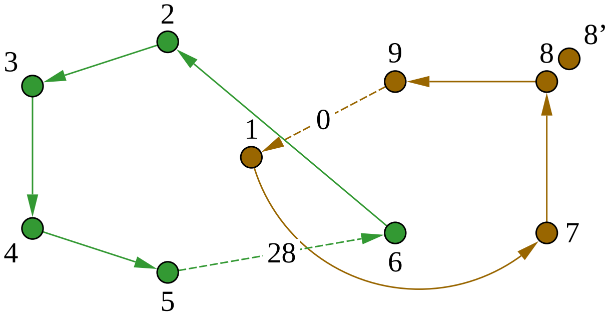
Consideramos (b,a) con costo c_{ab} por cada $(a,b) \in J$

NUEVO MODELO PLE I



Conductor 1 (40 min. extras) Conductor 2

NUEVO MODELO PLE I



Conductor 1 (28 min. extras) Conductor 2

Basado en asignación de asig. de pares de viajes consecutivos a conductores:

$$D^* = (V, A^*) \ / \ A^* = A \cup \{(b,a) : (a,b) \in J\}$$

Variables: para todo $k \in K$, $(u,v) \in A^*$,

$$z_{kuv} = \begin{cases} 1, & \text{si conductor } k \text{ toma viaje } u \text{ y luego } v \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

NUEVO MODELO PLE I

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(a,b) \in J} c_{ab} z_{kba}$$

$s.a.$

$$\sum_{k \in K} \sum_{v \in \delta_*^+(u)} z_{kuv} = 1 \qquad \forall\, u \in V_1$$

$$\sum_{k \in K} \left(\sum_{v \in \delta_*^+(u)} z_{kuv} + \sum_{v \in \delta_*^+(u')} z_{ku'v} \right) = 1 \qquad \forall\, u \in V_2$$

$$\sum_{u \in \delta_*^-(v)} z_{kuv} = \sum_{w \in \delta_*^+(v)} z_{kvw} \qquad \forall\, k \in K,\; v \in V$$

$$\sum_{(a,b) \in J} z_{kba} = 1 \qquad \forall\, k \in K$$

$$\min \sum_{k\in K} \sum_{(a,b)\in J} c_{ab} z_{kba}$$

$s.a.$

$$\sum_{k\in K} \sum_{v\in\delta_*^+(u)} z_{kuv} = 1 \qquad \forall\, u \in V_1$$

$$\sum_{k\in K} \left(\sum_{v\in\delta_*^+(u)} z_{kuv} + \sum_{v\in\delta_*^+(u')} z_{ku'v} \right) = 1 \quad \forall\, u \in V_2$$

$$\sum_{u\in\delta_*^-(v)} z_{kuv} = \sum_{w\in\delta_*^+(v)} z_{kvw} \qquad \forall\, k \in K,\ v \in V$$

$$\sum_{(a,b)\in J} z_{kba} = 1 \qquad \forall\, k \in K$$

$$z_{kuv} = 0 \qquad \forall\, 1 \le u < k \le |K|,\ v \in \delta_*^+(u)$$

$$z_{kuv} \in \{0,1\} \qquad \forall\, k \in K, (u,v) \in A^*$$

- **Instancia real**: $|K| = 191, \;\; |V| = 715$ (+ 103 mellizos)

  ☞ $Variables = 7M, \;\; Restricciones = 153000$

  con modelo anterior: $Variables = 171000, \;\; Restricciones = 8M$

- **Otras instancias**: (modelo anterior resolvía $|K| = 10, \;\; |V| = 40$)

  ☞ $|K| = 40, \;\; |V| = 156 \to 1055$ seg.

  ☞ $|K| = 41, \;\; |V| = 160 \to 6741$ seg.

NUEVO MODELO PLE I

- **Instancia real**: $|K| = 191, \ \ |V| = 715$ (+ 103 mellizos)

  ☞ *Variables* $= 7M$, *Restricciones* $= 153000$

  con modelo anterior: *Variables* $= 171000$, *Restricciones* $= 8M$

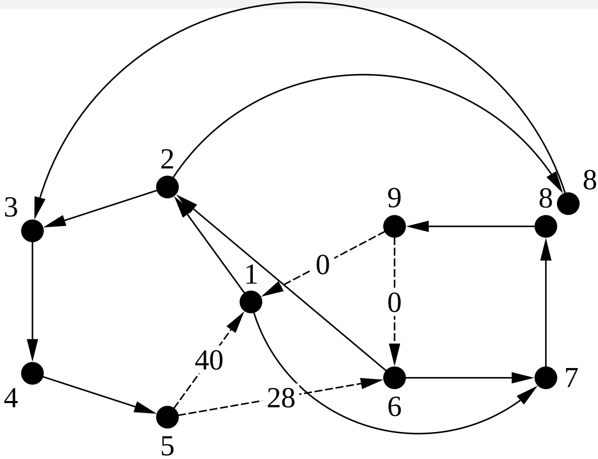
- **Otras instancias**: (modelo anterior resolvía $|K| = 10, \ \ |V| = 40$)

  ☞ $|K| = 40, \ \ |V| = 156 \rightarrow 1055$ seg.

  ☞ $|K| = 41, \ \ |V| = 160 \rightarrow 6741$ seg.

- *OPT-2*: 45 seg. $\rightarrow$ 39 seg. 15 % más rápido que con m. anterior

- *OPT-3*: 5256 seg. $\rightarrow$ 2050 seg. 156 % más rápido que con m. anterior



Variables: para todo $(u,v) \in A^*$,

$$z_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{si mismo conductor toma viaje } u \text{ y luego } v \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$$

NUEVO MODELO PLE II

$$\min \sum_{(a,b)\in J} c_{ab} z_{ba}$$

$s.a.$

$$\sum_{v\in\delta_*^+(u)} z_{uv} = 1 \qquad \forall\, u \in V_1$$

$$\sum_{v\in\delta_*^+(u)} z_{uv} + \sum_{v\in\delta_*^+(u')} z_{u'v} = 1 \qquad \forall\, u \in V_2$$

$$\sum_{u\in\delta_*^-(v)} z_{uv} = \sum_{w\in\delta_*^+(v)} z_{vw} \qquad \forall\, v \in V$$

$$\sum_{(a,b)\in J} z_{ba} = |K|$$

$$\min \sum_{(a,b)\in J} c_{ab} z_{ba}$$

$s.a.$

$$\sum_{v\in\delta_*^+(u)} z_{uv} = 1 \qquad \forall\, u \in V_1$$

$$\sum_{v\in\delta_*^+(u)} z_{uv} + \sum_{v\in\delta_*^+(u')} z_{u'v} = 1 \qquad \forall\, u \in V_2$$

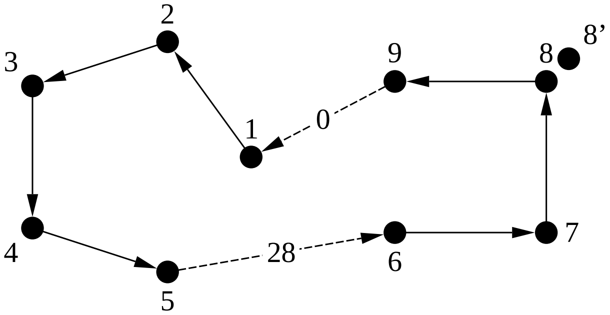
$$\sum_{u\in\delta_*^-(v)} z_{uv} = \sum_{w\in\delta_*^+(v)} z_{vw} \qquad \forall\, v \in V$$

$$\sum_{(a,b)\in J} z_{ba} = |K|$$

$$\sum_{e\in P} z_e \leq |P| - 1 \qquad \forall\, P \text{ camino prohibido}$$

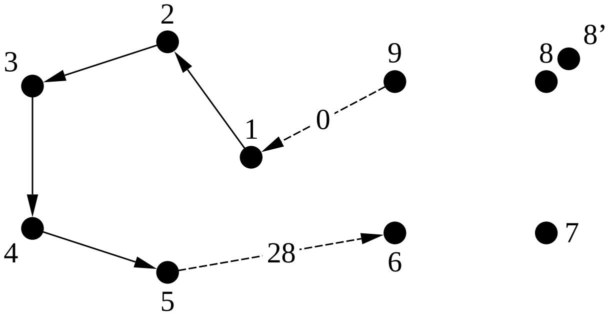
$$z_{uv} \in \{0,1\} \qquad \forall\, (u,v) \in A^*$$

Camino prohibido: Con primer y último arco de J.



Solución entera no factible

NUEVO MODELO PLE II



Un camino prohibido

Algoritmos de separación:

① Sol. entera $\longrightarrow \forall\ (a,b) \in J\ :\ z^*_{ba} = 1$ hacemos:

- Recorrer camino, si alcanzamos $(c,d) \in J \longrightarrow P = \{(b,a),\ldots,(d,c)\}$ (se agrega como *lazy constraint*)

Instancias: ①

☞ $|K| = 40, \ |V| = 156 \rightarrow 334$ seg. (modelo I resolvía en 1055 seg.)

☞ $|K| = 41, \ |V| = 160 \rightarrow 1402$ seg. (modelo I resolvía en 6741 seg.)

Algoritmos de separación:

① Sol. entera $\longrightarrow \forall\ (a,b) \in J\ :\ z^*_{ba} = 1$ hacemos:

- Recorrer camino, si alcanzamos $(c,d) \in J \longrightarrow P = \{(b,a),\ldots,(d,c)\}$
  (se agrega como *lazy constraint*)

Instancias: ①

☞ $|K| = 40,\ \ |V| = 156 \rightarrow 334$ seg. (modelo I resolvía en 1055 seg.)

☞ $|K| = 41,\ \ |V| = 160 \rightarrow 1402$ seg. (modelo I resolvía en 6741 seg.)

② Sol. fraccionaria $\longrightarrow \forall\ (a,b) \in J\ :\ z^*_{ba} > 0$ hacemos:

- Camino más corto desde a (costos $1 - z^*$)
- $\forall\ (c,d) \in J\ :\ z^*_{ba} + z^*_{dc} > 1 \longrightarrow P = \{(b,a),\ldots,(d,c)\}$
  (se agrega como *corte*)

Instancias: ① + ②

☞ $|K| = 40,\ \ |V| = 156 \rightarrow 104$ seg.

☞ $|K| = 41,\ \ |V| = 160 \rightarrow 541$ seg.

¡ Gracias !