

Problema de Coloreo Aditivo y Combinatorial Nullstellensatz

Daniel Severín^{1,2}

¹ Universidad Nacional de Rosario, daniel@fceia.unr.edu.ar

² CONICET

UNGS, Buenos Aires, 2017

Definiciones

Coloring

G es k -colorable si y sólo si existe un $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $f(u) \neq f(v)$ para todo $(u, v) \in E$.

Preguntarse si G es 2-colorable está en \mathcal{P} , preguntarse si es 3-colorable es \mathcal{NP} -completo.

Choosability

G es k -choosable si y sólo si para cualquier función lista $L : V \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ con $|L(v)| = k$ para todo v , existe un $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(v) \in L(v)$ para todo $v \in V$ y $f(u) \neq f(v)$ para todo $(u, v) \in E$.

Preguntarse si G es 2-choosable también está en \mathcal{P} , preguntarse si es k -choosable está en \mathcal{PSPACE} (estará en \mathcal{NP} ? mmm..no sé).

Definiciones

Coloring

G es k -colorable si y sólo si existe un $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $f(u) \neq f(v)$ para todo $(u, v) \in E$.

Preguntarse si G es 2-colorable está en \mathcal{P} , preguntarse si es 3-colorable es \mathcal{NP} -completo.

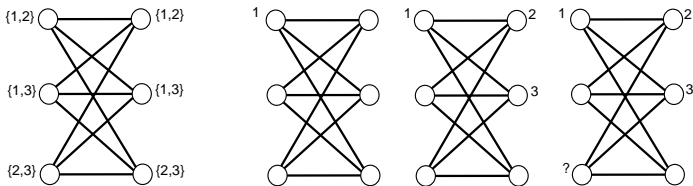
Choosability

G es k -choosable si y sólo si para cualquier función lista $L : V \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ con $|L(v)| = k$ para todo v , existe un $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(v) \in L(v)$ para todo $v \in V$ y $f(u) \neq f(v)$ para todo $(u, v) \in E$.

Preguntarse si G es 2-choosable también está en \mathcal{P} , preguntarse si es k -choosable está en \mathcal{PSPACE} (estará en \mathcal{NP} ? mmm..no sé).

Ejemplo

$K_{3,3}$ es 2-colorable pero no es 2-choosable



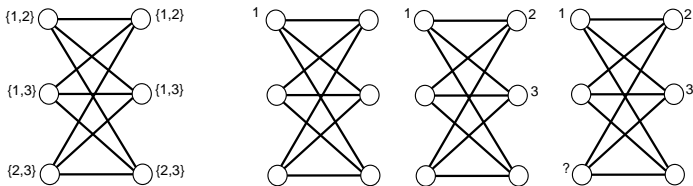
G es k -choosable $\implies G$ es k -colorable

- $\chi(G) = \min\{k : G \text{ es } k\text{-colorable}\}$
- $ch(G) = \min\{k : G \text{ es } k\text{-choosable}\}$

$$\therefore \chi(G) \leq ch(G)$$

Ejemplo

$K_{3,3}$ es 2-colorable pero no es 2-choosable



G es k -choosable $\implies G$ es k -colorable

- $\chi(G) = \min\{k : G \text{ es } k\text{-colorable}\}$
- $ch(G) = \min\{k : G \text{ es } k\text{-choosable}\}$

$$\therefore \chi(G) \leq ch(G)$$

Combinatorial Nullstellensatz

Para dar **cotas superiores** de un parámetro (de minimización), lo habitual es construir una solución factible. Alternativamente, existe una técnica no constructiva propuesta por Noga Alon:

Combinatorial Nullstellensatz

Sea \mathbb{F} un campo y $p = p(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio en el anillo $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. Sea $\alpha x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ un monomio de grado máximo de p (es decir, $\sum_{i=1}^n t_i$ es el grado de p) con $\alpha \neq 0$. Sean conjuntos $L_1, \dots, L_n \subset \mathbb{F}$ tales que $|L_i| \geq t_i + 1$ para todo i . Entonces existen $x_1^* \in L_1, x_2^* \in L_2, \dots, x_n^* \in L_n$ tales que $p(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \neq 0$.

Veámoslo sobre $\mathbb{C}[x_1]$. Sea $p(x_1) = \alpha x_1^{t_1} + c_1 x_1^{t_1-1} + c_2 x_1^{t_1-2} + \dots$ con $\alpha \neq 0$. Es sabido que p tiene a lo sumo t_1 raíces distintas. Sea $|L_1| \geq t_1 + 1$, luego por "palomar" existe $x_1^* \in L_1$ donde $p(x_1^*) \neq 0$.

Combinatorial Nullstellensatz

Para dar **cotas superiores** de un parámetro (de minimización), lo habitual es construir una solución factible. Alternativamente, existe una técnica no constructiva propuesta por Noga Alon:

Combinatorial Nullstellensatz

Sea \mathbb{F} un campo y $p = p(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio en el anillo $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. Sea $\alpha x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ un monomio de grado máximo de p (es decir, $\sum_{i=1}^n t_i$ es el grado de p) con $\alpha \neq 0$. Sean conjuntos $L_1, \dots, L_n \subset \mathbb{F}$ tales que $|L_i| \geq t_i + 1$ para todo i . Entonces existen $x_1^* \in L_1, x_2^* \in L_2, \dots, x_n^* \in L_n$ tales que $p(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \neq 0$.

Veámoslo sobre $\mathbb{C}[x_1]$. Sea $p(x_1) = \alpha x_1^{t_1} + c_1 x_1^{t_1-1} + c_2 x_1^{t_1-2} + \dots$ con $\alpha \neq 0$. Es sabido que p tiene a lo sumo t_1 raíces distintas. Sea $|L_1| \geq t_1 + 1$, luego por "palomar" existe $x_1^* \in L_1$ donde $p(x_1^*) \neq 0$.

Combinatorial Nullstellensatz

Para dar **cotas superiores** de un parámetro (de minimización), lo habitual es construir una solución factible. Alternativamente, existe una técnica no constructiva propuesta por Noga Alon:

Combinatorial Nullstellensatz

Sea \mathbb{F} un campo y $p = p(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio en el anillo $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. Sea $\alpha x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ un monomio de grado máximo de p (es decir, $\sum_{i=1}^n t_i$ es el grado de p) con $\alpha \neq 0$. Sean conjuntos $L_1, \dots, L_n \subset \mathbb{F}$ tales que $|L_i| \geq t_i + 1$ para todo i . Entonces existen $x_1^* \in L_1, x_2^* \in L_2, \dots, x_n^* \in L_n$ tales que $p(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \neq 0$.

Veámoslo sobre $\mathbb{C}[x_1]$. Sea $p(x_1) = \alpha x_1^{t_1} + c_1 x_1^{t_1-1} + c_2 x_1^{t_1-2} + \dots$ con $\alpha \neq 0$. Es sabido que p tiene a lo sumo t_1 raíces distintas. Sea $|L_1| \geq t_1 + 1$, luego por “palomar” existe $x_1^* \in L_1$ donde $p(x_1^*) \neq 0$.

Combinatorial Nullstellensatz en Coloreo

Sea $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, n\}$.

Sea $D = (V, A)$ una orientación de G .

Definimos el (directed) *graph polynomial* como:

$$p_D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(i,j) \in A} (x_j - x_i)$$

Nota: si hubiésemos elegido otra orientación D' , la estructura del polinomio no cambia, a lo sumo su signo: $p_D = p_{D'}$ ó $p_D = -p_{D'}$.

Sea $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

$$f \text{ es un } k\text{-coloreo de } G \iff p_D(f(1), \dots, f(n)) \neq 0$$

Combinatorial Nullstellensatz en Coloreo

Sea $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, n\}$.

Sea $D = (V, A)$ una orientación de G .

Definimos el (directed) *graph polynomial* como:

$$p_D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(i,j) \in A} (x_j - x_i)$$

Nota: si hubiésemos elegido otra orientación D' , la estructura del polinomio no cambia, a lo sumo su signo: $p_D = p_{D'}$ ó $p_D = -p_{D'}$.

Sea $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$.

$$f \text{ es un } k\text{-coloreo de } G \iff p_D(f(1), \dots, f(n)) \neq 0$$

Combinatorial Nullstellensatz en Coloreo

Ejemplo: D orientación de C_5 en forma de circuito dirigido

$$\begin{aligned}
 p_D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_1) = \\
 &= -x_1^2 x_2 x_3 x_4 + x_1^2 x_2 x_3 x_5 + x_1^2 x_2 x_4^2 - x_1^2 x_2 x_4 x_5 + x_1^2 x_3^2 x_4 - x_1^2 x_3^2 x_5 - \\
 &= x_1^2 x_3 x_4^2 + x_1^2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2^2 x_3 x_4 - x_1 x_2^2 x_3 x_5 - x_1 x_2^2 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_4 x_5 - \\
 &= x_1 x_2 x_3^2 x_4 + x_1 x_2 x_3^2 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4^2 - x_1 x_2 x_3 x_5^2 - x_1 x_2 x_4^2 x_5 + x_1 x_2 x_4 x_5^2 - \\
 &= x_1 x_3^2 x_4 x_5 + x_1 x_3^2 x_5^2 + x_1 x_3 x_4^2 x_5 - x_1 x_3 x_4 x_5^2 - x_2^2 x_3 x_4 x_5 + x_2^2 x_3 x_5^2 + \\
 &= x_2^2 x_4^2 x_5 - x_2^2 x_4 x_5^2 + x_2 x_3^2 x_4 x_5 - x_2 x_3^2 x_5^2 - x_2 x_3 x_4^2 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5^2
 \end{aligned}$$

Combinatorial Nullstellensatz en Coloreo

Ejemplo: D orientación de C_5 en forma de circuito dirigido

$$\begin{aligned}
 p_D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_1) = \\
 &= -x_1^2 x_2 x_3 x_4 + x_1^2 x_2 x_3 x_5 + x_1^2 x_2 x_4^2 - x_1^2 x_2 x_4 x_5 + x_1^2 x_3^2 x_4 - x_1^2 x_3^2 x_5 - \\
 &= x_1^2 x_3 x_4^2 + x_1^2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2^2 x_3 x_4 - x_1 x_2^2 x_3 x_5 - x_1 x_2^2 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_4 x_5 - \\
 &= x_1 x_2 x_3^2 x_4 + x_1 x_2 x_3^2 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4^2 - x_1 x_2 x_3 x_5^2 - x_1 x_2 x_4^2 x_5 + x_1 x_2 x_4 x_5^2 - \\
 &= x_1 x_3^2 x_4 x_5 + x_1 x_3^2 x_5^2 + x_1 x_3 x_4^2 x_5 - x_1 x_3 x_4 x_5^2 - x_2^2 x_3 x_4 x_5 + x_2^2 x_3 x_5^2 + \\
 &= x_2^2 x_4^2 x_5 - x_2^2 x_4 x_5^2 + x_2 x_3^2 x_4 x_5 - x_2 x_3^2 x_5^2 - x_2 x_3 x_4^2 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5^2
 \end{aligned}$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = 1, \quad t_5 = 0$$

$$\longrightarrow |L_1| \geq 3, \quad |L_2| \geq 2, \quad |L_3| \geq 2, \quad |L_4| \geq 2, \quad |L_5| \geq 1$$

En particular, podemos asumir que $|L_i| = 3$ y el Comb. Null. nos garantiza que existen elementos de esas "listas" que al ser evaluados en p_D , éste sea distinto de cero. $\therefore ch(C_5) \leq 3$.

Finalmente, $\chi(C_5) \leq 3$.

Combinatorial Nullstellensatz en Coloreo

Ejemplo: D orientación de C_5 en forma de circuito dirigido

$$\begin{aligned}
 p_D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_1) = \\
 &= -x_1^2 x_2 x_3 x_4 + x_1^2 x_2 x_3 x_5 + x_1^2 x_2 x_4^2 - x_1^2 x_2 x_4 x_5 + x_1^2 x_3^2 x_4 - x_1^2 x_3^2 x_5 - \\
 &= x_1^2 x_3 x_4^2 + x_1^2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2^2 x_3 x_4 - x_1 x_2^2 x_3 x_5 - x_1 x_2^2 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_4 x_5 - \\
 &= x_1 x_2 x_3^2 x_4 + x_1 x_2 x_3^2 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4^2 - x_1 x_2 x_3 x_5^2 - x_1 x_2 x_4^2 x_5 + x_1 x_2 x_4 x_5^2 - \\
 &= x_1 x_3^2 x_4 x_5 + x_1 x_3^2 x_5^2 + x_1 x_3 x_4^2 x_5 - x_1 x_3 x_4 x_5^2 - x_2^2 x_3 x_4 x_5 + x_2^2 x_3 x_5^2 + \\
 &= x_2^2 x_4^2 x_5 - x_2^2 x_4 x_5^2 + x_2 x_3^2 x_4 x_5 - x_2 x_3^2 x_5^2 - x_2 x_3 x_4^2 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5^2
 \end{aligned}$$

$$t_1 = 2, t_2 = 1, t_3 = 1, t_4 = 1, t_5 = 0$$

$$\rightarrow |L_1| \geq 3, |L_2| \geq 2, |L_3| \geq 2, |L_4| \geq 2, |L_5| \geq 1$$

En particular, podemos asumir que $|L_i| = 3$ y el Comb. Null. nos garantiza que existen elementos de esas "listas" que al ser evaluados en p_D , éste sea distinto de cero. $\therefore ch(C_5) \leq 3$.

Finalmente, $\chi(C_5) \leq 3$.

Combinatorial Nullstellensatz en Coloreo

Ejemplo: D orientación de C_5 en forma de circuito dirigido

$$\begin{aligned}
 p_D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_1) = \\
 &= -x_1^2 x_2 x_3 x_4 + x_1^2 x_2 x_3 x_5 + x_1^2 x_2 x_4^2 - x_1^2 x_2 x_4 x_5 + x_1^2 x_3^2 x_4 - x_1^2 x_3^2 x_5 - \\
 &= x_1^2 x_3 x_4^2 + x_1^2 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2^2 x_3 x_4 - x_1 x_2^2 x_3 x_5 - x_1 x_2^2 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_4 x_5 - \\
 &= x_1 x_2 x_3^2 x_4 + x_1 x_2 x_3^2 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_4^2 - x_1 x_2 x_3 x_5^2 - x_1 x_2 x_4^2 x_5 + x_1 x_2 x_4 x_5^2 - \\
 &= x_1 x_3^2 x_4 x_5 + x_1 x_3^2 x_5^2 + x_1 x_3 x_4^2 x_5 - x_1 x_3 x_4 x_5^2 - x_2^2 x_3 x_4 x_5 + x_2^2 x_3 x_5^2 + \\
 &= x_2^2 x_4^2 x_5 - x_2^2 x_4 x_5^2 + x_2 x_3^2 x_4 x_5 - x_2 x_3^2 x_5^2 - x_2 x_3 x_4^2 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5^2
 \end{aligned}$$

$$t_1 = 2, t_2 = 1, t_3 = 1, t_4 = 1, t_5 = 0$$

$$\rightarrow |L_1| \geq 3, |L_2| \geq 2, |L_3| \geq 2, |L_4| \geq 2, |L_5| \geq 1$$

En particular, podemos asumir que $|L_i| = 3$ y el Comb. Null. nos garantiza que existen elementos de esas "listas" que al ser evaluados en p_D , éste sea distinto de cero. $\therefore ch(C_5) \leq 3$.

Finalmente, $\chi(C_5) \leq 3$.

Combinatorial Nullstellensatz en Coloreo

¿Y si hubiésemos elegido un circuito par?

$$p_D(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1) = -x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1^2 x_3^2 - x_1^2 x_3 x_4 + x_1 x_2^2 x_3 - x_1 x_2^2 x_4 - x_1 x_2 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4^2 - x_1 x_3^2 x_4 + x_1 x_3 x_4^2 - x_2^2 x_3 x_4 + x_2^2 x_4^2 + x_2 x_3^2 x_4 - x_2 x_3 x_4^2$$

$$t_1 = 1, t_2 = 1, t_3 = 1, t_4 = 1$$

$$\rightarrow |L_1| \geq 2, |L_2| \geq 2, |L_3| \geq 2, |L_4| \geq 2$$

$$\therefore \chi(C_4) \leq ch(C_4) \leq 2.$$

Combinatorial Nullstellensatz en Coloreo

¿Y si hubiésemos elegido un circuito par?

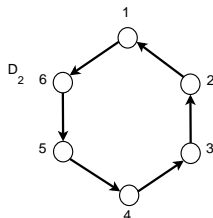
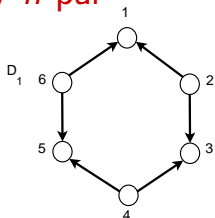
$$p_D(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1) = -x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1^2 x_3^2 - x_1^2 x_3 x_4 + x_1 x_2^2 x_3 - x_1 x_2^2 x_4 - x_1 x_2 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_4^2 - x_1 x_3^2 x_4 + x_1 x_3 x_4^2 - x_2^2 x_3 x_4 + x_2^2 x_4^2 + x_2 x_3^2 x_4 - x_2 x_3 x_4^2$$

$$t_1 = 1, t_2 = 1, t_3 = 1, t_4 = 1$$

$$\rightarrow |L_1| \geq 2, |L_2| \geq 2, |L_3| \geq 2, |L_4| \geq 2$$

$$\therefore \chi(C_4) \leq ch(C_4) \leq 2.$$

$$ch(C_n) \leq 2 \quad \forall n \text{ par}$$

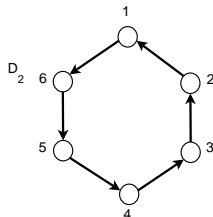
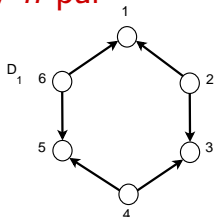


$$p_{D_1} = (x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_4)(x_5 - x_6)(x_1 - x_6)$$

$$p_{D_2} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_6)(x_6 - x_1)$$

- En D_1 orientamos según la bipartición. Al tomar una variable de cada factor y multiplicarlas obtenemos un monomio $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ de grado máximo. ¿Podrá ser cancelado por otro en la expansión de P_{D_1} ? No, pues de haber otro tendría el mismo signo ya que las variables aparecen siempre con el mismo signo.
- En D_2 orientamos según la dirección del circuito. Tomando la primera variable de cada factor obtenemos el monomio $x_1 x_2 \dots x_n$. Por lo anterior, este monomio aparecerá en la expansión con algún coeficiente no nulo.
- Luego $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1$, y por Comb.Null. $ch(C_n) \leq 2$.

$$ch(C_n) \leq 2 \quad \forall n \text{ par}$$

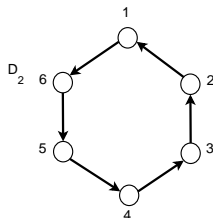
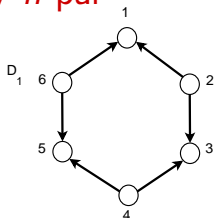


$$P_{D_1} = (x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_4)(x_5 - x_6)(x_1 - x_6)$$

$$P_{D_2} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_6)(x_6 - x_1)$$

- En D_1 orientamos según la bipartición. Al tomar una variable de cada factor y multiplicarlas obtenemos un monomio $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ de grado máximo. ¿Podrá ser cancelado por otro en la expansión de P_{D_1} ? No, pues de haber otro tendría el mismo signo ya que las variables aparecen siempre con el mismo signo.
- En D_2 orientamos según la dirección del circuito. Tomando la primera variable de cada factor obtenemos el monomio $x_1 x_2 \dots x_n$. Por lo anterior, este monomio aparecerá en la expansión con algún coeficiente no nulo.
- Luego $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1$, y por Comb.Null. $ch(C_n) \leq 2$.

$$ch(C_n) \leq 2 \quad \forall n \text{ par}$$

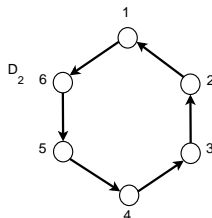
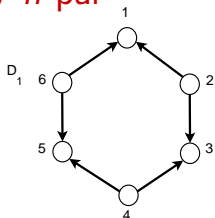


$$p_{D_1} = (x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_4)(x_5 - x_6)(x_1 - x_6)$$

$$p_{D_2} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_6)(x_6 - x_1)$$

- En D_1 orientamos según la bipartición. Al tomar una variable de cada factor y multiplicarlas obtenemos un monomio $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ de grado máximo. ¿Podrá ser cancelado por otro en la expansión de P_{D_1} ? No, pues de haber otro tendría el mismo signo ya que las variables aparecen siempre con el mismo signo.
- En D_2 orientamos según la dirección del circuito. Tomando la primera variable de cada factor obtenemos el monomio $x_1 x_2 \dots x_n$. Por lo anterior, este monomio aparecerá en la expansión con algún coeficiente no nulo.
- Luego $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1$, y por Comb.Null. $ch(C_n) \leq 2$.

$$ch(C_n) \leq 2 \quad \forall n \text{ par}$$



$$p_{D_1} = (x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_4)(x_5 - x_6)(x_1 - x_6)$$

$$p_{D_2} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_6)(x_6 - x_1)$$

- En D_1 orientamos según la bipartición. Al tomar una variable de cada factor y multiplicarlas obtenemos un monomio $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ de grado máximo. ¿Podrá ser cancelado por otro en la expansión de P_{D_1} ? No, pues de haber otro tendría el mismo signo ya que las variables aparecen siempre con el mismo signo.
- En D_2 orientamos según la dirección del circuito. Tomando la primera variable de cada factor obtenemos el monomio $x_1 x_2 \dots x_n$. Por lo anterior, este monomio aparecerá en la expansión con algún coeficiente no nulo.
- Luego $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 1$, y por Comb.Null. $ch(C_n) \leq 2$.

Ya dimos cotas superiores de forma no constructiva,
¿se podrá lo contrario? Es decir, dar cotas inferiores
de manera constructiva

Certificados negativos en Coloreo

Un problema de decisión en \mathcal{NP} es aquel que, para una instancia dada, reconocer que la pregunta puede ser contestada afirmativamente es polinomial \longleftarrow Certificado positivo

- *Ejemplo:* Chequear que C_5 es 3-coloreable conociendo un 3-coloreo es polinomial

Por el contrario, chequear que C_5 no es 2-colorable requiere evaluar **todas** las $f : V \rightarrow \{1, 2\}$ ☹

Noga Alon y Michael Tarsi prueban que un “Certificado negativo” se reduce al problema de pertenencia de un polinomio en un ideal (obviamente no está en \mathcal{P} , es $\mathcal{EXPSPACE}$ -Hard):

Sea I_{nk} el ideal generado por los polinomios $x_i^k - 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. G no es k -colorable si y sólo si, para cualquier orientación D de G , $p_D \in I_{nk}$.

Certificados negativos en Coloreo

Un problema de decisión en \mathcal{NP} es aquel que, para una instancia dada, reconocer que la pregunta puede ser contestada afirmativamente es polinomial \longleftarrow Certificado positivo

- *Ejemplo:* Chequear que C_5 es 3-coloreable conociendo un 3-coloreo es polinomial

Por el contrario, chequear que C_5 no es 2-colorable requiere evaluar **todas** las $f : V \rightarrow \{1, 2\}$ ☹

Noga Alon y Michael Tarsi prueban que un “Certificado negativo” se reduce al problema de pertenencia de un polinomio en un ideal (obviamente no está en \mathcal{P} , es $\mathcal{EXPSPACE}$ -Hard):

Sea I_{nk} el ideal generado por los polinomios $x_i^k - 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. G no es k -colorable si y sólo si, para cualquier orientación D de G , $p_D \in I_{nk}$.

Certificados negativos en Coloreo

Un problema de decisión en \mathcal{NP} es aquel que, para una instancia dada, reconocer que la pregunta puede ser contestada afirmativamente es polinomial \longleftarrow Certificado positivo

- *Ejemplo:* Chequear que C_5 es 3-coloreable conociendo un 3-coloreo es polinomial

Por el contrario, chequear que C_5 no es 2-colorable requiere evaluar **todas** las $f : V \rightarrow \{1, 2\}$ ☹️

Noga Alon y Michael Tarsi prueban que un “Certificado negativo” se reduce al problema de pertenencia de un polinomio en un ideal (obviamente no está en \mathcal{P} , es $\mathcal{EXPSPACE}$ -Hard):

Sea I_{nk} el ideal generado por los polinomios $x_i^k - 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. G no es k -colorable si y sólo si, para cualquier orientación D de G , $p_D \in I_{nk}$.

Certificados negativos en Coloreo

Probemos que K_3 no es 2-colorable.

$$p_D(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = -x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 - x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$$

¿Hay polinomios $p_i \forall i \in V$ tales que p_D es igual a $p_1 \cdot (x_1^2 - 1) + p_2 \cdot (x_2^2 - 1) + p_3 \cdot (x_3^2 - 1)$?

- $p_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 - x_2$
- $p_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_3$
- $p_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_1$

Probamos el certificado negativo con un \exists en vez de un \forall . ☺

En particular, esta técnica da **cotas inferiores** si el parámetro es monótono. Por ejemplo, ya que si G es k -colorable entonces es $(k + 1)$ -colorable, lo anterior prueba $\chi(K_3) \geq 3$.

Certificados negativos en Coloreo

Probemos que K_3 no es 2-colorable.

$$p_D(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = -x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 - x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$$

¿Hay polinomios $p_i \forall i \in V$ tales que p_D es igual a $p_1 \cdot (x_1^2 - 1) + p_2 \cdot (x_2^2 - 1) + p_3 \cdot (x_3^2 - 1)$?

- $p_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 - x_2$
- $p_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_3$
- $p_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_1$

Probamos el certificado negativo con un \exists en vez de un \forall . 😊

En particular, esta técnica da **cotas inferiores** si el parámetro es monótono. Por ejemplo, ya que si G es k -colorable entonces es $(k + 1)$ -colorable, lo anterior prueba $\chi(K_3) \geq 3$.

Certificados negativos en Coloreo

Probemos que K_3 no es 2-colorable.

$$p_D(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = -x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 - x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$$

¿Hay polinomios $p_i \forall i \in V$ tales que p_D es igual a $p_1 \cdot (x_1^2 - 1) + p_2 \cdot (x_2^2 - 1) + p_3 \cdot (x_3^2 - 1)$?

- $p_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 - x_2$
- $p_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_3$
- $p_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_1$

Probamos el certificado negativo con un \exists en vez de un \forall . 😊

En particular, esta técnica da **cotas inferiores** si el parámetro es monótono. Por ejemplo, ya que si G es k -colorable entonces es $(k + 1)$ -colorable, lo anterior prueba $\chi(K_3) \geq 3$.

Problemos que G_3 no es colorable pero si 3-colorable.

Combinatorial Nullstellensatz

Coloreo Aditivo



```
GAP 4.8.8, 20-Aug-2017, build of 2017-08-20 19:05:21 (GMTDT)
https://www.gap-system.org
Architecture: i686-pc-cygwin-gcc-default32
Libs used: gmp, readline
Loading the library and packages ...
Components: trans 1.0, prim 2.1, small* 1.0, id* 1.0
Packages: ACLib 1.2, Alnuth 3.0.0, AtlasRep 1.5.1, AutPGrp 1.8, Browe 1.8.7, CRISP 1.4.4, Cryst 4.1.12,
CrystCat 1.1.6, CTBLib 1.2.2, FactInt 1.5.4, FGA 1.3.1, GAPDoc 1.6, IO 4.4.6, IRREDSOL 1.4,
LAGUNA 3.7.0, Polenta 1.3.7, Polycyclic 2.11, RadiRoot 2.7, ResClasses 4.6.0, Sophus 1.23, SpinSym 1.5,
TomLib 1.2.6, Utils 0.46

Try '??help' for help. See also '?copyright', '?cite' and '?authors'
gap> edges:=[ [1,2], [2,3], [3,4], [4,5], [5,1] ];
[ [ 1, 2 ], [ 2, 3 ], [ 3, 4 ], [ 4, 5 ], [ 5, 1 ] ]
gap> R:=PolynomialRing(Rationals,5);
Rationals[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]
gap> p:=1;
gap> for i in [1..Length(edges)] do
>   p:=p*(R.(edges[i][1])-R.(edges[i][2]));
> od;
gap> p;
-x_1A2*x_2*x_3*x_4+x_1A2*x_2*x_3*x_5+x_1A2*x_2*x_4A2-x_1A2*x_2*x_4*x_5+x_1A2*x_3A2*x_4-x_1A2*x_3A2*x_5-x_1A2*x_3*x_4A\
2+x_1A2*x_3*x_4*x_5+x_1*x_2A2*x_3*x_4-x_1*x_2A2*x_3*x_5-x_1*x_2A2*x_4A2+x_1*x_2A2*x_4*x_5-x_1*x_2*x_3A2*x_4+x_1*x_2*x\
3A2*x_5+x_1*x_2*x_3*x_4A2-x_1*x_2*x_3*x_5A2-x_1*x_2*x_4A2*x_5+x_1*x_2*x_4*x_5A2-x_1*x_3A2*x_4*x_5+x_1*x_3A2*x_5A2+x_\
1*x_3*x_4A2*x_5-x_1*x_3*x_4*x_5A2-x_2A2*x_3*x_4*x_5+x_2A2*x_3*x_5A2+x_2A2*x_4A2*x_5-x_2A2*x_4*x_5A2+x_2*x_3A2*x_4*x_5\
-x_2*x_3A2*x_5A2-x_2*x_3*x_4A2*x_5+x_2*x_3*x_4*x_5A2
gap> AssignGeneratorVariables(R);
#I Assigned the global variables [ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ]
gap> bas2:=[x_1A2-1, x_2A2-1, x_3A2-1, x_4A2-1, x_5A2-1];
[ x_1A2-1, x_2A2-1, x_3A2-1, x_4A2-1, x_5A2-1 ]
gap> I:=Ideal(R,bas2);
<two-sided ideal in Rationals[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5], (5 generators)>
gap> p in I;
true
gap> PolynomialReduction(p,bas2,MonomialLexOrdering());
[ 0, [ -x_2*x_3*x_4+x_2*x_3*x_5+x_2*x_4A2-x_2*x_4*x_5+x_3A2*x_4-x_3A2*x_5-x_3*x_4A2+x_3*x_4*x_5,
x_1*x_3*x_4-x_1*x_3*x_5-x_1*x_4A2+x_1*x_4*x_5-x_3*x_4*x_5+x_3*x_5A2+x_4A2*x_5-x_4*x_5A2,
-x_1*x_2*x_4+x_1*x_2*x_5-x_1*x_4*x_5+x_1*x_5A2+x_2*x_4*x_5-x_2*x_5A2+x_4-x_5,
x_1*x_2*x_3-x_1*x_2*x_3*x_5-x_2*x_3*x_5-x_2*x_3*x_5-x_2*x_3*x_5-x_2*x_3*x_5,
-x_1*x_2*x_3+x_1*x_2*x_4-x_1*x_3*x_4+x_2*x_3*x_4+x_1-x_2+x_3-x_4 ] ]
gap> bas3:=[x_1A3-1, x_2A3-1, x_3A3-1, x_4A3-1, x_5A3-1];
[ x_1A3-1, x_2A3-1, x_3A3-1, x_4A3-1, x_5A3-1 ]
gap> I:=Ideal(R,bas3);
<two-sided ideal in Rationals[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5], (5 generators)>
gap> p in I;
false
gap> PolynomialReduction(p,bas3,MonomialLexOrdering());
[ -x_1A2*x_2*x_3*x_4+x_1A2*x_2*x_3*x_5+x_1A2*x_2*x_4A2-x_1A2*x_2*x_4*x_5+x_1A2*x_3A2*x_4-x_1A2*x_3A2*x_5-x_1A2*x_3*x_\
4A2+x_1A2*x_3*x_4*x_5+x_1*x_2A2*x_3*x_4-x_1*x_2A2*x_3*x_5-x_1*x_2A2*x_4A2+x_1*x_2A2*x_4*x_5-x_1*x_2*x_3A2*x_4+x_1*x_2\
*x_3A2*x_5+x_1*x_2*x_3*x_4A2-x_1*x_2*x_3*x_5A2-x_1*x_2*x_4A2*x_5+x_1*x_2*x_4*x_5A2-x_1*x_3A2*x_4*x_5+x_1*x_3A2*x_5A2+\
x_1*x_3*x_4A2*x_5-x_1*x_3*x_4*x_5A2-x_2A2*x_3*x_4*x_5+x_2A2*x_3*x_5A2+x_2A2*x_3*x_5A2+x_2A2*x_4A2*x_5-x_2A2*x_4*x_5A2+x_2\
*x_3A2*x_4*x_5-x_2*x_3*x_4A2*x_5+x_2*x_3*x_4*x_5A2, [ 0, 0, 0, 0, 0 ] ]
gap>
```



Prueba del certificado negativo

\Leftarrow) Supongamos que $p_D \in I_{nk}$. Luego existen p_1, \dots, p_n tales que

$$p_D = p_1 \cdot (x_1^k - 1) + \dots + p_n \cdot (x_n^k - 1)$$

Da igual colorear G con $\{1, 2, \dots, k\}$ que colorear con $\{\omega, \omega^2, \dots, \omega^k = 1\}$ (i.e. las k -ésimas raíces de la unidad).
Para toda $f : V \rightarrow \{\omega, \dots, \omega^k\}$ ocurre lo siguiente:

$$p_D(f(1), \dots, f(n)) = p_1 \cdot \underbrace{(\omega^{f(1)k} - 1)}_{=0} + \dots + p_n \cdot \underbrace{(\omega^{f(n)k} - 1)}_{=0} = 0$$

$\therefore G$ no es k -colorable

\Rightarrow) Se usa Hilbert's Nullstellensatz

Prueba del certificado negativo

\Leftarrow) Supongamos que $p_D \in I_{nk}$. Luego existen p_1, \dots, p_n tales que

$$p_D = p_1 \cdot (x_1^k - 1) + \dots + p_n \cdot (x_n^k - 1)$$

Da igual colorear G con $\{1, 2, \dots, k\}$ que colorear con $\{\omega, \omega^2, \dots, \omega^k = 1\}$ (i.e. las k -ésimas raíces de la unidad).

Para toda $f : V \rightarrow \{\omega, \dots, \omega^k\}$ ocurre lo siguiente:

$$p_D(f(1), \dots, f(n)) = p_1 \cdot \underbrace{(\omega^{f(1)k} - 1)}_{=0} + \dots + p_n \cdot \underbrace{(\omega^{f(n)k} - 1)}_{=0} = 0$$

$\therefore G$ no es k -colorable

\Rightarrow) Se usa Hilbert's Nullstellensatz

Prueba del certificado negativo

\Leftarrow) Supongamos que $p_D \in I_{nk}$. Luego existen p_1, \dots, p_n tales que

$$p_D = p_1 \cdot (x_1^k - 1) + \dots + p_n \cdot (x_n^k - 1)$$

Da igual colorear G con $\{1, 2, \dots, k\}$ que colorear con $\{\omega, \omega^2, \dots, \omega^k = 1\}$ (i.e. las k -ésimas raíces de la unidad).
Para toda $f : V \rightarrow \{\omega, \dots, \omega^k\}$ ocurre lo siguiente:

$$p_D(f(1), \dots, f(n)) = p_1 \cdot \underbrace{(\omega^{f(1)k} - 1)}_{=0} + \dots + p_n \cdot \underbrace{(\omega^{f(n)k} - 1)}_{=0} = 0$$

$\therefore G$ no es k -colorable

\Rightarrow) Se usa Hilbert's Nullstellensatz

Prueba del certificado negativo

\Leftarrow) Supongamos que $p_D \in I_{nk}$. Luego existen p_1, \dots, p_n tales que

$$p_D = p_1 \cdot (x_1^k - 1) + \dots + p_n \cdot (x_n^k - 1)$$

Da igual colorear G con $\{1, 2, \dots, k\}$ que colorear con $\{\omega, \omega^2, \dots, \omega^k = 1\}$ (i.e. las k -ésimas raíces de la unidad).

Para toda $f : V \rightarrow \{\omega, \dots, \omega^k\}$ ocurre lo siguiente:

$$p_D(f(1), \dots, f(n)) = p_1 \cdot \underbrace{(\omega^{f(1)k} - 1)}_{=0} + \dots + p_n \cdot \underbrace{(\omega^{f(n)k} - 1)}_{=0} = 0$$

$\therefore G$ no es k -colorable

\Rightarrow) Se usa Hilbert's Nullstellensatz

Definiciones

Para cualquier S , $f(S) = \sum_{s \in S} f(s)$

Additive Coloring/Lucky labeling

G es additive k -colorable si y sólo si existe un $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $f(N(u)) \neq f(N(v))$ para todo $(u, v) \in E$.

Preguntarse si G es additive 2-colorable es \mathcal{NP} -completo (incluso en planares 3-colorables)

Additive Choosability/Lucky choice

G es additive k -choosable si y sólo si para cualquier función lista $L : V \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ con $|L(v)| = k$ para todo v , existe un $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(v) \in L(v)$ para todo $v \in V$ y $f(N(u)) \neq f(N(v))$ para todo $(u, v) \in E$.

Definiciones

Para cualquier S , $f(S) = \sum_{s \in S} f(s)$

Additive Coloring/Lucky labeling

G es additive k -colorable si y sólo si existe un $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $f(N(u)) \neq f(N(v))$ para todo $(u, v) \in E$.

Preguntarse si G es additive 2-colorable es \mathcal{NP} -completo (incluso en planares 3-colorables)

Additive Choosability/Lucky choice

G es additive k -choosable si y sólo si para cualquier función lista $L : V \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ con $|L(v)| = k$ para todo v , existe un $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(v) \in L(v)$ para todo $v \in V$ y $f(N(u)) \neq f(N(v))$ para todo $(u, v) \in E$.

Conjetura I

G es additive k -choosable $\implies G$ es additive k -colorable

- $\eta(G) = \min\{k : G \text{ es additive } k\text{-colorable}\}$
- $\eta_I(G) = \min\{k : G \text{ es additive } k\text{-choosable}\}$

$$\therefore \eta(G) \leq \eta_I(G)$$

En 2012, Ben Seamone planteó la conjetura de que $\eta(G) = \eta_I(G)$ para todo G .

Posteriormente, Arash Ahadi y Ali Dehghan dieron un contraejemplo: un G additive 2-colorable que no es additive 3-choosable.

Conjetura I

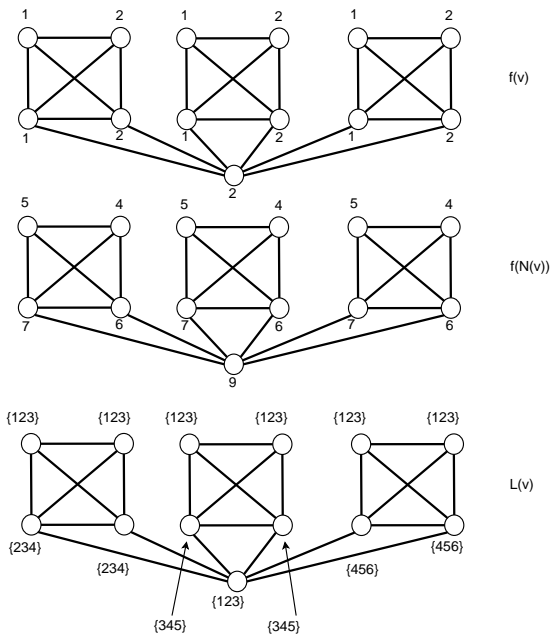
G es additive k -choosable $\implies G$ es additive k -colorable

- $\eta(G) = \min\{k : G \text{ es additive } k\text{-colorable}\}$
- $\eta_I(G) = \min\{k : G \text{ es additive } k\text{-choosable}\}$

$$\therefore \eta(G) \leq \eta_I(G)$$

En 2012, Ben Seamone planteó la conjetura de que $\eta(G) = \eta_I(G)$ para todo G .

Posteriormente, Arash Ahadi y Ali Dehghan dieron un contraejemplo: un G additive 2-colorable que no es additive 3-choosable.



Conjetura II

En 2009, Sebastian Czerwiński y otros conjeturaron que $\eta(G) \leq \chi(G)$ para todo G .

La conjetura está abierta aun para bipartitos (i.e. $\eta(G) \leq 2$)

Sea $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, n\}$.

Sea $D = (V, A)$ una orientación de G .

Definimos el additive (directed) *graph polynomial* como:

$$q_D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(i,j) \in A} \left(\sum_{w \in N(j)} x_w - \sum_{w \in N(i)} x_w \right)$$

Observemos que G es additive k -colorable si y sólo si (para cualquier orientación D) existe un $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $q_D(f(1), \dots, f(n)) \neq 0$.

Conjetura II

En 2009, Sebastian Czerwiński y otros conjeturaron que $\eta(G) \leq \chi(G)$ para todo G .

La conjetura está abierta aun para bipartitos (i.e. $\eta(G) \leq 2$)

Sea $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, n\}$.

Sea $D = (V, A)$ una orientación de G .

Definimos el additive (directed) *graph polynomial* como:

$$q_D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(i,j) \in A} \left(\sum_{w \in N(j)} x_w - \sum_{w \in N(i)} x_w \right)$$

Observemos que G es additive k -colorable si y sólo si (para cualquier orientación D) existe un $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $q_D(f(1), \dots, f(n)) \neq 0$.

Conjetura II

En 2009, Sebastian Czerwiński y otros conjeturaron que $\eta(G) \leq \chi(G)$ para todo G .

La conjetura está abierta aun para bipartitos (i.e. $\eta(G) \leq 2$)

Sea $G = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, n\}$.

Sea $D = (V, A)$ una orientación de G .

Definimos el additive (directed) *graph polynomial* como:

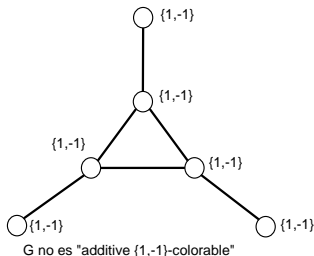
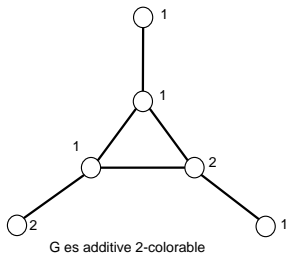
$$q_D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(i,j) \in A} \left(\sum_{w \in N(j)} x_w - \sum_{w \in N(i)} x_w \right)$$

Observemos que G es additive k -colorable si y sólo si (para cualquier orientación D) existe un $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $q_D(f(1), \dots, f(n)) \neq 0$.

Certificado negativo del Coloreo Aditivo

¿Podremos decir que G no es additive k -colorable si y sólo si $q_D \in I_{nk}$?

No es lo mismo que G sea additive k -colorable a que se pueda colorear aditivamente con las raíces k -ésimas de la unidad.



Certificado negativo del Coloreo Aditivo

Sin embargo, podemos proponer un ideal cuyos polinomios generadores se anulen para cualquier $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$:

$$p'_i(x_i) = (x_i - 1)(x_i - 2) \cdots (x_i - k)$$

Observación

Sea I'_{nk} el ideal generado por los polinomios p'_i para todo $i = 1, \dots, n$. G no es additive k -colorable si y sólo si, para cualquier orientación D de G , $q_D \in I'_{nk}$.

Ahora, la Conjetura II es equivalente a probar:

$$q_D \in I'_{nk} \implies p_D \in I'_{nk}$$

Certificado negativo del Coloreo Aditivo

Sin embargo, podemos proponer un ideal cuyos polinomios generadores se anulen para cualquier $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$:

$$p'_i(x_i) = (x_i - 1)(x_i - 2) \cdots (x_i - k)$$

Observación

Sea I'_{nk} el ideal generado por los polinomios p'_i para todo $i = 1, \dots, n$. G no es additive k -colorable si y sólo si, para cualquier orientación D de G , $q_D \in I'_{nk}$.

Ahora, la Conjetura II es equivalente a probar:

$$q_D \in I'_{nk} \implies p_D \in I'_{nk}$$

Certificado negativo del Coloreo Aditivo

Sin embargo, podemos proponer un ideal cuyos polinomios generadores se anulen para cualquier $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$:

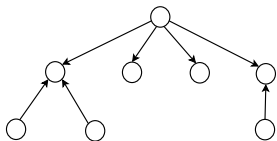
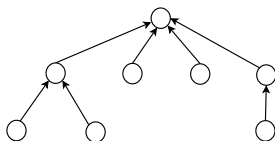
$$p'_i(x_i) = (x_i - 1)(x_i - 2) \cdots (x_i - k)$$

Observación

Sea I'_{nk} el ideal generado por los polinomios p'_i para todo $i = 1, \dots, n$. G no es additive k -colorable si y sólo si, para cualquier orientación D de G , $q_D \in I'_{nk}$.

Ahora, la Conjetura II es equivalente a probar:

$$q_D \in I'_{nk} \implies p_D \in I'_{nk}$$

En árboles, $\eta(G) \leq 2$ D_1  D_2 

- D_1 : orientación usando la bipartición (de una clase a la otra):
 Permite demostrar que cada x_i aparece con el mismo signo en los factores de q_D , luego los $x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$ con misma combinación de exponentes $t_1 \dots t_n$ aparecen con el mismo signo, por lo que no se cancelan.
- D_2 : orientación desde los hijos al padre:
 Recordemos que $t_1 + t_2 + \dots + t_n = |E| = |V| - 1$. Si 1 es el nodo raíz, una combinación es $t_1 = 0, t_2 = \dots = t_n = 1$. Aplicando Comb. Null. G es additive choosable con listas $|L(1)| = 1, |L(2)| = \dots = |L(n)| = 2$. Luego $\eta(G) \leq \eta_I(G) \leq 2$.

Cota superior de $\eta(G)$

Heurística para obtener un additive $(\Delta^2 + 1)$ -coloring.

1. Comience con $G \leftarrow K_2$ y $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.
2. Incorpore un vértice $v \notin V(G)$ y sus adyacencias a los vértices existentes. Luego escoja un $f(v) \in \{1, 2, \dots\}$ que satisfaga:
 - las nuevas aristas $\rightarrow f(N(u)) \neq f(N(v)) \forall u \in N(v)$
 - las existentes de los vecinos de v

$$\rightarrow f(N(u)) \neq f(N(w)) \forall u \in N(v), w \in N(u) \setminus N[v]$$
3. Repita hasta incorporar todos los vértices.

Nota: no es necesario chequear las aristas (u, w) con $u, v \in N(v)$ ya que, si antes de incorporar v , se satisfacía $f(N(w)) \neq f(N(u))$, al hacerlo ambos lados se suman en la misma cantidad $f(v)$.

Cota superior de $\eta(G)$

Heurística para obtener un additive $(\Delta^2 + 1)$ -coloring.

1. Comience con $G \leftarrow K_2$ y $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.
2. Incorpore un vértice $v \notin V(G)$ y sus adyacencias a los vértices existentes. Luego escoja un $f(v) \in \{1, 2, \dots\}$ que satisfaga:
 - las nuevas aristas $\rightarrow f(N(u)) \neq f(N(v)) \forall u \in N(v)$
 - las existentes de los vecinos de v

$$\rightarrow f(N(u)) \neq f(N(w)) \forall u \in N(v), w \in N(u) \setminus N[v]$$
3. Repita hasta incorporar todos los vértices.

Nota: no es necesario chequear las aristas (u, w) con $u, v \in N(v)$ ya que, si antes de incorporar v , se satisfacía $f(N(w)) \neq f(N(u))$, al hacerlo ambos lados se suman en la misma cantidad $f(v)$.

Cota superior de $\eta(G)$

El peor caso es que agreguemos un vértice v con $\Delta(G)$ vecinos y donde cada $u \in N_v$ tenga a su vez $\Delta(G) - 1$ vecinos (y no haya intersección entre los vecinos de los u), teniendo que revisarse $\Delta + \Delta \cdot (\Delta - 1)$, i.e. $\Delta^2(G)$ aristas. Si al recorrer los valores $f(v)$, cada uno genera un conflicto con alguna, $f(v) = \Delta^2(G) + 1$.

También se podría haber probado con Comb.Null.: observar que en los $x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$ de q_D , $t_i \leq \Delta^2$. Luego, $\eta(G) \leq \eta_I(G) \leq \Delta^2 + 1$.

Saieed Akbari y otros mejoraron esta cota a $\Delta^2 - \Delta + 1$ (es *tight* para circuito impares).

Cota superior de $\eta(G)$

El peor caso es que agreguemos un vértice v con $\Delta(G)$ vecinos y donde cada $u \in N_v$ tenga a su vez $\Delta(G) - 1$ vecinos (y no haya intersección entre los vecinos de los u), teniendo que revisarse $\Delta + \Delta \cdot (\Delta - 1)$, i.e. $\Delta^2(G)$ aristas. Si al recorrer los valores $f(v)$, cada uno genera un conflicto con alguna, $f(v) = \Delta^2(G) + 1$.

También se podría haber probado con Comb.Null.: observar que en los $x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$ de q_D , $t_i \leq \Delta^2$. Luego, $\eta(G) \leq \eta_I(G) \leq \Delta^2 + 1$.

Saieed Akbari y otros mejoraron esta cota a $\Delta^2 - \Delta + 1$ (es *tight* para circuito impares).

Cota superior de $\eta(G)$

El peor caso es que agreguemos un vértice v con $\Delta(G)$ vecinos y donde cada $u \in N_v$ tenga a su vez $\Delta(G) - 1$ vecinos (y no haya intersección entre los vecinos de los u), teniendo que revisarse $\Delta + \Delta \cdot (\Delta - 1)$, i.e. $\Delta^2(G)$ aristas. Si al recorrer los valores $f(v)$, cada uno genera un conflicto con alguna, $f(v) = \Delta^2(G) + 1$.

También se podría haber probado con Comb.Null.: observar que en los $x_1^{t_1} \dots x_n^{t_n}$ de q_D , $t_i \leq \Delta^2$. Luego, $\eta(G) \leq \eta_I(G) \leq \Delta^2 + 1$.

Saieed Akbari y otros mejoraron esta cota a $\Delta^2 - \Delta + 1$ (es *tight* para circuito impares).

Hasta aquí es literatura...



Eliminación de mellizos falsos

Sean l_v, u_v ($l_v \leq u_v$) enteros positivos para cada $v \in V$.

Additive Coloring de (G, l, u)

$f : V \rightarrow \mathbb{N}$ es un additive k -coloring de (G, l, u) si y sólo si:

- $l_v \leq f(v) \leq u_v$
- $f(N(u)) \neq f(N(v)) \quad \forall (u, v) \in E$
- $k \geq \max\{\lceil f(v)/l_v \rceil : v \in V\}$

(en otras palabras, $f(v) \leq k.l_v$ para todo v)

- $\eta(G, l, u) = \min\{k : G \text{ tiene additive } k\text{-coloring de } (G, l, u)\}$

$\eta(G, l, u)$ con $l_v = 1, u_v = \Delta^2 - \Delta + 1$ es equivalente a $\eta(G)$.

Eliminación de mellizos falsos

Sean l_v, u_v ($l_v \leq u_v$) enteros positivos para cada $v \in V$.

Additive Coloring de (G, l, u)

$f : V \rightarrow \mathbb{N}$ es un additive k -coloring de (G, l, u) si y sólo si:

- $l_v \leq f(v) \leq u_v$
- $f(N(u)) \neq f(N(v)) \quad \forall (u, v) \in E$
- $k \geq \max\{\lceil f(v)/l_v \rceil : v \in V\}$

(en otras palabras, $f(v) \leq k \cdot l_v$ para todo v)

- $\eta(G, l, u) = \min\{k : G \text{ tiene additive } k\text{-coloring de } (G, l, u)\}$

$\eta(G, l, u)$ con $l_v = 1$, $u_v = \Delta^2 - \Delta + 1$ es equivalente a $\eta(G)$.

Eliminación de mellizos falsos

v, v' son mellizos falsos de $G \Leftrightarrow N(v) = N(v')$.

Proposición

Sea (G, l, u) una instancia, v, v' mellizos falsos de G , y (G', l', u') una instancia que satisface:

- $G' = G - v'$
- $l'_v = l_v + l_{v'}$, $l'_w = l_w$ para todo $w \in V \setminus \{v, v'\}$,
- $u'_v = u_v + u_{v'}$, $u'_w = u_w$ para todo $w \in V \setminus \{v, v'\}$.

Entonces $\eta(G, l, u) = \eta(G', l', u')$.

$\eta(G, l, u)$ no es más difícil de obtener que $\eta(G)$ desde el punto de vista del abordaje como PLE, por lo que conviene usar este procedimiento recursivamente hasta obtener un (G, l, u) tal que G no tiene mellizos falsos, reduciendo el tamaño del problema.

Eliminación de mellizos falsos

v, v' son mellizos falsos de $G \Leftrightarrow N(v) = N(v')$.

Proposición

Sea (G, l, u) una instancia, v, v' mellizos falsos de G , y (G', l', u') una instancia que satisface:

- $G' = G - v'$
- $l'_v = l_v + l_{v'}$, $l'_w = l_w$ para todo $w \in V \setminus \{v, v'\}$,
- $u'_v = u_v + u_{v'}$, $u'_w = u_w$ para todo $w \in V \setminus \{v, v'\}$.

Entonces $\eta(G, l, u) = \eta(G', l', u')$.

$\eta(G, l, u)$ no es más difícil de obtener que $\eta(G)$ desde el punto de vista del abordaje como PLE, por lo que conviene usar este procedimiento recursivamente hasta obtener un (G, l, u) tal que G no tiene mellizos falsos, reduciendo el tamaño del problema.

Formulación PLE para $\eta(G, l, u)$

$$\blacksquare z(u, v) = 1 \longrightarrow f(N(u)) < f(N(v))$$

min k

subject to

$$f(N(u)) - f(N(v)) + M_{uv}z(u, v) \leq M_{uv} - 1, \quad \forall (u, v) \in \bar{E}$$

$$f(v) \leq k \cdot l_v, \quad \forall v \in V$$

$$z(u, v) + z(v, u) = 1, \quad \forall (u, v) \in E$$

$$z(u, v) \in \{0, 1\}, \quad \forall (u, v) \in \bar{E}$$

$$f(v) \in \{l_v, \dots, u_v\}, \quad \forall v \in V$$

$$k \in \mathbb{Z}_+,$$

donde

$$\blacksquare \bar{E} = \{(u, v), (v, u) : (u, v) \in E\}$$

$$\blacksquare M_{uv} = \sum_{w \in N(u) \setminus N(v)} u_w - \sum_{w \in N(v) \setminus N(u)} l_w + 1, \quad \forall (u, v) \in \bar{E}.$$

Mi conjetura ☺

Pensemos en:

- $\chi^v(G, k) =$ cantidad de vértices del máximo subgrafo inducido que es k -colorable
(MAXIMUM k -COLORABLE SUBGRAPH PROBLEM)
- $\chi^e(G, k) =$ cantidad de aristas del máximo subgrafo (inducido por aristas) que es k -colorable (MAXIMUM k -CUT)

Observemos que:

- $\chi^v(G, k) = |V| \Leftrightarrow \chi(G) \leq k$
- $\chi^e(G, k) = |E| \Leftrightarrow \chi(G) \leq k$

Mi conjetura ☺

Pensemos en:

- $\chi^v(G, k)$ = cantidad de vértices del máximo subgrafo inducido que es k -colorable
(MAXIMUM k -COLORABLE SUBGRAPH PROBLEM)
- $\chi^e(G, k)$ = cantidad de aristas del máximo subgrafo (inducido por aristas) que es k -colorable (MAXIMUM k -CUT)

Observemos que:

- $\chi^v(G, k) = |V| \Leftrightarrow \chi(G) \leq k$
- $\chi^e(G, k) = |E| \Leftrightarrow \chi(G) \leq k$

Mi conjetura 😊

Ahora sus versiones “aditivas”:

- $\eta^v(G, k) = \text{idem. } \chi^v$ con additive k -colorable
- $\eta^e(G, k) = \text{idem. } \chi^e$ con additive k -colorable
- $\eta^x(G, k) = \text{máxima cantidad de aristas que no se violan en un additive } k\text{-coloring de } G$

La diferencia entre $\eta^e(G, k)$ y $\eta^x(G, k)$ es que el primero es la máxima cantidad de aristas que no se violan en un additive k -coloring de G , pero computando los $f(N(v))$ sobre el subgrafo inducido en vez de todo G .

También:

- $\eta^v(G, k) = |V| \Leftrightarrow \eta(G) \leq k$
- $\eta^e(G, k) = |E| \Leftrightarrow \eta(G) \leq k$
- $\eta^x(G, k) = |E| \Leftrightarrow \eta(G) \leq k$

Mi conjetura 😊

Ahora sus versiones “aditivas”:

- $\eta^v(G, k) = \text{idem. } \chi^v$ con additive k -colorable
- $\eta^e(G, k) = \text{idem. } \chi^e$ con additive k -colorable
- $\eta^x(G, k) = \text{máxima cantidad de aristas que no se violan en un additive } k\text{-coloring de } G$

La diferencia entre $\eta^e(G, k)$ y $\eta^x(G, k)$ es que el primero es la máxima cantidad de aristas que no se violan en un additive k -coloring de G , pero computando los $f(N(v))$ sobre el subgrafo inducido en vez de todo G .

También:

- $\eta^v(G, k) = |V| \Leftrightarrow \eta(G) \leq k$
- $\eta^e(G, k) = |E| \Leftrightarrow \eta(G) \leq k$
- $\eta^x(G, k) = |E| \Leftrightarrow \eta(G) \leq k$

Mi conjetura 😊

Ahora sus versiones “aditivas”:

- $\eta^v(G, k) = \text{idem. } \chi^v$ con additive k -colorable
- $\eta^e(G, k) = \text{idem. } \chi^e$ con additive k -colorable
- $\eta^x(G, k) = \text{máxima cantidad de aristas que no se violan en un additive } k\text{-coloring de } G$

La diferencia entre $\eta^e(G, k)$ y $\eta^x(G, k)$ es que el primero es la máxima cantidad de aristas que no se violan en un additive k -coloring de G , pero computando los $f(N(v))$ sobre el subgrafo inducido en vez de todo G .

También:

- $\eta^v(G, k) = |V| \Leftrightarrow \eta(G) \leq k$
- $\eta^e(G, k) = |E| \Leftrightarrow \eta(G) \leq k$
- $\eta^x(G, k) = |E| \Leftrightarrow \eta(G) \leq k$

Mi conjetura 😊

Para todo G y $k \in \mathbb{N}$, propongo:

- (1) $\chi^v(G, k) \leq \eta^v(G, k)$
- (2) $\chi^e(G, k) \leq \eta^e(G, k)$
- (3) $\chi^e(G, k) \leq \eta^x(G, k)$

Si cualquiera de ellas es válida entonces se da la Conjetura II “ $\eta(G) \leq \chi(G)$ ”.

(1) y (2) son equivalentes a la Conjetura II (lo pruebo para “e”).
 Dado G y k , sea $E' \subset E$ de cardinal máximo tal que $G[E']$ tiene un k -coloring. Es decir, $\chi^e(G, k) = |E'|$. Luego $\chi^e(G[E'], k) = |E'|$ y, por lo tanto, $\chi(G[E']) \leq k$. Al darse la Conjetura II, $\eta(G[E']) \leq k$. Entonces, $\eta^e(G[E'], k) = |E'| \leq \eta^e(G, k)$, es decir $\chi^e(G, k) \leq \eta^e(G, k)$.

Mi conjetura ☺

Para todo G y $k \in \mathbb{N}$, propongo:

- (1) $\chi^v(G, k) \leq \eta^v(G, k)$
- (2) $\chi^e(G, k) \leq \eta^e(G, k)$
- (3) $\chi^e(G, k) \leq \eta^x(G, k)$

Si cualquiera de ellas es válida entonces se da la Conjetura II “ $\eta(G) \leq \chi(G)$ ”.

(1) y (2) son equivalentes a la Conjetura II (lo pruebo para “e”).

Dado G y k , sea $E' \subset E$ de cardinal máximo tal que $G[E']$ tiene un k -coloring. Es decir, $\chi^e(G, k) = |E'|$. Luego

$\chi^e(G[E'], k) = |E'|$ y, por lo tanto, $\chi(G[E']) \leq k$. Al darse la Conjetura II, $\eta(G[E']) \leq k$. Entonces,

$\eta^e(G[E'], k) = |E'| \leq \eta^e(G, k)$, es decir $\chi^e(G, k) \leq \eta^e(G, k)$.

Mi conjetura ☺

$$\eta(G) =$$

min k

subject to

$$\begin{aligned} f(N(u)) - f(N(v)) + M_{uv}z(u, v) &\leq M_{uv} - 1, & \forall (u, v) \in \bar{E} \\ f(v) &\leq k, & \forall v \in V \\ z(u, v) + z(v, u) &= 1, & \forall (u, v) \in E \\ z(u, v) &\in \{0, 1\}, & \forall (u, v) \in \bar{E} \\ f(v) &\in \{1, \dots, \Delta^2 - \Delta + 1\}, & \forall v \in V \\ k &\in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

Mi conjetura ☺

$$\eta^x(G, k) =$$

$$\max \sum_{(u,v) \in \bar{E}} z(u, v)$$

subject to

$$f(N(u)) - f(N(v)) + M_{uv}z(u, v) \leq M_{uv} - 1, \quad \forall (u, v) \in \bar{E}$$

$$f(v) \leq k, \quad \forall v \in V$$

$$z(u, v) + z(v, u) \leq 1, \quad \forall (u, v) \in E$$

$$z(u, v) \in \{0, 1\}, \quad \forall (u, v) \in \bar{E}$$

$$f(v) \in \{1, \dots, \Delta^2 - \Delta + 1\}, \quad \forall v \in V$$

$$k \in \mathbb{Z}_+,$$

Poliedro P

Sea P la cap. conv. de las soluciones (f, v) tales que:

$$\begin{aligned} f(N(u)) - f(N(v)) + M_{uv}z(u, v) &\leq M_{uv} - 1, & \forall (u, v) \in \bar{E} \\ z(u, v) + z(v, u) &\leq 1, & \forall (u, v) \in E \\ z(u, v) &\in \{0, 1\}, & \forall (u, v) \in \bar{E} \\ f(v) &\in \{l_v, \dots, u_v\}, & \forall v \in V \end{aligned}$$

$$\eta(G, l, u) = \min\{k : (f, z) \in P, \\ z(u, v) + z(v, u) = 1 \quad \forall (u, v) \in E, \\ f(v) \leq k \cdot l_v \quad \forall v \in V\}$$

$$\eta^x(G, k) = \max\{\sum_{(u,v) \in \bar{E}} : (f, z) \in P, \\ f(v) \leq k \quad \forall (u, v) \in E\}$$

Poliedro P

Sea P la cap. conv. de las soluciones (f, v) tales que:

$$\begin{aligned} f(N(u)) - f(N(v)) + M_{uv}z(u, v) &\leq M_{uv} - 1, & \forall (u, v) \in \bar{E} \\ z(u, v) + z(v, u) &\leq 1, & \forall (u, v) \in E \\ z(u, v) &\in \{0, 1\}, & \forall (u, v) \in \bar{E} \\ f(v) &\in \{l_v, \dots, u_v\}, & \forall v \in V \end{aligned}$$

$$\eta(G, l, u) = \min\{k : (f, z) \in P, \\ z(u, v) + z(v, u) = 1 \quad \forall (u, v) \in E, \\ f(v) \leq k \cdot l_v \quad \forall v \in V\}$$

$$\eta^x(G, k) = \max\{\sum_{(u,v) \in \bar{E}} : (f, z) \in P, \\ f(v) \leq k \quad \forall (u, v) \in E\}$$

Poliedro P

Sea P la cap. conv. de las soluciones (f, v) tales que:

$$\begin{aligned} f(N(u)) - f(N(v)) + M_{uv}z(u, v) &\leq M_{uv} - 1, & \forall (u, v) \in \bar{E} \\ z(u, v) + z(v, u) &\leq 1, & \forall (u, v) \in E \\ z(u, v) &\in \{0, 1\}, & \forall (u, v) \in \bar{E} \\ f(v) &\in \{l_v, \dots, u_v\}, & \forall v \in V \end{aligned}$$

$$\eta(G, l, u) = \min\{k : (f, z) \in P, \\ z(u, v) + z(v, u) = 1 \quad \forall (u, v) \in E, \\ f(v) \leq k \cdot l_v \quad \forall v \in V\}$$

$$\eta^x(G, k) = \max\{\sum_{(u,v) \in \bar{E}} : (f, z) \in P, \\ f(v) \leq k \quad \forall (u, v) \in E\}$$

Propiedades de P

Sean los conjuntos $R = \{r \in V : l_r = u_r\}$ y
 $ST = \{(s, t) \in \bar{E} : \sum_{w \in N(t) \setminus N(s)} u_w \leq \sum_{w \in N(s) \setminus N(t)} l_w\}$.

Dimensión

$\dim(P) = |V| + 2|E| - |R| - |ST|$, y un sistema minimal de ecuaciones para P es:

$$\begin{aligned} f(r) &= l_r, & \forall r \in R \\ z(s, t) &= 0, & \forall (s, t) \in ST \end{aligned}$$

Si las cotas superiores son suficientemente grandes respecto a las inferiores, entonces P es de dimensión completa.

Propiedades de P

Sean los conjuntos $R = \{r \in V : l_r = u_r\}$ y
 $ST = \{(s, t) \in \bar{E} : \sum_{w \in N(t) \setminus N(s)} u_w \leq \sum_{w \in N(s) \setminus N(t)} l_w\}$.

Dimensión

$\dim(P) = |V| + 2|E| - |R| - |ST|$, y un sistema minimal de ecuaciones para P es:

$$\begin{aligned} f(r) &= l_r, & \forall r \in R \\ z(s, t) &= 0, & \forall (s, t) \in ST \end{aligned}$$

Si las cotas superiores son suficientemente grandes respecto a las inferiores, entonces P es de dimensión completa.

Propiedades de P

Facetas fáciles I

Para todo $(u, v) \in \bar{E} \setminus ST$, $z(u, v) \geq 0$ define faceta de P .

Facetas fáciles II

Para todo $v \in V \setminus R$, $f(v) \geq l_v$ define faceta de P si y sólo si para todo $u \in N(v)$ tal que $(v, u) \notin ST$ se satisface

$$l_v + \sum_{w \in N(u) \setminus (\{v\} \cup N(v))} u_w \geq 1 + \sum_{w \in N(v) \setminus N(u)} l_w.$$

Propiedades de P

Facetas fáciles III

Para todo $(u, v) \notin E$ tal que $N(u) \subset N(v)$, y todo $w \in N(u)$, $z(v, w) + z(w, u) \leq 1$ es válida en P . Más aún, define faceta si:

1. Se satisface

$$\sum_{v_1 \in N(u) \setminus N(w)} u_{v_1} \geq 2 + \sum_{v_1 \in N(w) \setminus N(u)} l_{v_1}.$$

2. Para todo $(s, t) \in \bar{E} \setminus (ST \cup \{(w, u), (u, w), (v, w), (w, v)\})$, existen vectores $f^{(s,t)}$ tales que $f^{(s,t)}(N(w)) < f^{(s,t)}(N(u))$, $f^{(s,t)}(N(s)) < f^{(s,t)}(N(t))$ y $l_{v_1} \leq f^{(s,t)}(v_1) \leq u_{v_1}$ para todo $v_1 \in V$.
3. Para algún $(s^*, t^*) \in \bar{E} \setminus (ST \cup \{(w, u), (u, w), (v, w), (w, v)\})$, existe un vector $f^{(v,w)}$ tal que $f^{(v,w)}(N(v)) < f^{(v,w)}(N(w))$, $f^{(v,w)}(N(s^*)) < f^{(v,w)}(N(t^*))$ y $l_{v_1} \leq f^{(v,w)}(v_1) \leq u_{v_1}$ para todo $v_1 \in V$.

Propiedades de P

Facetas fáciles IV

Para todo camino inducido de 4 vértices $\{(u', v), (v, v'), (v', u)\}$ tal que $N(u) \subset N(v)$ y $N(u') \subset N(v')$, $z(v', u) + z(v, u') \leq 1$ es válida en P . Más aún, define faceta si:

1. Se satisfacen

$$\sum_{w \in N(u) \setminus N(v')} u_w \geq \beta_u + \sum_{w \in N(v') \setminus N(u)} l_w.$$

$$\sum_{w \in N(u') \setminus N(v)} u_w \geq \beta_{u'} + \sum_{w \in N(v) \setminus N(u')} l_w.$$

donde, o bien $\beta_u = 2$ y $\beta_{u'} = 1$, o bien $\beta_u = 1$ y $\beta_{u'} = 2$.

2. Para todo

$(s, t) \in \overline{E} \setminus (ST \cup \{(u', v), (v, u'), (v, v'), (v', v), (v', u), (u, v')\})$, existen vectores $f^{(s,t)}$ tales que " $f^{(s,t)}(N(v')) < f^{(s,t)}(N(u))$ o $f^{(s,t)}(N(v)) < f^{(s,t)}(N(u'))$ ", $f^{(s,t)}(N(s)) < f^{(s,t)}(N(t))$ y $l_w \leq f^{(s,t)}(w) \leq u_w$ para todo $w \in V$.

Evidencia de mi conjetura

- Testeada sobre varias instancias aleatorias
- Demostrada para $k = 1$ y cualquier G : notar que $\chi^e(G, 1) = 0$ mientras que $\eta^x(G, 1) = |\{(u, v) \in E : d(u) \neq d(v)\}|$ (en particular, $\eta^x(G, 1) = 0$ si y sólo si G es regular).
- Demostrada para $k \geq 2$, para familias sencillas. Para árboles, bipartitos completos y circuitos pares es trivial. Para circuitos impares con $k \geq 3$ es trivial, mientras que con $k = 2$:
 $\chi^e(C_n, 2) = \eta^x(C_n, 2) = n - 1$. Para completos con $k \geq 2$, al satisfacerse $f(u) = f(v) \Leftrightarrow f(N(u)) = f(N(v))$ para todo $u, v \in V$, entonces $\chi^e(K_n, k) = \eta^x(K_n, k) = |E(K_n)| - \sum_{t=0}^{k-1} |E(K_{\lceil \frac{n-t}{k} \rceil})|$ (pensar en k cliques de tamaño equitativo con el mismo color).
- Si se satisface la Conjetura II y también $\eta^x(G, k) \geq \eta^e(G, k)$ entonces la conjetura estaría probada. ¿ $\eta^x(G, k) \geq \eta^e(G, k)$? Para un $G' \subset G$, $f(N_G(v)) \geq f(N_{G'}(v))$ luego en η^x los “colores” adoptan valores mayores, disminuyendo la probabilidad de colisión entre ellos.

Evidencia de mi conjetura

- Testeada sobre varias instancias aleatorias
- Demostrada para $k = 1$ y cualquier G : notar que $\chi^e(G, 1) = 0$ mientras que $\eta^x(G, 1) = |\{(u, v) \in E : d(u) \neq d(v)\}|$ (en particular, $\eta^x(G, 1) = 0$ si y sólo si G es regular).
- Demostrada para $k \geq 2$, para familias sencillas. Para árboles, bipartitos completos y circuitos pares es trivial. Para circuitos impares con $k \geq 3$ es trivial, mientras que con $k = 2$:
 $\chi^e(C_n, 2) = \eta^x(C_n, 2) = n - 1$. Para completos con $k \geq 2$, al satisfacerse $f(u) = f(v) \Leftrightarrow f(N(u)) = f(N(v))$ para todo $u, v \in V$, entonces $\chi^e(K_n, k) = \eta^x(K_n, k) = |E(K_n)| - \sum_{t=0}^{k-1} |E(K_{\lceil \frac{n-t}{k} \rceil})|$ (pensar en k cliques de tamaño equitativo con el mismo color).
- Si se satisface la Conjetura II y también $\eta^x(G, k) \geq \eta^e(G, k)$ entonces la conjetura estaría probada. ¿ $\eta^x(G, k) \geq \eta^e(G, k)$? Para un $G' \subset G$, $f(N_G(v)) \geq f(N_{G'}(v))$ luego en η^x los “colores” adoptan valores mayores, disminuyendo la probabilidad de colisión entre ellos.

Evidencia de mi conjetura

- Testeada sobre varias instancias aleatorias
- Demostrada para $k = 1$ y cualquier G : notar que $\chi^e(G, 1) = 0$ mientras que $\eta^x(G, 1) = |\{(u, v) \in E : d(u) \neq d(v)\}|$ (en particular, $\eta^x(G, 1) = 0$ si y sólo si G es regular).
- Demostrada para $k \geq 2$, para familias sencillas. Para árboles, bipartitos completos y circuitos pares es trivial. Para circuitos impares con $k \geq 3$ es trivial, mientras que con $k = 2$:
 $\chi^e(C_n, 2) = \eta^x(C_n, 2) = n - 1$. Para completos con $k \geq 2$, al satisfacerse $f(u) = f(v) \Leftrightarrow f(N(u)) = f(N(v))$ para todo $u, v \in V$, entonces $\chi^e(K_n, k) = \eta^x(K_n, k) = |E(K_n)| - \sum_{t=0}^{k-1} |E(K_{\lceil \frac{n-t}{k} \rceil})|$ (pensar en k cliques de tamaño equitativo con el mismo color).
- Si se satisface la Conjetura II y también $\eta^x(G, k) \geq \eta^e(G, k)$ entonces la conjetura estaría probada. ¿ $\eta^x(G, k) \geq \eta^e(G, k)$? Para un $G' \subset G$, $f(N_G(v)) \geq f(N_{G'}(v))$ luego en η^x los “colores” adoptan valores mayores, disminuyendo la probabilidad de colisión entre ellos.

Evidencia de mi conjetura

- Testeada sobre varias instancias aleatorias
- Demostrada para $k = 1$ y cualquier G : notar que $\chi^e(G, 1) = 0$ mientras que $\eta^x(G, 1) = |\{(u, v) \in E : d(u) \neq d(v)\}|$ (en particular, $\eta^x(G, 1) = 0$ si y sólo si G es regular).
- Demostrada para $k \geq 2$, para familias sencillas. Para árboles, bipartitos completos y circuitos pares es trivial. Para circuitos impares con $k \geq 3$ es trivial, mientras que con $k = 2$:
 $\chi^e(C_n, 2) = \eta^x(C_n, 2) = n - 1$. Para completos con $k \geq 2$, al satisfacerse $f(u) = f(v) \Leftrightarrow f(N(u)) = f(N(v))$ para todo $u, v \in V$, entonces $\chi^e(K_n, k) = \eta^x(K_n, k) = |E(K_n)| - \sum_{t=0}^{k-1} |E(K_{\lceil \frac{n-t}{k} \rceil})|$ (pensar en k cliques de tamaño equitativo con el mismo color).
- Si se satisface la Conjetura II y también $\eta^x(G, k) \geq \eta^e(G, k)$ entonces la conjetura estaría probada. ¿ $\eta^x(G, k) \geq \eta^e(G, k)$? Para un $G' \subset G$, $f(N_G(v)) \geq f(N_{G'}(v))$ luego en η^x los “colores” adoptan valores mayores, disminuyendo la probabilidad de colisión entre ellos.

Trabajos futuros

- Estudiar P : ¿d.v./facetas que usen f además de z ?
¿generadores de facetas?
 - Tal vez se puedan liftear las del linear ordering y las de la tesis de Diego
- Realizar algún testeo más sistemático de la conjetura.
- Demostrarla para $k = 2$ o 3 para ciertas familias de grafos o para familias fáciles (como multipartitos completos) con k arbitrario.
- Proponer una versión “choosable” para $\eta^x(G, k)$, ya que le provee cotas inferiores.
 - Tal vez usar Comb. Null., por ejemplo para probar $\eta_t^x(G, k) \geq t$ proponer un $\bar{A} \subset E(G)$ (orientadas) tal que $|\bar{A}| = t$ y probar que los exponentes t_i de los monomios de $q_{\bar{A}}$ no superen $k - 1$, donde

$$q_{\bar{A}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(i,j) \in \bar{A}} (\sum_{w \in N_G(j)} x_w - \sum_{w \in N_G(i)} x_w)$$

Trabajos futuros

- Estudiar P : ¿d.v./facetas que usen f además de z ?
¿generadores de facetas?
 - Tal vez se puedan liftear las del linear ordering y las de la tesis de Diego
- Realizar algún testeo más sistemático de la conjetura.
- Demostrarla para $k = 2$ o 3 para ciertas familias de grafos o para familias fáciles (como multipartitos completos) con k arbitrario.
- Proponer una versión “choosable” para $\eta^x(G, k)$, ya que le provee cotas inferiores.
 - Tal vez usar Comb. Null., por ejemplo para probar $\eta_l^x(G, k) \geq t$ proponer un $\bar{A} \subset E(G)$ (orientadas) tal que $|\bar{A}| = t$ y probar que los exponentes t_i de los monomios de $q_{\bar{A}}$ no superen $k - 1$, donde

$$q_{\bar{A}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(i,j) \in \bar{A}} (\sum_{w \in N_G(j)} x_w - \sum_{w \in N_G(i)} x_w)$$

Trabajos futuros

- Estudiar P : ¿d.v./facetas que usen f además de z ?
¿generadores de facetas?
 - Tal vez se puedan liftear las del linear ordering y las de la tesis de Diego
- Realizar algún testeo más sistemático de la conjetura.
- Demostrarla para $k = 2$ o 3 para ciertas familias de grafos o para familias fáciles (como multipartitos completos) con k arbitrario.
- Proponer una versión “choosable” para $\eta^x(G, k)$, ya que le provee cotas inferiores.
 - Tal vez usar Comb. Null., por ejemplo para probar $\eta_l^x(G, k) \geq t$ proponer un $\bar{A} \subset E(G)$ (orientadas) tal que $|\bar{A}| = t$ y probar que los exponentes t_i de los monomios de $q_{\bar{A}}$ no superen $k - 1$, donde

$$q_{\bar{A}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(i,j) \in \bar{A}} (\sum_{w \in N_G(j)} x_w - \sum_{w \in N_G(i)} x_w)$$

Trabajos futuros

- Estudiar P : ¿d.v./facetas que usen f además de z ?
¿generadores de facetas?
 - Tal vez se puedan liftear las del linear ordering y las de la tesis de Diego
- Realizar algún testeo más sistemático de la conjetura.
- Demostrarla para $k = 2$ o 3 para ciertas familias de grafos o para familias fáciles (como multipartitos completos) con k arbitrario.
- Proponer una versión “choosable” para $\eta^x(G, k)$, ya que le provee cotas inferiores.
 - Tal vez usar Comb. Null., por ejemplo para probar $\eta_{\vec{A}}^x(G, k) \geq t$ proponer un $\vec{A} \subset E(G)$ (orientadas) tal que $|\vec{A}| = t$ y probar que los exponentes t_i de los monomios de $q_{\vec{A}}$ no superen $k - 1$, donde

$$q_{\vec{A}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{(i,j) \in \vec{A}} (\sum_{w \in N_G(j)} x_w - \sum_{w \in N_G(i)} x_w)$$

Anécdota

Verifiqué la Conjetura II para todos los grafos conexos de hasta 10 vértices usando:

- La formulación PLE para obtener $\eta(G)$.
- DSATUR para obtener $\chi(G)$.
- Las instancias (~ 12 millones):

<http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/graphs.html>

Close Additive Coloring

Sea G sin mellizos verdaderos, i.e. $N[u] \neq N[v]$ para todos $u \neq v$.
 G es close additive k -colorable si y sólo si existe un
 $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $f(N[u]) \neq f(N[v])$ para todo
 $(u, v) \in E$.

$\eta[G] = \min\{k : G \text{ es close additive } k\text{-colorable}\}$

¿Será que $\eta[G] \leq \chi(G) \quad \forall G$ sin m.v.?

Anécdota

Verifiqué la Conjetura II para todos los grafos conexos de hasta 10 vértices usando:

- La formulación PLE para obtener $\eta(G)$.
- DSATUR para obtener $\chi(G)$.
- Las instancias (~ 12 millones):

<http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/graphs.html>

Close Additive Coloring

Sea G sin mellizos verdaderos, i.e. $N[u] \neq N[v]$ para todos $u \neq v$.
 G es close additive k -colorable si y sólo si existe un
 $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que $f(N[u]) \neq f(N[v])$ para todo
 $(u, v) \in E$.

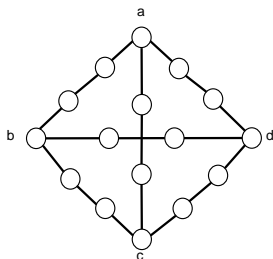
$\eta[G] = \min\{k : G \text{ es close additive } k\text{-colorable}\}$

¿Será que $\eta[G] \leq \chi(G) \quad \forall G$ sin m.v.?

Anécdota

También $\eta[G] \leq \chi(G)$ para todo los grafos conexos sin m.v. de hasta 10 vértices.

Sin embargo, encontré una familia de grafos que puede hacer tan grande $\eta[G] - \chi(G)$ como se quiera ☹️

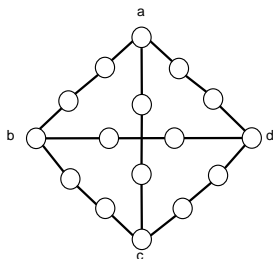


$\chi(G) = 3$ (tiene un C_9) sin embargo G no tiene close additive 3-coloring (las etiquetas de a, b, c, d deben ser distintas).

Anécdota

También $\eta[G] \leq \chi(G)$ para todo los grafos conexos sin m.v. de hasta 10 vértices.

Sin embargo, encontré una familia de grafos que puede hacer tan grande $\eta[G] - \chi(G)$ como se quiera ☹️



$\chi(G) = 3$ (tiene un C_9) sin embargo G no tiene close additive 3-coloring (las etiquetas de a, b, c, d deben ser distintas).