TÓPICOS AVANZADOS EN OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA Y TEORÍA DE GRAFOS

Docentes: Daniel Severin, Pablo Torres

Práctica n^o 3: Matroides, Propiedad Hereditaria, Descripción de Familias por Subgrafos Prohibidos

1. Pruebe que las siguientes estructuras $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ son matroides:

   (a) *Subconjuntos de columnas l.i.*: Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathcal{S} = \{1, \ldots, n\}$ e $\mathcal{I} = \{J \subseteq \mathcal{S}$: las columnas indexadas por los elementos de J son l.i.$\}$.

   (b) *Uniforme*: Sea $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}$ un conjunto finito e $\mathcal{I} = \{J \subseteq \mathcal{S} : |J| \leq k\}$.

2. Sea $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ un sistema independiente. Pruebe que los siguientes enunciados son equivalentes entre sí:

   (M2) Para todo $A \subset \mathcal{S}$ y $J_1, J_2 \in \mathcal{I}$ conjuntos independientes maximales de A, $|J_1| = |J_2|$.

   (M2') Para todos $J_1, J_2 \in \mathcal{I}$ tales que $|J_1| < |J_2|$, existe un $e \in J_2 \backslash J_1$ tal que $J_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

   (M2") Para todo $A \subset \mathcal{S}$ y $J \in \mathcal{I}$ tal que J es un conjunto independiente maximal de A, tenemos que J es un conjunto independiente máximo de A.

   Recuerde:

   - $J \in \mathcal{I}$ es *maximal* en $A \subset \mathcal{S}$ si $J \subset A$ y todo $e \in A \backslash J$ satisface $J \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$.
   - $J \in \mathcal{I}$ es *máximo* en $A \subset \mathcal{S}$ si $J \subset A$ y todo $J' \in \mathcal{I}$ tal que $J' \subset A$ satisface $|J'| \leq |J|$.

3. Considere un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$, es decir $E \subseteq V_1 \times V_2$.

   (a) Pruebe que si $\mathcal{S} = E$ e $\mathcal{I}_M = \{J \subseteq E : J$ es un matching de $G\}$ entonces $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_M)$ es un sistema independiente pero no un matroide.

   (b) Sea $\mathcal{S} = E$. Pruebe que, para $i = 1, 2$, si

   $$\mathcal{I}_i = \{J \subseteq E : \text{cada } v \in V_i \text{ es incidente en a lo sumo un arco de } J\},$$

   $(\mathcal{S}, \mathcal{I}_i)$ es una matroide.

   (c) Pruebe que $\mathcal{I}_M = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

4. Sea $G = (V, E)$ un grafo.

   (a) Pruebe que si G es conexo, todo bosque maximal es un árbol.

   (b) Pruebe que el *Problema del Árbol Generador Mínimo* se puede reducir al *Problema del Bosque de Peso Máximo*.

   (c) Pruebe que, si $\mathcal{S} = E$ e $\mathcal{I} = \{J \subseteq \mathcal{S} : J$ es bosque de $G\}$, $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ es una matroide.

(d) Recordando que el algoritmo goloso resuelve correctamente el *Problema de Conjunto Independiente de Costo Máximo* sobre toda matroide y utilizando los items anteriores, pruebe que el algoritmo de Kruskal (al final de la práctica 2) resuelve correctamente el *Problema del Árbol Generador Mínimo.*

5. Se dice que una propiedad $\mathscr{P}$ sobre grafos es *hereditaria* (por subgrafos inducidos por nodos) si para cualquier grafo G que satisface $\mathscr{P}$, todo subgrafo inducido por nodos de G también satisface $\mathscr{P}$. Determine cuáles de las siguientes propiedades son hereditarias:

   (a) G es bipartito
   (b) G es planar
   (c) G tiene un circuito euleriano
   (d) G tiene un circuito hamiltoniano
   (e) G tiene un k-coloreo
   (f) G tiene un matching perfecto.

6. Para familias de grafos definidas de la forma

$$\mathcal{G} = \{G : G \text{ es un grafo con la propiedad } \mathscr{P}\},$$

   con $\mathscr{P}$ una propiedad hereditaria, decimos que G es *mínimamente no* $\mathscr{P}$ si $G \notin \mathcal{G}$ y, para todo $v \in V(G)$, $G \backslash \{v\} \in \mathcal{G}$.

   (a) Pruebe que $G \in \mathcal{G}$ si y sólo si G no contiene como subgrafo inducido ningún grafo mínimamente no $\mathscr{P}$.
   Observación: Por esta propiedad, los grafos mínimamente no $\mathscr{P}$ se denominan *subgrafos prohibidos minimales de* $\mathcal{G}$.
   (b) Caracterice los grafos mínimamente no bipartitos.

7. Un grafo $G = (V, E)$ se dice *split* si existe una bipartición de V en los conjuntos Q y S tales que Q induce un grafo completo y S es un conjunto estable. Sea $\mathcal{G}$ la familia de grafos split.

   (a) Pruebe que ser split es hereditario.
   (b) Pruebe que $\mathcal{G}$ es autocomplementaria (es decir, $G \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow \overline{G} \in \mathcal{G}$).
   (c) Pruebe que los circuitos de 4 y 5 vértices son mínimamente no splits. ¿Son éstos los únicos subgrafos prohibidos de $\mathcal{G}$?

8. Un grafo G es perfecto si para todo subgrafo $G' \subset G$, $\omega(G') = \chi(G')$. Es decir, G' se puede colorear con k colores, siendo k el tamaño de la máxima clique de G'.

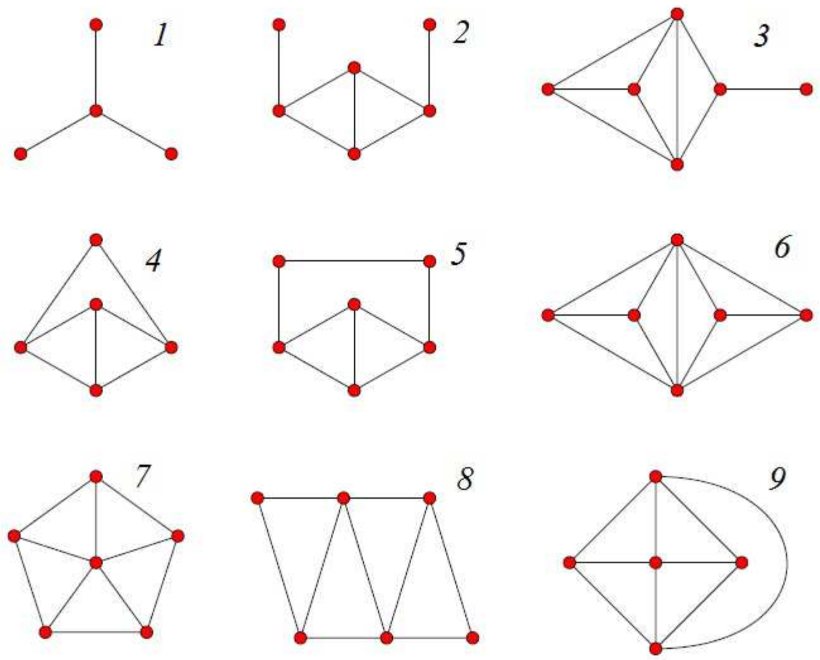
   (a) Pruebe que ser perfecto es hereditario.
   (b) Decimos que G' es un *agujero impar* de G si $G' \subset G$ y G' es un circuito impar de al menos 5 vértices. Análogamente, decimos que G' es un *anti-agujero impar* de G si $G' \subset G$ y G' es el complemento de un circuito impar. Pruebe que los agujeros y anti-agujeros impares son mínimamente no perfectos.

9. Un grafo $G = (V, E)$ es *de línea* si existe $G^* = (V^*, E^*)$ tal que $V = E^*$ y $(e_1, e_2) \in E$ si y sólo si e_1 y e_2 comparten un extremo en G^*. Por ejemplo, un completo K_n es un grafo de línea (por la existencia de $K_{1,n}$ en donde todas sus aristas son incidentes entre sí).

(a) Pruebe que ser de línea es hereditario.

(b) Pruebe que, en todo grafo de línea, sus aristas pueden ser particionadas en subgrafos completos de modo tal que todo nodo pertenece a lo sumo a dos subgrafos completos.

(c) Se sabe que los grafos de la lista son todos los subgrafos prohibidos de los grafos de línea [GC, pág. 110]. Seleccione un grafo de la lista de 5 vértices y otro de 6 vértices y pruebe que son mínimamente no de línea.



Bibliografía:

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization.* Wiley-Interscience.

[GC] Andreas Brandstädt, Van Bang Le, Jeremy P. Spinrad. *Graph classes: a survey.* SIAM monographs on discrete mathematics and applications, 1999.