Universidad Nacional de General Sarmiento

TÓPICOS AVANZADOS EN OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA Y TEORÍA DE GRAFOS

Docentes: Daniel Severin, Pablo Torres

Práctica n° 4: Complejidad de Problemas

1. Considere los siguientes problemas:

   Problema de la Suma de Subconjunto (PSS)

   Entrada: $P \subset \mathbb{Z}$ finito y $k \in \mathbb{Z}$.
   Pregunta: ¿existe $S \subseteq P$ tal que $\sum_{p \in S} p = k$?

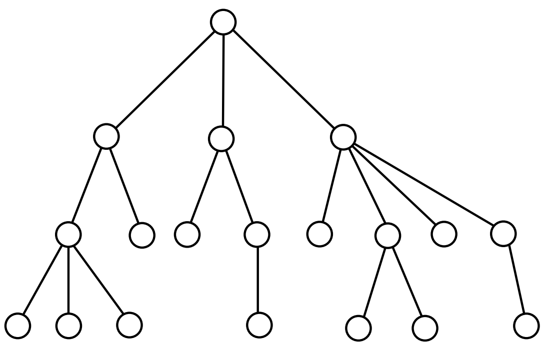
   Búsqueda de Entero (BE)

   Entrada: $P \subset \mathbb{Z}$ finito y $k \in \mathbb{Z}$.
   Pregunta: ¿ $k \in P$?

   (a) Dada una entrada $P; k$ de PPS, construimos la entrada de BE dada por $P' = \{\sum_{s \in S} s : S \subset P\}$, $k' = k$. Pruebe que ésta es una transformación de PPS a BE.

   (b) Se sabe que PSS es $\mathcal{NP}$-completo [GJNP, pág. 223] y, claramente, BE es resoluble en tiempo lineal. Con la transformación del item anterior, no estaríamos probando que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$? Justifique.

2. Halle un conjunto dominante total de mínimo cardinal en el siguiente árbol [TDOM, pág. 23].



3. Considere la transformación de 3-SAT a EXACT COVER dada en el Corolario 9.5 de [LCO, pag. 319].

   (a) Construya el grafo G y determine el conjunto X y la colección de subconjuntos $\mathcal{C}$ correspondiente a la fórmula $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee \neg x_2)$.

   (b) Pruebe que la transformación de 3-SAT a EXACT COVER es polinomial y correcta.

4. Una fórmula 3-SAT *satisface la propiedad estrella* si cada una de sus cláusulas tiene *exactamente* 3 literales distintos.

   Definimos el siguiente problema:

   Problema 3-SAT*

   Entrada: Φ, fórmula 3-SAT que satisface la propiedad estrella.
   Pregunta: ¿es Φ satisfactible?

   Demuestre que 3-SAT* es $\mathcal{NP}$-completo, reduciendo polinomialmente 3-SAT a 3-SAT*.

   Recordemos que un literal es una variable o su negación. Así una fórmula Φ que satisface la propiedad estrella puede contener cláusulas como $x_1 \vee \neg x_1 \vee x_2$ (porque x_1 y $\neg x_1$ se consideran literales distintos) pero se prohiben cláusulas como $x_1 \vee x_2$ (sólo tiene 2 literales) o $x_1 \vee x_1 \vee \neg x_2$ (x_1 está repetido).

5. Considere el problema:

   Grundy Total Sequence (GTS)

   Entrada: un grafo $G = (V, E)$.
   Objetivo: hallar una secuencia total legal de cardinal máximo en G.

   Sugerencia: Ver ejercicio 13 de la práctica 1 para recordar conceptos.

   (a) Sea v un vértice de grado 1 en G y sea u su único vecino. Pruebe que si S' es una secuencia total legal de cardinal máximo en $G - \{u, v\}$ entonces (v, S', u) es una secuencia total legal de cardinal máximo de G.

   Considerar que si un grafo G tiene vértices aislados, estos vértices no pueden formar parte de una secuencia total legal de G. En particular, asumimos que (para un grafo sin aristas) la secuencia vacía es total legal.

   (b) Pruebe que el problema GTS es polinomial en árboles.

6. Pruebe que la transformación del *Problema del Circuito Hamiltoniano Dirigido* al *Problema del Circuito Hamiltoniano no Dirigido* dada en el Corolario 9.7 de [LCO, pag. 321] es polinomial y correcta.

7. Sea $k \in \mathbb{Z}_+$. Definimos los siguientes problemas:

   Problema de k-Dominación (PkD)

   Entrada: $G = (V, E)$ un grafo, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   Pregunta: ¿existe un conjunto k-dominante de G de tamaño a lo sumo α?

   Problema de k-Empaquetamiento (PkE)

   Entrada: $G = (V, E)$ un grafo, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.
   Pregunta: ¿existe un k-empaquetamiento de G de tamaño al menos α?

   Sean r y k tales que $1 \leq k < r$ y $\mathcal{G} = \{G : G \text{ es } r\text{-regular}\}$. Si $k' = r + 1 - k$, pruebe que PkD($\mathcal{G}$) se puede reducir polinomialmente a Pk'E($\mathcal{G}$) y PkE($\mathcal{G}$) se puede reducir polinomialmente a Pk'D($\mathcal{G}$).

   Observación: Un grafo G es r-regular si todos sus vértices tienen grado r.

8. Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto de vértices C es un *cubrimiento por vértices* de G si toda arista de G tiene al menos un extremo en C.

   Subdividir una arista $e = uv$ de G es eliminar la arista e y colocar un nuevo vértice w y las aristas uw y vw. Por otro lado, colocar un nuevo vértice pendiente u a un vértice $v \in V$ es agregar a G el vértice u y la arista uv.

(a) Dado un grafo simple G, probar que el grafo obtenido subdividiendo todas sus aristas es bipartito.

(b) Sea $G*$ el grafo obtenido a partir de G subdividiendo todas sus aristas y colocando luego un vértice pendiente a cada nuevo vértice de la subdivisión. Probar que si G es planar entonces $G*$ es planar bipartito (i.e. planar y bipartito).

(c) Dado un grafo $G = (V, E)$, probar que si $G*$ tiene un conjunto dominante total de tamaño a lo sumo $j + |E|$ entonces G tiene un cubrimiento por vértices de tamaño a lo sumo j.

9. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un k-coloreo equitativo de G es un k-coloreo de G tal que para dos clases de colores C_i, C_j (con $i, j = 1, \ldots, k$ e $i \neq j$), se satisface $||C_i| - |C_j|| \leq 1$. El *número cromático equitativo* $\chi_{eq}(G)$ es el mínimo k para el cual G admite un k-coloreo equitativo. Considere el problema k-COLEQ de *decidir* si $\chi_{eq}(G) \leq k$, y el problema COLEQ de *hallar* $\chi_{eq}(G)$.

   (a) Pruebe que 2-COLEQ es decidible en tiempo polinomial, en grafos conexos.

   (b) Sabiendo que 3-COLEQ es $\mathcal{NP}$-*c* (incluso en grafos linea de grafos 3-regulares) pruebe que COLEQ es $\mathcal{NP}$-difícil. ¿Puede afirmar además que COLEQ es $\mathcal{NP}$-difícil incluso en grafos linea de grafos 3-regulares? Justifique.

   (c) Dado un grafo G de n vértices, pruebe que la existencia de un $\lceil n/2 \rceil$-coloreo equitativo de G es decidible en tiempo polinomial.

Bibligrafía:

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization.* Wiley-Interscience.

[TDOM] Michael A. Henning, Anders Yeo. *Total Domination in Graphs* (Chapter 3).

[GJNP] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W.H. Freeman.