Universidad Nacional de General Sarmiento

TÓPICOS AVANZADOS EN OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA Y TEORÍA DE GRAFOS

Docentes: Daniel Severin, Pablo Torres

Práctica nº 5: Teoría Poliedral, Resolución de Modelos mediante Programación Lineal Entera, Combinatorial Nullstellensatz

1. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ finito. Pruebe que los siguientes enunciados son equivalentes:
   - X es afínmente independiente.
   - Para cualquier $w \in \mathbb{R}^n$, $\{x - w : x \in X\}$ es afínmente independiente.
   - Para cualquier $\hat{x} \in X$, $\{x - \hat{x} : x \in X - \{\hat{x}\}\}$ es linealmente independiente.

2. Sea P el poliedro definido por el siguiente sistema (S):

$$\begin{cases} x_3 = -4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \leq 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 0 \\ x_2 - 5x_4 \leq -2 \\ x_2 - x_4 \leq 2 \\ -3x_2 + 7x_4 \leq 6 \\ -x_1 \leq 0 \end{cases}$$

   (a) Determine el sistema de ecuaciones derivado del sistema (S).
   (b) Determine la dimensión de P.
   (c) Identifique todos los puntos extremos de P.
   (d) Pruebe que $F_1 = \{x \in P : x_1 = 1\}$ no es una cara de P.
   Sugerencia: Proponga $x^1, x^2 \in P$ tales que $x_1^1 < 1$ y $x_1^2 > 1$.
   (e) Pruebe que $F_2 = \{x \in P : x_2 - x_4 = 2\}$ es una faceta de P.
   (f) Pruebe que $F_3 = \{x \in P : x_1 = 0\}$ es una cara de P pero no una faceta. ¿De qué dimensión es F_3?

3. Considere $P = conv(S)$ donde S se define a continuación:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3) \in \{0,1\}^7 : y_j = 1 \Leftrightarrow \text{hay } j \text{ unos en } (x_1, x_2, x_3)\}$$

   (a) Enumere los 8 puntos de S.
   (b) Determine la dimensión de P y el sistema de ecuaciones derivado.

(c) Demuestre que la desigualdad $y_j \geq 0$ define faceta de P para todo $j = 0, 1, 2, 3$.
Sugerencia: Puede aprovechar lo realizado en el ítem anterior y la propiedad de que si X es un conjunto de puntos afinmente independientes y $X' \subset X$, entonces X' también lo es.

(d) Demuestre que $y_j \leq 1$ define una cara de P que no es faceta, para todo $j = 0, 1, 2, 3$.

(e) Demuestre que $y_3 \leq x_i$ define faceta de P para todo $i = 1, 2, 3$.

(f) Demuestre que $x_i \leq y_1 + y_2 + y_3$ define faceta de P para todo $i = 1, 2, 3$.

4. Dado $G = (V, E)$, STAB(G) es el poliedro cápsula convexa de los vectores característicos de los conjuntos estables de G.

   (a) Pruebe que las desigualdades $\sum_{v \in V(G')} x_v \leq \alpha(G')$ son válidas en $STAB(G)$, para todo G' subgrafo inducido por vértices de G.

   (b) Escriba las desigualdades anteriores para los casos particulares en que G' es: 1) una clique, 2) un agujero impar, 3) un anti-agujero impar.
   Nota: Las def. de *agujeros* están dadas en el Ej. 7 de la Práctica 2.

5. Dado $G = (V, E)$, la relajación clique de STAB(G) es el siguiente poliedro:

$$\text{CLIQUE}(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^V : \sum_{v \in Q} x_v \leq 1 \;\; \forall \; Q \text{ clique maximal de } G\}.$$

   Chvátal probó que $STAB(G) = CLIQUE(G)$ si y sólo G es un grafo perfecto.
   Nota: La def. de *perfecto* es dada en el Ej. 7 de la Práctica 2. Además se sabe que G es perfecto si y sólo si no contiene agujeros ni anti-agujeros impares.

   (a) Sea G' un agujero impar de G y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^V$ tal que $\bar{x}_v = \frac{1}{2}$ si $v \in V(G')$ y $\bar{x}_v = 0$ si no. Pruebe que $\bar{x}$ es un punto extremo de CLIQUE(G).

   (b) Sea G' un anti-agujero impar de G y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^V$ tal que $\bar{x}_v = \frac{2}{|V(G')|-1}$ si $v \in V(G')$ y $\bar{x}_v = 0$ si no. Pruebe que $\bar{x}$ es un punto extremo de CLIQUE(G).

   (c) Sea G no perfecto. Encuentre $x^* \in \text{CLIQUE}(G) \setminus \text{STAB}(G)$ y una desigualdad que separe x^* de STAB(G).
   Sugerencia: Ver ítems anteriores y ejercicio anterior.

6. Dado $G = (V, E)$.

   (a) Pruebe que $STAB(G)$ es de dimensión completa.

   (b) Pruebe que, para todo grafo G, las siguientes desigualdades definen facetas de $STAB(G)$:

      i. $x_v \geq 0$, $v \in V$.

      ii. $\sum_{v \in Q} x_v \leq 1$, Q clique maximal de G.

   (c) Sea $G = C_{2k+1}$, con $k \geq 2$. Pruebe que $\sum_{v \in V} x_v \leq k$ define faceta de $STAB(G)$.
   Sugerencia: Para la facetitud, considere $V = \{0, 1, \ldots, 2k\}$ y los estables $S_i = \{i + 2t \ (mod\ n) : t = 0, \ldots, k-1\}$ para todo $i \in V$, y pruebe que la matríz cuyas filas son los vectores característicos de S_i es no-singular.

   (d) Sea $G = \overline{C_{2k+1}}$ el complemento del circuito de $2k+1$ vértices, con $k \geq 2$. Pruebe que $\sum_{v \in V} x_v \leq 2$ define faceta de $STAB(G)$.

   (e) El grafo $W_n = C_n \vee \{u\}$, donde $u \notin V(C_n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ es llamado *rueda* de tamaño n. Pruebe que:

i. $\sum_{v=0}^{2k} x_v \leq k$ es una desigualdad válida de $STAB(W_{2k+1})$ pero no define faceta.

ii. $kx_u + \sum_{v=0}^{2k} x_v \leq k$ define faceta de $STAB(W_{2k+1})$.

Sugerencia: Considere los estables maximales del grafo.

7. El siguiente Programa Entero (PE) modela el Problema de hallar la secuencia legal de máxima longitud de un grafo, $\gamma_{gr}(G)$ (vea Ej. 13 de la Práctica 1). Para todo $v \in V$ e $i = 1, \ldots, n$, sea y_{vi} una variable binaria tal que $y_{vi} = 1$ si v es elegido en el paso i; para todo $u \in V$ e $i = 1, \ldots, n$, sea x_{ui} una variable binaria tal que $x_{ui} = 1$ si u está disponible para ser marcado en el paso i (es decir, que no fue marcado por ningún vértice en los pasos anteriores). Llamamos a la siguiente formulación $\mathcal{F}_1$:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{v \in V} y_{vi}$$

subject to

$$\sum_{v \in V} y_{vi} \leq 1, \qquad \forall \; i = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{vi} \leq 1, \qquad \forall \; v \in V \qquad (2)$$

$$y_{vi+1} \leq \sum_{u \in N[v]} (x_{ui} - x_{ui+1}), \qquad \forall \; v \in V, \; i = 1, \ldots, n-1 \qquad (3)$$

$$x_{ui} + \sum_{v \in N[u]} y_{vi} \leq 1, \qquad \forall \; u \in V, \; i = 1, \ldots, n \qquad (4)$$

$$x_{ui+1} \leq x_{ui}, \qquad \forall \; u \in V, \; i = 1, \ldots, n-1 \qquad (5)$$

$$x, y \in \{0,1\}^{n^2} \qquad (6)$$

(a) Explique coloquialmente qué realiza cada restricción. Por ejemplo, "la restricción (3) garantiza que v puede ser elegido en el siguiente paso $(i+1)$ sólo si en el paso actual (i) existe al menos un vértice no marcado de su vecindario."

(b) Es habitual agregar restricciones adicionales a un modelo que eliminen soluciones enteras, para así reducir el árbol de búsqueda, siempre que la correctitud del modelo quede garantizada. Un tipo de soluciones a eliminar son las denominadas *simétricas*, soluciones para las cuales existe otra (que no se elimina) con el mismo valor objetivo. Otro tipo de soluciones a eliminar son aquellas cuyo valor objetivo se sabe que no es óptimo. Explique qué soluciones son eliminadas por los siguientes grupos de restricciones, y a qué tipo corresponden (simétricas, no-óptimas o ambas).

i. *Grupo 1.*

$$x_{u1} + \sum_{v \in N[u]} y_{v1} \geq 1, \qquad \forall \; u \in V \qquad (7)$$

$$x_{ui+1} + \sum_{v \in N[u]} y_{vi+1} \geq x_{ui}, \qquad \forall \; u \in V, \; i = 1, \ldots, n-1 \qquad (8)$$

ii. *Grupo 2.* Sea LB una cota inferior de $\gamma_{gr}(G)$.

$$\sum_{v \in V} y_{vi} = 1, \qquad \forall \; i = 1, \ldots, LB \qquad (9)$$

$$\sum_{v \in V} y_{vi+1} \leq \sum_{v \in V} y_{vi}, \qquad \forall \; i = LB, \ldots, n-1 \qquad (10)$$

(c) Llamamos $\mathcal{F}_2$ a la formulación que consiste de las restricciones (2)-(10). Pruebe que cualquier solución factible $x, y \in \mathbb{R}_+^{n^2}$ de la relajación lineal de $\mathcal{F}_2$ satisface las restricciones (1).
Ayuda: Utilice las del *Grupo 2.*

(d) Sea el poliedro $P_1 = conv(S_1)$, donde S_1 son las soluciones enteras de $\mathcal{F}_1$. Demuestre que la siguiente es una familia de desigualdades válidas:

$$x_{ui} + \sum_{j=1}^{i} y_{wj} \leq 1, \qquad \forall \;\; u \in V, \; w \in N[u], \; i = 2, \ldots, n$$

(e) Sea G el grafo *paw*: $G = (\{1,2,3,4\}, \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3)\})$. En los archivos `paw1.lp`, `paw1.poi` y `paw1.ieq` (en `paw.zip`) se hallan, respectivamente, la formulación $\mathcal{F}_1$, los puntos enteros S_1 y la descripción completa de P_1 (generadas con 2 herramientas: [Porta] y [ZerOne]). Por ej., en `paw1.lp`, las restricciones `c1-c4` se corresponden con las (1) de (PE). En `paw1.ieq`, las restricciones `( 1)-( 20)` se corresponden con aquellas desigualdades de no-negatividad que definen facetas de P_1. Debido a una limitación de [Porta], las variables x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, ..., x_{44}, y_{11}, y_{12}, ..., y_{44} se enumeran consecutivamente, recibiendo los nombres `x1`, `x2`, ..., `x32`.

i. En `paw1.ieq`, ¿qué restricciones de entre las de $\mathcal{F}_1$, es decir (1)-(5), identifican las desigualdades del grupo `( 21)-( 32)`?

ii. Del grupo `( 33)-(273)`, identifique 3 desigualdades que se correspondan con aquellas de $\mathcal{F}_1$, es decir (1)-(5).

iii. De `( 33)-(273)`, elija una desigualdad que no sea ninguna de las (1)-(5). Para estar seguro de que no lo sea, proponga una solución factible (x^*, y^*) de la relajación lineal de $\mathcal{F}_1$ que viola la desigualdad. Luego pruebe su validez en P_1.
Sugerencia: Dada una desigualdad $\alpha x \leq \beta$ y una solución x^*, la violación es $\alpha x^* - \beta$. Para hallar la máxima violación posible use como función objetivo αx sobre la relajación lineal de (PE). Esta se puede obtener eliminando los 3 renglones de `Binaries` correspondientes a la restricción (6) en `paw1.lp`.

iv. De `(274)-(694)`, escoja una desigualdad y demuestre que es válida en P_1.

(f) También se halló la descripción completa del grafo paw, para la formulación $\mathcal{F}_2$ usando $LB = 2$. Los datos $\mathcal{F}_2$, S_2 y P_2 se encuentran en los archivos `paw2.*` (note la drástica reducción de las soluciones enteras producido por las restricciones (7)-(10) que se manifiesta al comparar los archivos `*.poi`).

i. Demuestre que $dim(P_2) = 5$.

ii. Demuestre que $x_{12} \leq x_{11}$ no define faceta de P_2.

iii. Demuestre que $y_{21} \geq 0$ define faceta de P_2. Luego, identifique cuál de las desigualdades que aparece en `paw2.ieq` se corresponde a ella (¡así es! una de ellas lo es, sólo que está "enmascarada" por el sistema minimal de ecuaciones).
Sugerencia: Use la misma sugerencia que el Ej. 4 ítem (c).

8. Demuestre que existe un grafo que es additive 2-colorable pero no additive 3-choosable (ver [SLIDES3], también Teorema 1 de [AHADI]).

9. Sea G un grafo bipartito planar. Es sabido que existe una orientación D de G tal que todos sus vértices tienen un grado máximo de salida de 2 ($\delta^+(v) \leq 2$). Use Combinatorial Nullstellensatz para probar que G es additive 3-choosable.
Sugerencia: Es similar a la prueba de [SLIDES3] de que los árboles son additive 2-choosable.

Bibligrafía:

[LCO] W. Cook, W. Cunningham, W. Pulleyblank A. Schrijver. *Combinatorial Optimization.* Wiley-Interscience.

[Porta] T. Christof, A. Löbel. Polyhedron Representation Transformation Algorithm. `http://porta.zib.de`

[ZerOne] M.E. Lübbecke. ZerOne: Vertex enumeration for $0-1$ polytopes (ver. 1.8.1), 1999.

[AHADI] A. Ahadi, A. Dehghan. The inapproximability for the (0,1)-additive number. Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science 17 (2016), 217–226.