

TÓPICOS AVANZADOS EN OPTIMIZACIÓN COMBINATORIA Y TEORÍA DE GRAFOS

Docentes: Daniel Severin, Pablo Torres

PRÁCTICA N° 6: DESCOMPOSICIÓN MODULAR, CLIQUE-WIDTH Y MSOL

Complementos prácticas anteriores

1. Un grafo $G = (V, E)$ es una *araña* de peso r si V puede ser particionado en conjuntos S , C y H (H puede ser vacío) tales que $|S| = |C| \geq 2$, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ es un conjunto estable, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ es una clique, todo vértice de H es adyacente a todo vértice de C , todo vértice de H no es adyacente a ningún vértice de S y además se cumple una de las siguientes condiciones:

$$\text{I) } (s_i, c_j) \in E \Leftrightarrow i = j \text{ (araña flaca);} \quad \text{II) } (s_i, c_j) \in E \Leftrightarrow i \neq j \text{ (araña gorda).}$$

Pruebe que :

- (a) G es una araña flaca si y sólo si \overline{G} es una araña gorda.
 - (b) G es araña flaca y araña gorda si y sólo si $G = P_4$.
 - (c) $G = (S, C, H)$ es un grafo araña, G es split si y sólo si $G[H]$ es split.
2. Sea $G = (S, C, H)$ una araña y $w \in \mathbb{Z}^{V(G)}$. Determine $\chi(G)$ y encuentre un estable de peso máximo de G , en función de $\chi(G[H])$ y de un estable de máximo peso en $G[H]$, respectivamente.
 3. Dado un grafo $G = (V, E)$, la *distancia* entre dos vértices u, v , denotada $dist(u, v)$, es la longitud (cantidad de aristas) del camino más corto entre u y v . De no existir dicho camino se dice que la distancia es ∞ . Un k - ρ -coloreo de G es una función $f : V \mapsto \{1, 2, \dots, k\}$ tal que si $f(u) = f(v) = i$ entonces $dist(u, v) \geq i + 1$. El *número ρ -cromático* de G , que notamos $\chi_\rho(G)$ es el mínimo k tal que G admite un k - ρ -coloreo.
 - (a) Hallar $\chi_\rho(P_4)$, $\chi_\rho(P_5)$ y $\chi_\rho(C_5)$.
 - (b) El diámetro de un grafo es el máximo de las distancias entre sus vértices, i.e. $diam(G) = \max\{dist(u, v) : u, v \in V\}$. Probar que $\chi_\rho(G) \leq |V| + 1 - \alpha(G)$, donde $\alpha(G)$ es el número de estabilidad de G . Además, demostrar que si $diam(G) \leq 2$ entonces vale la igualdad. ¿Vale la recíproca de esta última implicación? Es decir, ¿si $\chi_\rho(G) \leq |V| + 1 - \alpha(G)$ entonces $diam(G) \leq 2$?
 4. Dado $r \geq 2$, A_r^0 es la araña gorda sin cabeza de peso r . Para $k \geq 1$, A_r^k es la araña gorda de peso r y cuya cabeza es isomorfa a A_r^{k-1} .
 - (a) Hallar $\chi_\rho(A_r^0)$ para todo $r \geq 2$.

- (b) Calcular $\chi_\rho(A_5^2)$.
- (c) Determinar $\chi_\rho(A_r^k)$ para todo $k \geq 0$ y $r \geq 2$.

Sugerencia: Usar resultados del ejercicio anterior.

5. Sea $q \geq 4$. Un grafo $G = (V, E)$ es $(q, q - 4)$ si para todo conjunto $S \subset V$ tal que $|S| = q$, $G[S]$ tiene a lo sumo $q - 4$ caminos P_4 inducidos diferentes. Los grafos $(4, 0)$ se denominan *cografos* y los $(5, 1)$, grafos P_4 -sparse.

- (a) Demuestre que la clase de grafos $(q, q - 4)$ es hereditaria.
- (b) Pruebe que si G es una araña sin cabeza entonces G es P_4 -sparse.
- (c) Pruebe que si G es una araña con cabeza $H \neq \emptyset$ entonces

$$"G \text{ es } P_4\text{-sparse} \Leftrightarrow G[H] \text{ } P_4\text{-sparse}"$$

- (d) Probar que todo grafo $(4, 0)$ es un grafo $(q, q - 4)$ para todo $q \geq 5$,
- (e) Analizar la veracidad del siguiente enunciado: Si $q_1 < q_2$ entonces los grafos $(q_1, q_1 - 4)$ son grafos $(q_2, q_2 - 4)$.
- (f) Demostrar que existen grafos $(5, 1)$ que son $(7, 3)$ pero no son $(q, q - 4)$ para ningún $q \geq 6$ y $q \neq 7$.

Descomposición Modular, Clique-Width y MSOL

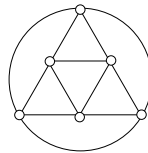
6. Dado $G = (V, E)$ y pesos $w \in \mathbb{Z}^V$, denotemos con $S(G)$ a un conjunto estable de peso máximo en G . Recuerde que $\chi(G)$ es el número cromático de G .

- (a) Determine cómo encontrar $S(G_1 \oplus G_2)$ y $S(G_1 \vee G_2)$ si se conoce $S(G_1)$ y $S(G_2)$.
- (b) Calcule $\chi(G_1 \oplus G_2)$ y $\chi(G_1 \vee G_2)$ en función de $\chi(G_1)$ y $\chi(G_2)$.
- (c) Dibuje el grafo

$$G = (\{v_1\} \oplus \{v_2\}) \vee (\{v_3\} \vee (\{v_4\} \oplus \{v_5\}))$$

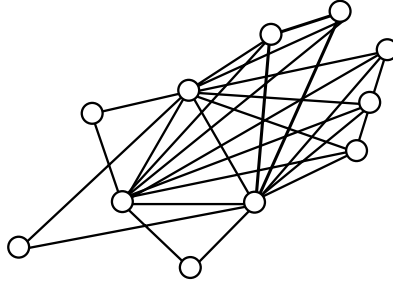
y describa los pasos que realizaría el algoritmo de descomposición modular para obtener $\chi(G)$ y $S(G)$.

7. (a) Obtenga el árbol de descomposición modular del siguiente grafo.



- (b) Describa los pasos que realiza el algoritmo de descomposición modular para hallar el número de 3-empaquetamiento del grafo del item anterior. Sugerencia: ver [DOMPACK].

8. Calcular mediante la descomposición modular un 2-empaquetamiento del siguiente grafo. Sugerencia: ver [DOMPACK].



9. Dado G denotamos con $cw(G)$ el valor de su clique-width. Ver definición en [APUNTE.CW]
- (a) Demuestre que $cw(K_n) = 2$ si $n \geq 2$. ¿Son los grafos completos los únicos grafos con clique-width 2?
 - (b) Halle $cw(P_3)$. Pruebe que $cw(P_n) = 3$ si $n \geq 4$.
 - (c) Pruebe que los árboles tienen clique-width a lo sumo 3.
 - (d) Halle $cw(C_5)$ y $cw(C_6)$. Demuestre que $cw(C_n) \leq 4$ si $n \geq 7$.

10. Sean G y H dos grafos disjuntos y $v \in V(G)$, luego $G[H/v]$ denota el grafo obtenido por *reemplazo* en G de v por H , i.e. $V(G[H/v]) = (V(G) \cup V(H)) - \{v\}$ y

$$E(G[H/v]) = E(H) \cup \{e : e \in E(G) \text{ y } e \text{ es no incidente en } v\} \cup \{uw : u \in V(H), w \in V(G) \text{ y } w \text{ es adyacente a } v \text{ en } G\}.$$

Pruebe que $cw(G[H/v]) \leq \max\{cw(G), cw(H)\}$.

11. Pruebe que los grafos bipartitos y los grafos split tienen clique-width no acotado.
Sugerencia: pruebe que $\mathcal{F}_n \geq 2^{\frac{n^2}{4}}$, donde \mathcal{F}_n se define en [APUNTE.CW].

12. Exprese la propiedad de conexidad de un grafo como una fórmula MSOL.

13. Pruebe que los problemas de optimización de “ k -empaquetamiento de cardinal máximo” y “conjunto k -dominante de cardinal mínimo” son problemas $\text{LinEMSOL}(\tau_1)$.

14. Sean $G = (V, E)$ un grafo, k un entero positivo y $f : V \mapsto \{0, \dots, k\}$ una función. Para cualquier $U \subset V$, denotamos $f(U) = \sum_{u \in U} f(u)$. Decimos que f es una *función $\{k\}$ -dominante de G* si $f(N[v]) \geq k$ para todo $v \in V$. El problema de $\{k\}$ -dominación consiste en hallar una función $\{k\}$ -dominante de peso mínimo, i.e. tal que $f(V)$ sea mínimo. El parámetro $\gamma_{\{k\}}(G)$ vale dicho peso.

Además, dado un grafo H notamos $G \odot H$ al grafo obtenido reemplazando todos los vértices de G por H . Por ejemplo, $K_n \odot K_m$ es isomorfo a K_{n+m} .

- (a) Verifique que $\gamma_{\{3\}}(C_6) = \gamma_3(C_6 \odot K_3)$ sin calcular explícitamente los parámetros.
- (b) Pruebe que $\gamma_{\{k\}}(G) = \gamma_k(G \odot K_k)$ para todo $k \geq 2$.
- (c) Demuestre que el problema de $\{k\}$ -dominación es polinomial en familias de grafos con clique-width acotado por una constante. *Sugerencia:* Utilizar item *b* y ejercicio anterior.

15. Se sabe que el problema de obtener el *número ρ -cromático* es NP -difícil aún restringido a árboles. ¿Es este problema de optimización $\text{LinEMSOL}(\tau_1)$? Justifique.

16. Se sabe que el problema de determinar si un grafo es 3 coloreable (3-COL) es NP-difícil para grafos generales. Determine la complejidad del 3-COL en la familia de grafos *distancia hereditarios*, i.e. la familia de grafos conexos tales que la distancia entre dos vértices cualesquiera en G es la misma que la distancia en cualquiera de sus subgrafos inducidos conexos.

Sugerencia: Verificar si la familia de grafos tiene clique-width acotado.

Ver: <http://graphclasses.org>

Bibliografía:

[PACKTREE] M. P. Dobson, V. Leoni, G. Nasini. *Arbitrary Limited Packings in Trees*. Manuscript.

[COURCELLE] B. Courcelle, J. A. Makowsky, U. Rotics. *Linear Time Solvable Optimization Problems on Graphs of Bounded Clique Width*. Theory of Computing Systems 33 (2000) 125–150.

[APUNTE_CW] Apunte de la cátedra que contiene un repaso de las definiciones de clique-width, MSOL, LinEMSOL y el Teorema de Courcelle.