Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
ÁLGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
Licenciatura en Física - 2015

Equipo docente: Viviana del Barco, Lucía Caraballo y Ana Muringo

---

UNIDAD 5: Números complejos

1. Definiciones y propiedades básicas - $\mathbb{C}$ como extensión de $\mathbb{R}$.

Definición 1. *Se llama **número complejo** a todo par ordenado $z = (a, b)$ de números reales.*

Dado $z \in \mathbb{C}$, z un número complejo, si $z = (a, b)$ los números a y b son respectivamente la **parte real** y **parte impaginaria** de z y esto lo notamos:

$$a = Re(z), \quad b = Im(z).$$

Dados dos números complejos $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$ definimos la igualdad de z y w como:

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Observemos que el par (a, b) es *ordenado*, en el sentido que el complejo (a, b) no es igual al complejo (b, a).

Definimos a continuación operaciones entre los números complejos: la suma y el producto de la siguiente manera:

Definición 2. *Sean $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$ dos números complejos (es decir $a, x \in \mathbb{C}$). Entonces definimos*

- *Suma:* $z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- *Producto:* $zw = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Es importante notar que la suma (producto) que se está definiendo es la de los pares ordenados (a, b) y (c, d). Cuando decimos que esto equivale al par ordenado $(a + c, b + d)$, la suma aquí es la usual entre los números reales a y c, y b y d.

Al conjunto de los números complejos junto con las operaciones definidas arriba lo indicamos con la letra $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema 3. *Los números complejos satisfacen las siguientes propiedades: si z, u, w son números complejos cualesquiera, entonces se verifican:*

1. *Propiedad conmutativa:* $z + w = w + z$, $zw = wz$.
2. *Propiedad asociativa:* $z + (u + w) = (z + u) + w$, $z(uw) = (zu)w$.
3. *Propiedad distributiva:* $z(u + w) = zu + zw$.
4. *Existencia de neutro: Existen* $(0, 0) \in \mathbb{C}$ *y* $(1, 0) \in \mathbb{C}$ *tales que*
$$(0, 0) + z = z \text{ y } (1, 0)z = z.$$
5. *Existencia de opuesto: Si* $z = (a, b)$, *existe* $-z = (-a, -b) \in \mathbb{C}$ *tal que* $z + (-z) = (0, 0)$.
6. *Exitencia de inverso: Si* $z = (a, b) \neq 0$, *existe* $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \in \mathbb{C}$ *tal que* $zz^{-1} = (1, 0)$.

Demostración. ejercicio $\square$

El elemento $(0, 0)$ del Teorema 3 se llama **neutro** de la suma en $\mathbb{C}$ y para cada $z \in \mathbb{C}$, $-z$ se llama **opuesto** de z. El elemento $(1, 0)$ se llama **identidad** del producto en $\mathbb{C}$ y para cada $z \in \mathbb{C}$, $z \neq (0, 0)$, z^{-1} se llama **inverso** de z.

A partir del teorema anterior, podemos definir la resta y el cociente de números complejos.

Definición 4. *Sean z y w dos números complejos. Se define la* **resta** *de w a z y se denota $z-w$ al número complejo $z-w = z+(-w)$. Si $w \neq (0,0)$, se define el* **cociente** *de z por w y se denota $\frac{z}{w}$ al número complejo $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$.*

Ejemplo 5.
1. $(1,0)-(2,1) = (1,0)+[-(2,1)] = (1,0)+[(-2,-1)] = (1+(-2), 0+(-1)) = (-1,-1)$.
2. $(2,1)-(1,0) = (2,1)+[-(1,0)] = (2,1)+[(-1,0)] = (2+(-1), 1+0) = (1,1)$. *Notar que este ejemplo muestra que* **la resta de números complejos no es conmutativa** *ya que* $(1,0)-(2,1) \neq (2,1)-(1,0)$.
3. $\frac{(2,0)}{(1,1)} = (2,0)(1,1)^{-1} = (2,0)(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (2\,\frac{1}{2} - 0\frac{-1}{2}, 2\frac{-1}{2} + 0\frac{1}{2}) = (1,-1)$. *Notar que* $\frac{(1,1)}{(2,0)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \neq \frac{(2,0)}{(1,1)}$, *por lo tanto* **el cociente de números complejos no es una operación conmutativa**.

Una última operación que será interesante estudiar es la de *potenciación*.

Definición 6. *Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el número complejo z^n de la siguiente manera (recursiva):*

$$\begin{cases} z^1 = z \\ z^n = z^{n-1} \cdot z, \quad n \in \mathbb{N},\ , n \geq 2 \end{cases}$$

Si $z \neq 0$, se define $z^0 = 1$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, se define $z^n = (z^{-1})^{(-n)}$. El número z^n se llama **potencia n-ésima de** *z.*

La potencia de complejos así definida tiene las siguientes propiedades (análogas a las de los números reales)

Teorema 7. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $n, k \in \mathbb{Z}$. Entonces:*

1. $z^k z^n = z^{k+n}$
2. $\left(z^k\right)^n = z^{kn}$
3. $(zw)^n = z^n w^n$.
4. $\left(\dfrac{z}{w}\right)^n = \dfrac{z^n}{w^n}$.

Ejemplo 8. $(1,1)^{-2} = \left((1,1)^{-1}\right)^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (0, -\frac{1}{2})$.

Sea C_0 el subconjunto de $\mathbb{C}$ constituidos por los complejos de la forma $(a,0)$, esto es, los que tienen parte imaginaria nula. Entonces las operaciones de suma y producto son *cerradas* en C_0, es decir, la suma y el producto de dos elementos de C_0 es nuevamente un elemento de C_0. En efecto,

$$(a,0)+(c,0) = (a+c,0), \quad (a,0)(c,0) = (ac,0).$$

Además, si $z \in C_0$ y $z = (a,0)$, entonces

$$-(a,0) = (-a,0), \text{ y si } a \neq 0 \text{ también resulta } (a,0)^{-1} = (a^{-1},0).$$

Esto implica, en particular, que la resta y la división también son cerradas en C_0: restar (o dividir) dos números complejos con parte imaginaria nula da como resultado un número complejo con parte imaginaria nula (ejercicio: demostrar esta afirmación). De igual manera, si $z \in C_0$ y $z \neq 0$, $z^n = (a^n, 0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Vemos entonces que los números complejos de C_0 se comportan de la misma manera que si fueran números reales.

Por este motivo, no haremos diferencia entre un número real x y el complejo $(x,0)$. De hecho, a cada número complejo $(x,0) \in C_0$ lo notaremos directamente como x. Via la identificación:

$$x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow (x,0) \in \mathbb{C}.$$

De esta manera, diremos que $\mathbb{C}$ es una extensión de $\mathbb{R}$, pues $\mathbb{C}$ *contiene* a $\mathbb{R}$, pensando cada número $x \in \mathbb{R}$ como $(x,0) \in \mathbb{C}_0$. Con esta convención: $0 = (0,0)$, $1 = (1,0)$, $-1 = (-1,0)$, etc.

Observación 9. *Decimos que un número complejo z es imaginario puro si $z = (0,b)$ con $b \neq 0$, es decir si $z \neq (0,0)$ y $Re(z) = 0$. Notar que el conjunto de números complejos imaginarios puros* no *es un conjunto cerrado por el producto.*

2. La unidad imaginaria i - Forma binómica de un número complejo.

Definición 10. *Llamamos* **unidad imaginaria** *al número complejo* $(0, 1)$ *y lo notamos con la letra* i*:* $i = (0, 1)$.

Notar que i es un número complejo imaginario puro. Además, i es solución de la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, que no tiene solución en el cuerpo de los número reales. En efecto:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

con las identificaciones anteriores.

Las potencias enteras de la unidad imaginaria tienen una particularidad que es que *se repiten de 4 en 4*: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i$, $i^4 = 1$, $i^5 = 1$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$, etc... Es posible demostrar que esta particularidad se repite con todas las potencias enteras de i.

Teorema 11. *Para todo* $n \in \mathbb{Z}$*,* $i^n = i^r$ *donde* r *es el resto de dividir a* n *por* 4.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea r el resto de dividir a n por 4, es decir $n = 4p + r$. Por las propiedades 1 y 2 del Teorema 7, resulta

$$i^n = i^{4p+r} = (i^4)^p \cdot i^r = 1^p \cdot i^r = i^r.$$

□

Ejemplo 12. *Para calcular la potencia* i^{1329}*, dividimos* 1329 *por* 4*:* $1329 = 332 \cdot 4 + 1$*. Entonces* $i^{1329} = i^1 = i$*. Por otro lado,* $i^{-257} = i^3 = -i$ *ya que* $-257 = (-65) \cdot 4 + 3$.

Usando la identificación $x \in \mathbb{R} \leftrightarrow (x, 0) \in C_0$ e $i = (0, 1)$, podemos escribir los números complejos de una manera más práctica que la de par ordenado.

Teorema 13. *Todo número complejo* z *puede expresarse en la forma* $z = a + bi$ *con*$a, b \in \mathbb{R}$*. Esta forma de escribirlo se llama* **forma binómica de** z.

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo. Entonces z es un par ordenado $z = (a, b)$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. Según la identificación $C_0 \leftrightarrow \mathbb{R}$ antes hecha: $a = (a, 0)$, $b = (b, 0)$; y según la definición de la unidad imaginaria, $i = (0, 1)$. De esta manera

$$a + b \cdot i = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b) = z.$$

□

Observación 14. *Dado* $z \in \mathbb{C}$*, su forma binómica es* $z = a + bi$ *si y sólo si* $Re(z) = a$ *e* $Im(z) = b$.

La ventaja de esta notación es que facilita los cálculos algebraicos. En efecto, aplicando las propiedades distributivas, asociativas y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, podemos resolver de manera sencilla un producto, sin recurrir a la fórmula dada para el producto de números complejos como pares ordenados:

$$(a, b)(c, d) = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ac - bd, ad + bc),$$

como habíamos definido inicialmente.

Definición 15. *Sea* $z \in \mathbb{C}$ *un número complejo de forma binómica* $z = a + bi$*. Se denomina* **número conjugado de** z *y se nota* $\overline{z}$ *al número complejo* $\overline{z} = a - bi$.

Observemos que z y $\overline{z}$ tienen igual parte real y parte imaginaria opuestas: $Re(\overline{z}) = Re(z)$ e $Im(\overline{z}) = -Im(z)$.

Teorema 16. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces*

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $z = \overline{z}$ *si y sólo si* $z \in \mathbb{R}$
4. $z \cdot \overline{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2$.

Demostración. Ejercicio. □

La propiedad 4 del teorema anterior es de gran importancia a la hora de calcular el recíproco de un número complejo o el cociente de dos números complejos.

Ejemplo 17. *Sean $z = 2 + i$ y $w = 1 - i$, calcular $\frac{z}{w}$. Vamos a utilizar 4 para calcular el inverso de w:*

$$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{1+i}{Re(w)^2 + Im(w)^2} = \frac{1+i}{2}.$$

Luego, $\frac{z}{w} = zw^{-1} = (2+i)(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

Ejemplo 18. *Si $z = 1 + 2i$, $w = -2 - i$, entonces $\overline{w} = -2 + i$ y resulta*

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w}\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{(1+2i)(-2+i)}{(-2)^2 + (-1)^2} = \frac{-4-3i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i.$$

Para calcular el cociente de un número complejo z por un número complejo w, multiplicamos y dividimos por el conjugado de w. Gracias al teorema anterior obtenemos:

Corolario 19. *Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ con $w \neq 0$. Entonces*

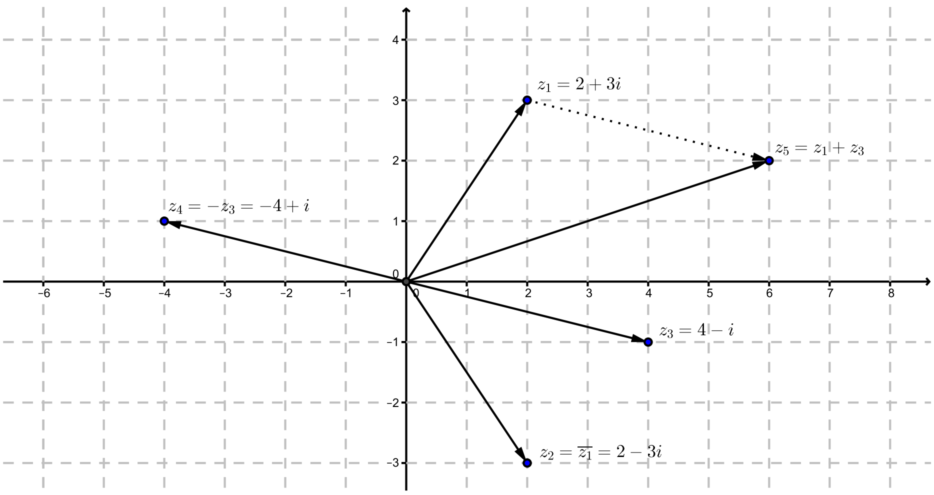
$$w^{-1} = \frac{\overline{w}}{Re(w)^2 + Im(w)^2} \quad y \quad \frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{Re(w)^2 + Im(w)^2}.$$

Demostración. Ejercicio. □

3. Representación geométrica de los números complejos - Forma polar y trigonométrica de un número complejo.

Dado que todo número complejo es un par ordenado (a, b) de números reales, existe una correspondencia biunívoca entre los números complejos y los puntos del plano, que recibe entonces el nombre de **plano complejo**. Dado $z = (a, b)$, a z asociamos el punto P cuyas coordenadas cartesianas son (a, b) y el vector $\overrightarrow{OP}$, donde $O = (0, 0)$ es el origen de coordenadas. Cuando trabajamos con números complejos en general denominamos como **eje real** al eje de las abscisas, dado que aquí yacen los puntos que representan a números reales, y por **eje imaginario** al eje de las ordenadas, dado que aquí están los puntos que representan a números **imaginarios puros**, es decir, números complejos con parte real nula.

Ejemplo 20. *En la gráfica siguiente se muestran los puntos del plano correspondientes a los complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = \overline{z}_1$, $z_3 = 4 - i$, $z_4 = -z_3$, $z_5 = z_1 + z_3$.*



Definición 21. *Dado un complejo z se denomina **módulo** de z, y se denota $|z|$ a la longitud del segmento $\overline{OP}$, donde P es el punto del plano asociado a z.*

Observar que si $z = a + bi$, entonces $|z| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Luego $|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$ que por la propiedad vista anteriormente resulta $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Definición 22. *Sea $z = a + bi$ un número complejo tal que $z \neq 0$. Se define el **argumento** de z como el ángulo que forma el vector $\vec{OP} = (a, b)$ con el eje positivo de las abscisas. El número complejo $z = 0$ no tiene argumento.*

Notar que un número complejo tiene infinitos argumentos, dependiendo de cuantas «vueltas» demos alrededor del origen para medir el ángulo. En cualquier caso, si ϕ y θ son dos argumentos del mismo complejo z debe valer

$$\theta = \phi + 2k\pi, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}.$$

Notar que si θ es un argumento de $z = a + bi$, con $a \neq 0$ entonces $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$. Si z es imaginario puro ($a = 0$), entonces su argumento es $\pi/2$ o $\frac{3}{2}\pi$, dependiendo si su parte imaginaria es positiva o negativa, respectivamente.

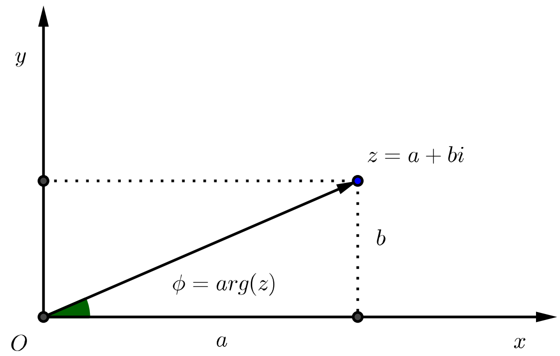
Por ejemplo, si $z = 1 + i$, entonces $\pi/4$ y $\frac{9}{4}\pi$ son dos argumentos para z.

Ejercicio 23. *Calcular los argumentos de los números complejos graficados arriba.*

Definición 24. *Para cada $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se llama **argumento principal** de zy lo denotamos por $arg(z)$ al un único argumento ϕ de z que verifica $0 \leq \phi < 2\pi$.*

Tomemos por ejemplo $z = 2 + 2i$. Entonces $\phi = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{9}{4}\pi$ y $\gamma = \frac{17}{4}\pi$ son argumentos de z, pero ϕ es el argumento principal.

Observemos la siguiente figura:



Para cualquier argumento θ de z (en particular para $\phi = arg(z)$), entonces por el teorema de pitágoras y las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo obtenemos

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = z \cdot \overline{z}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{b}{a}. \tag{2}$$

$$\begin{cases} a = \rho \cos\theta \\ b = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}, \text{ donde } \rho = |z| \tag{3}$$

y por lo tanto

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta). \tag{4}$$

Esta última expresión de z se denomina **forma trigonométrica** de z.

Observación 25. *Dado un número complejo z en forma binómica $z = a + bi$, las ecuaciones 1, 2, 3 y 4 permiten hallar la forma trigonométrica de z.*

Notar que si $z = r(u + vi)$ donde $u^2 + v^2 = 1$ entonces $r(u + vi)$ es la forma trigonométrica de z y su argumento es θ tal que $\cos\theta = u$ y $\sin\theta = v$.

Ejemplo 26. *Sean $z = 27 + 9\sqrt{3}i$ y $w = -3 + 3i$. Para calcular la forma trigonométrica de z buscamos su módulo y argumento (ya que $z \neq 0$): $|z| = \sqrt{27^2 + (9\sqrt{3})^2} = 18\sqrt{3}$ y su argumento θ es tal que $\operatorname{tg}\theta = \frac{9\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \pi/6$ o $\theta = 7\pi/6$. Como z tiene partes real e imaginaria positiva, podemos decir que z está en el primer cuadrante y por lo tanto el ángulo que forma con el eje x es $\pi/6$. Más aún $arg(z) = \pi/6$ y todo otro argumento de z difiere en 2π de $\pi/6$. Escribimos la forma trigonométrica de z:*

$$z = 18\sqrt{3}\,(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6) = 18\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

Para calcular la forma trigonométrica de w, sólo observaremos que w puede escribirse como $w = 3\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$, y se verifica $(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1$, luego la forma trigonométrica de w es

$$w = 3\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i),$$

y su argumento principal es $\phi = \frac{3}{4}\pi$.

Es claro que si tenemos un número complejo escrito de forma trigonométrica $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, entonces su forma binómica se obtiene tan solo distribuyendo la expresión de arriba y resultado: $z = a + bi$ donde $a = Re(z) = \rho\cos\theta$, $b = Im(z) = \rho\sin\theta$.

Utlizando la forma trigonométrica, es fácil probar el siguiente resultado:

Teorema 27. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces:*

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
2. *Si z y w son no nulos, $arg(z) + arg(w)$ es un argumento de $z \cdot w$.*

Demostración. Ejercicio (recordar las fórmulas para el coseno y el seno del ángulo suma) $\square$

Observando (4), vemos que para definir un número complejo z no nulo sólo necesitamos conocer su módulo ρ y su argumento θ. Resumimos esa información escribiendo

$$z = \rho_\theta \tag{5}$$

Esta última forma de expresar al número complejo z se denomina **forma polar** de z.

Si $z = \rho_\phi$ y $w = \delta_\theta$ entonces

$$z = w \text{ si y sólo si } \begin{cases} \rho = \delta \\ \phi = \theta + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{6}$$

Ejercicio 28. *Probar que si $z \neq 0$ y θ es un argumento de z, entonces $\theta + \pi$ es un argumento de $-z$ y $-\theta$ es un argumento de $\overline{z}$. Escribir las formas trigonométricas de $-z$ y $\overline{z}$ en función de la de z.*

Ejemplo 29. *Si z y w son los números complejos del Ejemplo 26, sus formas polares son:*

$$z = 18\sqrt{3}_{\pi/6}, \qquad w = 3\sqrt{2}_{\frac{3}{4}\pi}.$$

Notar que también $z = 18\sqrt{3}_{13\pi/6}$ y $w = 3\sqrt{2}_{-\frac{5}{4}\pi}$.

Como ya remarcamos antes, si z está dado en su forma binómica, obtenemos la forma polar calculando su módulo y su argumento por las fórmulas (1) y (2). Si z está dado en forma polar, podemos obtener la forma binómica a partir de la forma trigonométrica (4).

La forma polar nos da una manera muy sencilla de realizar productos, cocientes, y calcular potencias n-ésimas de números complejos. De hecho a partir del Teorema 27 tenemos:

Teorema 30. *Sean $z = \rho_\phi$ y $w = \delta_\theta$ dos complejos dados en forma polar. Entonces:*

1. $z \cdot w = (\rho\delta)_{\phi+\theta}$
2. $\dfrac{z}{w} = \left(\dfrac{\rho}{\delta}\right)_{(\phi-\theta)}$
3. $z^n = \rho^n_{n\phi}$.

Demostración. Ejercicio. □

Corolario 31. *Si $z \neq 0$ y $z = \rho_\theta$ en forma polar, entonces $z^{-1} = \rho^{-1}_{-\theta}$.*

Ejemplo 32. *Nuevamente usamos los números complejos z y w del Ejemplo 29 y calculamos:*

$$z \cdot w = \left(18\sqrt{3}_{\pi/6}\right) \cdot \left(3\sqrt{2}_{\frac{3}{4}\pi}\right) = (18 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2})_{\frac{\pi}{6}+\frac{3}{4}\pi} = 54\sqrt{6}_{\frac{11}{12}\pi}.$$

Ya hemos visto que la unidad imaginaria i es la raiz cuadrada de -1 ya que $i^2 = -1$ y por lo tanto $i = \sqrt{-1}$. En realidad, la unidad imaginaria permite calcular la raiz cuadrada de cualquier número real negativo posee raiz cuadrada ya que si $x \in \mathbb{R}^-$, entonces $(\sqrt{-x}i)^2 = (-x)i^2 = (-x)(-1) = x$. Veremos a continuación que es posible calcular la raíz n-ésima de cualquier número complejo (en particular de los reales negativos), para cualquier n natural. Comenzamos con la definición.

Definición 33. *Dado un número complejo w y un número natural $n \in \mathbb{N}$, decimos que z es una **raíz n-ésima** de w si $z^n = w$.*

Como es usual, las raíces 2-ésimas de un número se llaman *raíces cuadradas*; las raíces 3-ésimas de un número se llaman *raíces cúbicas*; las raíces 4-ésimas de un número se llaman *raíces cuartas*; las raíces 5-ésimas de un número se llaman *raíces quintas*, etc...

La fórmula (3) del Teorema 30 nos permitirá calcular de manera fácil raíces n-ésimas de los números complejos.

Comencemos analizando un ejemplo. Supongamos que tenemos $w = 16_{\pi/4}$ y queremos calcular las raíces cuartas de w. Si $z = \rho_\phi$ es una de esas raíces, debe ser $z^4 = \rho^4_{4\phi} = w$. De la igualdad de complejos dados en forma polar (6), obtenemos

$$\rho^4 = 16 \Rightarrow \ \rho = 2$$

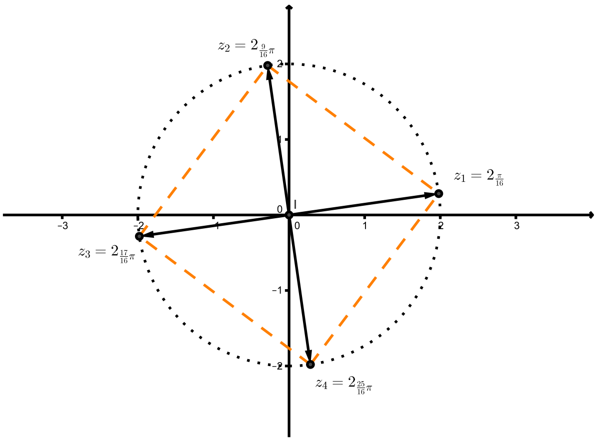
y

$$4\phi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \ \phi = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}$$

Si bien en la última expresión k varía en todo $\mathbb{Z}$, sólo para $k = 0, 1, 2, 3$ obtenemos complejos distintos. De hecho tomando para $k = 4$, obtenemos el argumento $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ que es el mismo argumento que $\frac{\pi}{6}$, obtenido tomando $k = 0$. Luego las cuatro raíces cuartas de w son

$$z_1 = 2_{\frac{\pi}{16}},\ z_2 = 2_{\frac{9}{16}\pi},\ z_3 = 2_{\frac{17}{16}\pi},\ z_4 = 2_{\frac{25}{16}\pi}$$

Graficamos las cuatro raices cuartas de w:



Se ve en la figura que las raíces cuartas son los vértices de un cuadrado inscripto en la circunferencia de radio 2.

Siguiendo exactamente el mismo razonamiento es posible probar el siguiente teorema, denominado **Fórmula de Moivre**:

Teorema 34. *Sea $w = \rho_\phi$ un número complejo no nulo en forma polar. El número complejo $z = \delta_\theta$ es una raíz n-ésima de w si y sólamente si se verifica*

$$\delta = \sqrt[n]{\rho}, \quad \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad \textit{para algún } k \textit{ tal que } k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{7}$$

Demostración. Supongamos $z = \delta_\theta$ es una raíz n-ésima de w. Por definición se tiene $z^n = w$ y por otro lado, el Teorema 30 implica que $z^n = \delta^n_{n\theta}$. Luego

$$z^n = \delta^n_{n\theta} = \rho_\phi = w$$

y esto sucede siempre y cuando $\rho = \delta^n$ y al mismo tiempo los ángulos $n\theta$ y ϕ difieren en un múltiplo de 2π, es decir,

$$z^n = w \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta^n = \rho \\ n\theta - \phi = 2l\pi, \text{para algún } l \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2l\pi}{n}, \text{para algún } l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Resta probar que el valor l puede tomarse entre 0 y $n-1$.

Primero notemos que si l es mayor o igual que n, podemos tomar la división $l = n \cdot c + k$, siendo k el resto de la división y por lo tanto k está entre 0 y $n-1$. Además

$$\frac{\phi}{n} + \frac{2l\pi}{n} = \frac{\phi}{n} + \frac{2(n \cdot c + k)\pi}{n} = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2c\pi$$

y por lo tanto $\delta_{\frac{\phi}{n}+\frac{2l\pi}{n}}$ es el mismo número complejo que $\delta_{\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}}$, siendo k natural entre 0 y $n-1$. De manera análoga se prueba que si $l < 0$ entonces $\delta_{\frac{\phi}{n}+\frac{2l\pi}{n}} = \delta_{\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}}$. Luego, en la ecuación de arriba podemos escribir

$$z^n = w \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \delta = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \text{para algún } k \text{ número natural entre 0 y } n-1. \end{cases}$$

□

De la ecuación (7) las raíces n-ésimas de w son los números complejos que se obtienen de darle diferentes valores al k entre 0 y $n-1$:

$$z_0 = \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\phi}{n}}, \quad z_1 = \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n}}, \quad z_2 = \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\phi}{n}+\frac{4\pi}{n}}, \dots \quad z_k = \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}}, \dots \quad z_{n-1} = \sqrt[n]{\rho}_{\frac{\phi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

Es importantísimo notar que estos n números complejos $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ son todos diferentes. En efecto supongamos que dos de ellos son iguales, pongamos $z_s = z_t$ con s y t dos números naturales entre 0 y $n-1$. Entonces $z_s = z_t$ implica que sus argumentos difieren en un múltiplo de 2π, es decir, existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{\phi}{n} + \frac{2s\pi}{n} = \frac{\phi}{n} + \frac{2t\pi}{n} + 2l\pi \Rightarrow s = t + l \cdot n$$

pero como s y t son números naturales menores que n, la igualdad $s = t + ln$ sólo se da si $l = 0$ y por lo tanto $s = t$. Hemos probado entonces el siguiente resultado:

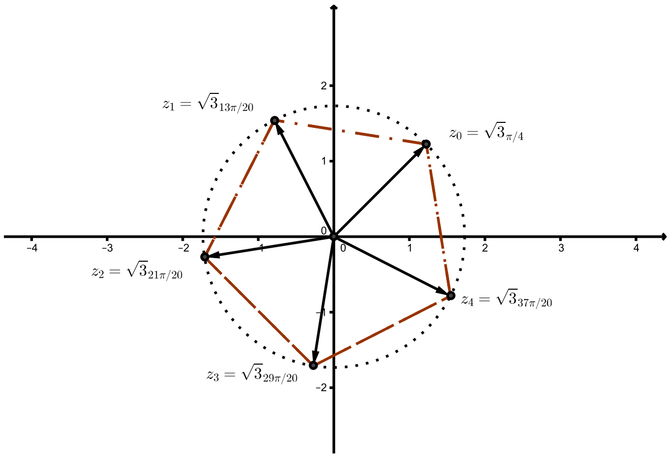
Corolario 35. *Todo número complejo $w \neq 0$ tiene exactamente n raíces n-ésimas que están dadas por la Fórmula de Moivre* (7).

Gráficamente, los n números complejos $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ que son raíz n-ésima de $w = \rho_\phi$ tienen todos igual módulo $\sqrt[n]{\rho}$ y dos consecutivos de ellos difieren en un ángulo de $2\pi/n$. Por lo tanto, $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ yacen sobre una circunferencia de radio $\sqrt[n]{\rho}$ y forman un polígono regular de n lados (comparar con la figura del ejemplo anterior).

Ejemplo 36. *Vamos a calcular las raíces quintas de* $w = \sqrt{243}_{5\pi/4}$*. Sabemos que serán 5 números complejos diferentes* $z_0, \ldots, z_4$ *con módulo* $\sqrt[5]{\sqrt{243}} = \sqrt{\sqrt[5]{243}} = \sqrt{3}$ *y ángulo dado por* (7) *para los valores de* $k = 0, \ldots, 4$*:*

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{3}_{\pi/4} \\ z_1 &= \sqrt{3}_{\pi/4+2\pi/5} = \sqrt{3}_{13\pi/20} \\ z_2 &= \sqrt{3}_{\pi/4+4\pi/5} = \sqrt{3}_{21\pi/20} \\ z_3 &= \sqrt{3}_{\pi/4+6\pi/5} = \sqrt{3}_{29\pi/20} \\ z_4 &= \sqrt{3}_{\pi/4+8\pi/5} = \sqrt{3}_{37\pi/20} \end{aligned}$$

Graficamos las raíces quintas de w:



Para finalizar esta unidad, remarcamos lo siguiente: toda ecuación cuadrática con coeficientes e incógnita compleja, tiene solución. En efecto, puede verse (con la misma demostración que para el caso real) que las raíces de la ecuación $az^z + bz + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$, son

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

, donde ahora la raíz cuadrada siempre tiene dos soluciones, independientemente de si el discriminante es positivo o negativo. Observemos que aquí no ponemos el símbolo $\pm$ pues todo complejo tiene exactamente dos raíces cuadradas.