Práctica 1: ELIMINACIÓN GAUSSIANA - FACTORIZACIÓN LU

1. ¿Qué sucede si una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ es premultiplicada por las matrices

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   ¿Qué sucede si A es postmultiplicada por E_{31} y E_{23}?

2. *a*) Determinar las matrices E_{21}, E_{31} y E_{32} que llevan la siguiente matriz A a su forma triangular U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   b) Calcular la matriz $E = E_{32}E_{31}E_{21}$ que realiza todos los pasos de la eliminación $EA = U$.

3. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

   Hallar la factorización LU de A, escribir y resolver el sistema triangular superior $Ux = \tilde{b}$ que se obtiene luego de la eliminación gaussiana.

4. Encontrar la matriz inversa de

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 6 \\ 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 8 \\ 6x_3 + 5x_4 = -4 \end{array} \right. .$$

   a) Hallar la factorización LU de A, matriz de coeficientes del sistema y resolver el mismo.

   b) Resolver el sistema $Ax = \tilde{b}$, con $\tilde{b} = (6, 2, 10, 2)^t$.

   c) Resolver el sistema $Ax = \hat{b}$, con $\hat{b} = (5, 0, 2, 0)^t$.

6. Encontrar los factores L, D, U para la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   Resolver el sistema $Ax = b$ con $b = (6, 0, -6)^t$.

7. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostrar que

   a) AA^t y A^tA son matrices simétricas.

   b) Para $m = n$ $A + A^t$ es simétrica. ¿Qué sucede con $A - A^t$.

8. Mostrar que los pivotes de A son también los pivotes de A^t.

9. *a*) Hallar la factorización LDU de la matriz
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

   b) Usar lo realizado en el ítem anterior para resolver el sistema $A^t x = (2,5,5)^t$.

10. Recordemos que la matriz $E_{ij}(a)$ con $i > j$ está definida por
$$E_{ij}(a) = (m_{kl})_{n\times n}, \qquad \text{con} \qquad m_{kl} = \left| \begin{array}{ll} 1 & k = l \\ 0 & k \neq i \; o \; l \neq j, \; y \; k \neq l \\ a & k = i \; y \; l = j \end{array} \right.$$

   a) Probar que $E_{ij}(a)e_l$ (columna l-ésima de $E_{ij}(a)$) verifica:
$$E_{ij}(a)e_l = \left| \begin{array}{ll} e_l, & l \neq j, \\ e_j + ae_i, & l = j. \end{array} \right.$$

   b) Dado $r \in \mathbb{N}$, probar que $[E_{ij}(a)]^r = E_{ij}(ra)$.

   c) Determinar la matriz $[E_{ij}(a)]^{-1}$.

   d) Determinar la matriz $E_{ij}(a)E_{\tilde{i}\tilde{j}}(b)$, donde $\tilde{i} > \tilde{j}$, $i \leq \tilde{i}$ y $j \leq \tilde{j}$.

11. Encontrar la factorización $PA = LDU$ de las matrices
$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Determinar los valores de a y b que conducen a un intercambio de filas y cuáles son los que hacen a la matriz singular.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 3 \end{bmatrix}$$

13. Demostrar los siguientes enunciados

   a) Si $E_{ij}(-a)$ sustrae de a fila i un múltiplo de la fila j entonces $[E_{ij}(-a)]^{-1}$ lo suma nuevamente.

   b) Si P_{ij} intercambia dos filas, entonces P_{ij}^{-1} las vuelve a intercambiar, es decir $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

   c) Si D es una matriz diagonal, con entradas $d_1, \cdots, d_n$ no nulas, entonces D^{-1} es una matriz diagonal con entradas $\dfrac{1}{d_1}, \cdots, \dfrac{1}{d_n}$.

   d) Si P es una matriz de permutación, entonces $P^t = P^{-1}$.