UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Licenciatura en Matemática y Profesorado en Matemática

Cátedra: Álgebra

Sistemas de Ecuaciones. Matrices. Determinantes.

Profesor responsable: Mariana Escalante

Año 2011

1. Conceptos básicos. Sistemas equivalentes. Operaciones elementales.

Definición 1. *Una ecuación con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es* lineal *si puede escribirse en la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1}$$

Los números $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$ son los coeficientes *y $b \in \mathbb{R}$ es el* término constante *o* lado derecho *de la ecuación. Las variables también se llaman* incógnitas. *Si $b = 0$ la ecuación se llama* homogénea.

Ejemplo 2. *La ecuación*

$$x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 3$$

es lineal ya que tiene la forma (**??**).

Ejemplo 3. *La ecuación*

$$x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 1 = x_1 - x_2 + 2$$

es lineal ya que puede escribirse en forma canónica (**??**)*:*

$$0x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 3.$$

Los coeficientes son $0, 2, 4$ y -6 y el término constante es 3.

Definición 4. *Una* solución *de la ecuación lineal* (**??**) *es una n-upla $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ tal que cuando reemplazamos los valores de x_i por $\overline{x}_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ en* (**??**)*, la igualdad es cierta. En este caso decimos que $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$* satisface *la ecuación* (**??**).

Ejemplo 5. *Si consideramos la ecuación*

$$2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 3,$$

$(\alpha, 0, \frac{3}{4}, 0)$ *es una solución, cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{R}$.*

En este caso hay muchas soluciones para esta ecuación. Es posible describir el conjunto de todas las soluciones que tengan $x_2 = x_3 = 0$?

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 6. *Un* sistema lineal *de m ecuaciones y n variables (o incógnitas) $x_1, \ldots, x_n$ es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{2}$$

Los números reales $a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21} \ldots a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ son los coeficientes *del sistema y $b_1, \ldots, b_m$ son los* términos constantes *del sistema. Si todos los términos constantes son cero el sistema se llama* homogéneo.

Ejemplo 7. *Consideremos el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 + & 2x_2 & & = -3 \\ 2x_1 + & 3x_2 & -2x_3 & = -10 \\ -x_1 + & & +6x_3 & = 9 \end{array} \right. \tag{3}$$

Sus coeficientes son, en orden, $1, 2, 0, 2, 3, -2, -1, 0, 6$. *Los términos constantes son* $-3, -10, 9$. *El* sistema homogéneo *asociado es:*

$$\begin{cases} x_1 + & 2x_2 & & = 0 \\ 2x_1 + & 3x_2 & -2x_3 & = 0 \\ -x_1 + & & +6x_3 & = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Definición 8. *Una* solución *del sistema lineal (??) es una* n*-upla* $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ *tal que cuando reemplazamos los valores de* x_i *por* $\overline{x}_i$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *en (??), todas las ecuaciones se satisfacen. El conjunto de todas las soluciones posibles se llama* conjunto solución*.*

Ejemplo 9. *Verificar que* $x_1 = -15, x_2 = 6$ *y* $x_3 = -1$ *es una solución del sistema (??).*

Definición 10. *Dos sistemas de ecuaciones son* equivalentes *si poseen el mismo conjunto solución.*

Ejemplo 11. *Los siguientes sistemas son equivalentes:*

$$\begin{cases} -x_1 + & & +6x_3 & = 9 \\ x_1 + & 2x_2 & & = -3 \\ 2x_1 + & 3x_2 & -2x_3 & = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + & & +6x_3 & = 9 \\ & 2x_2 & +6x_3 & = 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & -2x_3 & = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + & & +6x_3 & = 9 \\ & 2x_2 & +6x_3 & = 6 \\ & & x_3 & = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & & & = -15 \\ & x_2 & & = 6 \\ & & x_3 & = -1 \end{cases}$$

Como vemos este último sistema es el más sencillo de resolver ya que explícitamente nos dice cuál es la única solución.

En este ejemplo vimos que un sistema puede tener una única solución. Veremos en los ejemplos siguientes que un sistema puede no tener solución o tener infinitas soluciones.

Ejemplo 12. *El sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & = 9 \\ 4x_1 & +6x_2 & = 12 \end{cases}$$

no tiene solución ya que si $2x_1 + 3x_2$ *es 9 entonces* $4x_1 + 6x_2$ *debería ser igual a 18, pero de acuerdo a la segunda ecuación esto no sucede. Por lo tanto no existe solución al mismo. En este caso escribimos que su solución es* $S = \emptyset$.

Ejemplo 13. *El sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & = 5 \\ 6x_1 & +4x_2 & = 10 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones, todas las de la forma $x_1 = \frac{5-2\lambda}{3}$, $x_2 = \lambda$.

Con lo cual el conjunto solución puede ser escrito como $S = \{(\frac{5-2\lambda}{3}, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Definición 14. *Un sistema de ecuaciones que posee solución* $(S \neq \emptyset)$ *se llama* compatible*. Si no posee solución* $(S = \emptyset)$ *se llama* incompatible*.*

Si posee única solución se llama compatible determinado *y si posee infinitas soluciones* compatible indeterminado*.*

Observación 15. *Un sistema homogéneo es siempre compatible ya que* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *es solución y es llamada solución trivial.*

1.2. Solución de un sistema lineal

Los sistemas *triangulares* o *escalonados* son sistemas donde las ecuaciones pueden ordenarse de manera que el renglón superior tenga una o más variables (ubicadas a la izquierda) que el renglón inmediato inferior.

Por ejemplo,

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & +2x_5 & -x_6 & =1 \\ & & -2x_3 & & +2x_5 & & =2 \\ & & & & -x_5 & +x_6 & =3 \end{cases}$$

Este tipo de sistemas es más sencillo de resolver usando el método de *sustitución hacia atrás*. Ilustramos este método con la resolución del sistema anterior.

La última ecuación implica que x_6 es cualquier número, digamos r. Entonces $x_5 = r - 3$. De acuerdo a la segunda ecuación $x_3 = x_5 - 1 = r - 3 - 1 = r - 4$. Al despejar x_1 de la primera ecuación tenemos que $x_1 = 1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6$. Pero x_2 y x_4 pueden tener cualquier valor, por ejemplo $x_4 = s$ y $x_2 = t$. Por consiguiente, $x_1 = 1 + t - (r - 4) + s - 2(r - 3) + r = -2r + s + t + 11$. Entonces el conjunto solución es

$$S = \{x_1 = -2r + s + t + 11, x_2 = t, x_3 = r - 4, x_4 = s, x_5 = r - 3, x_6 = r, \quad \text{para } r, s, t \in \mathbb{R}\}$$

es decir, un conjunto infinito con *tres parámetros*.

Como vemos, es más sencillo resolver un sistema escalonado por lo tanto, dado un sistema cualquiera lo transformaremos en un sistema equivalente al mismo eliminado incógnitas hasta obtener un sistema escalonado, para luego resolverlo por sustitución hacia atrás.

En lo que sigue veremos algunas operaciones que nos permiten obtener un sistema equivalente al original.

Definición 16. *Las* operaciones elementales en ecuaciones *de un sistema lineal consisten en:*

- ***Eliminación**: reemplazar una ecuación por ésta más un múltiplo constante de una ecuación a otra.* $E_i + cE_j \to E_i$ *donde* E_i *y* E_j *son ecuaciones y* c *es una constante.*
- ***Escalamiento**: reemplazar una ecuación por el producto de ella por una constante distinto de cero.* $cE_i \to E_i$ *donde* E_i *es una ecuación y* $c \neq 0$.
- ***Intercambio**: reemplazar una ecuación por otra.* $E_i \leftrightarrow E_j$ *donde* E_i *y* E_j *son ecuaciones.*

Es claro que si un conjunto de variables satisface un sistema de ecuaciones también lo hace de un sistema obtenido a partir de él, por medio de un número finito de operaciones elementales entre sus ecuaciones.

Ejemplo 17. *Consideremos nuevamente el sistema*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & & =-3 \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & =-10 \\ -x_1 & & +6x_3 & =9 \end{cases}$$

Llamamos E_1*,* E_2 *y* E_3 *a las ecuaciones del sistema. Luego de hacer:* $E_2 - 2E_1 \to E_2$ *y* $E_3 + E_1 \to E_3$ *obtenemos el sistema equivalente:*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & & =-3 \\ & -x_2 & -2x_3 & =-4 \\ & 2x_2 & +6x_3 & =6 \end{cases}$$

Renombramos las ecuaciones y ahora sobre este sistema hacemos $E_3 + 2E_2 \to E_3$ *y obtenemos el sistema equivalente, el cual está en forma escalonada:*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & & = -3 \\ & -x_2 & -2x_3 & = -4 \\ & & 2x_3 & = -2 \end{cases}$$

Utilizando el método de sustitución hacia arriba tenemos la solución de este sistema.

Ejemplo 18. *Consideramos el sistema*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 4 \\ 2x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 9 \\ x_1 & +4x_2 & +7x_3 & = 6 \end{cases} \tag{5}$$

Aplicando las operaciones elementales $2E_1 - E_3 \to E_1$, $2E_1 - E_2 \to E_2$ y $E_1 - E_3 \to E_3$ obtenemos

$$\begin{cases} x_1 & & -9x_3 & = 2 \\ & -x_2 & -4x_3 & = -1 \\ & -2x_2 & -8x_3 & = -2 \end{cases}$$

Luego, este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 & & -9x_3 & = 2 \\ & -x_2 & -4x_3 & = -1 \end{cases}$$

ya que la operación $2E_2 - E_3 \to E_3$ llevó a una ecuación con todos sus coeficientes iguales a 0.

Entonces el conjunto solución de cualquiera *de ellos es*

$$S = \{x_1 = 9r + 2, x_2 = -4r + 1, x_3 = r \quad para\ r \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 19. *Consideramos el sistema*

$$\begin{cases} & x_2 & -2x_3 & = -5 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = -2 \\ 4x_1 & -x_2 & & = -4 \end{cases}$$

Aplicando las operaciones elementales (completar) obtenemos

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = -2 \\ & x_2 & -2x_3 & = -5 \\ & & 0x_3 & = 5 \end{cases}$$

Entonces el conjunto solución es

$$S = \emptyset$$

ya que ninguna solución puede hacer cierta la última ecuación.

Como vimos en los ejemplos, el conjunto solución puede ser distinto de vacío (sistema compatible) o no (sistema incompatible). En caso de ser no vacío, puede tener una o más soluciones (compatible determinado o compatible indeterminado).

Como vimos, una vez fijado el orden y los nombres de las incógnitas de un sistema, podemos abreviar la escritura del sistema anotando sólo sus coeficientes y términos constantes. El arreglo rectangular de los coeficientes y términos constantes de un sistema es su *matriz aumentada*. La matriz aumentada del sistema (**??**) del Ejemplo **??** es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & : & 4 \\ 2 & 5 & 2 & : & 9 \\ 1 & 4 & 7 & : & 6 \end{pmatrix}$$

La segunda forma implica el uso de un separador para indicar dónde está la columna de los términos constantes. En general, una *matriz* es un arreglo rectangular de números. La *matriz de coeficientes* del sistema está formada por los coeficientes del sistema sin los términos constantes. La matriz de una columna que muestra los términos constantes es el *vector de constantes*. La matriz de coeficientes y el vector de constantes del sistema (**??**) son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Método de eliminación de Gauss

2.1. Definiciones preliminares

Los números ubicados en forma de matriz se denominan *elementos* o *entradas* de la matriz. Una matriz con m renglones o filas y n columnas se dice de *tamaño* $m \times n$. Los elementos se denominan de acuerdo a la posición en la matriz. Un elemento ubicado en la tercera fila y segunda columna será indicado como en la posición $(3, 2)$.

Las operaciones elementales sobre los sistemas de la sección anterior se traducen en operaciones elementales sobre los renglones de la matriz.

Una fila o columna de una matriz es *nula* cuando todos sus elementos son iguales a cero. El primer elemento no nulo de una fila no nula se llama *elemento delantero*.

Ejemplo 20. *Sean las matrices*

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En la matriz M sus dos primeras filas son no nulas y la tercera es nula. Sus elementos delanteros son -1 y -3. Su segunda columna es nula y las demás son no nulas. En la matriz P ninguna de sus filas es nula y su primera columna si lo es. Sus elementos delanteros son 2 y -1.

Definición 21. *Si una matriz verifica que:*

- *Todas las filas nulas están ubicadas en la parte inferior de la matriz.*
- *El elemento delantero de cada fila no nula se presenta a la derecha del elemento delantero de la fila anterior.*

entonces decimos que la matriz está en forma escalonada. *Si además,*

- *El elemento delantero de cada fila no nula es 1.*
- *Todos los elementos en la columna de un elemento delantero 1 (arriba y abajo de él) son cero.*

entonces la matriz está en forma escalonada reducida.

La matriz M está en forma escalonada pero no en forma reducida porque la tercera condición no se satisface.

Ejemplo 22. *Consideremos las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices escalonadas: A,B, D, F y G.
Matrices escalonadas reducidas: A, B, D y F. G no cumple con la cuarta condición.
La matriz E no está en forma escalonada porque no cumple la primera condición.

Definición 23. *Dos matrices son* equivalentes *si una puede obtenerse de la otra por una sucesión finita de operaciones elementales entre sus filas.*

Ejemplo 24. *Demostrar que las siguientes matrices son equivalentes.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces decimos que A se reduce *a la forma escalonada B.*

2.2. Procedimiento de eliminación de Gauss

Para convertir cualquier matriz a la forma escalonada reducida:

1. Tomar la primera columna no nula de la matriz.
2. Si la primera fila de esta columna tiene un cero, intercambiar esta fila con una que no posea un cero en esta posición.
3. Obtener ceros por debajo del elemento delantero, sumando múltiplos adecuados de la primera fila.
4. Repetir los pasos anteriores a la matriz obtenida al no considerar la primera fila. Repetir este procedimiento con el resto de las filas (la matriz quedará en forma escalonada).
5. Comenzando con la última fila no nula, ir hacia arriba, mediante operaciones elementales construyendo, en primer lugar, un elemento delantero 1 y luego anulando los elementos arriba de él.

Ejemplo 25. *Utilizaremos el método de Eliminación de Gauss sobre la matriz:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 & -21 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

1. *En este caso, la primera columna no nula es la columna 1.*
2. *Como el primer elemento de esta columna es 0, intercambiamos la fila 1 con la 2, para obtener:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 4 & -9 & 34 & 0 & 1 & -21 \\ 2 & -6 & 20 & 2 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

3. *Para obtener ceros debajo de este elemento hacemos las siguientes operaciones elementales sobre las filas F_i:*

   $F_3 + 4F_1 \to F_3$ *y* $F_4 + 2F_1 \to F_4$. *Así obtenemos la matriz:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & -16 & -15 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

4. *Al cubrir la primera fila, hacemos el mismo procedimiento sobre la matriz restante:*

   $F_3 - F_2 \to F_3$ *para obtener* $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

   y luego $F_4 - \frac{1}{2}F_3 \to F_4$ *para obtener* $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -10 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

   Como vemos, la matriz ya está en forma escalonada.

5. *Para obtener la matriz en forma escalonada reducida, hacemos:*

   - $\frac{1}{6}F_4 \to F_4$
   - *Sobre la matriz resultante hacemos:* $F_3 + 12F_4 \to F_3$, $F_2 + 3F_4 \to F_2$ *y* $F_1 + 4F_4 \to F_1$.
   - *Sobre la matriz resultante hacemos:* $\frac{-1}{12}F_3 \to F_3$.
   - *Sobre la matriz resultante hacemos:* $F_2 + 4F_3 \to F_2$ *y* $F_1 + 4F_3 \to F_1$.
   - *Sobre la matriz resultante hacemos:* $\frac{1}{3}F_2 \to F_2$.
   - *Sobre la matriz resultante hacemos:* $F_1 - 3F_2 \to F_1$.
   - *Finalmente, sobre la matriz resultante hacemos:* $(-1)F_1 \to F_1$, *con lo cual obtenemos la matriz en la forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3. Resolución de sistemas de ecuaciones

Veamos ahora cómo utilizar el algoritmo de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones.

- Considerar la matriz aumentada del sistema de ecuaciones que se quiere resolver.
- Aplicar el método de eliminación de Gauss a la matriz ampliada. Recordar que si hubo intercambio de columnas debe respetarse cuál es la nueva posición de la variable correspondiente a esa columna.
- Separar las variables que acompañan a los elementos delanteros (llamadas variables *delanteras*) de las restantes (si las hay) que se llaman *libres*.
- Expresar a las variables delanteras en función de las libres y de las constantes.

Ejemplo 26. *Podemos resolver el sistema con matriz de coeficientes ampliada del ejemplo anterior utilizando sustitución hacia atrás.*

Hallar el conjunto solución S. Verificar que existen infinitas soluciones.

Teorema 27. *Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si cualquier forma escalonada de la matriz aumentada NO tiene una fila de la forma:*

$$[\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \ : \ c\ ]$$

en la que $c \neq 0$.

Teorema 28. *Un sistema de ecuaciones lineales compatible tiene única solución (determinado) si y sólo si no posee variables libres.*

Observación 29. *Atención, la presencia de variables libres no garantiza que haya una cantidad infinita de soluciones porque el sistema puede ser incompatible.*

Teorema 30. *Para cualquier sistema lineal, sólo es válida una de las siguientes opciones:*

1. *El sistema tiene única solución.*
2. *El sistema posee infinitas soluciones.*
3. *El sistema no tiene solución.*

Los sistemas homogéneos tienen la particularidad de poseer siempre a la solución con todas sus variables iguales a cero. Por lo tanto son sistemas compatibles, cualquiera sea su matriz de coeficientes. Más aún,

Teorema 31. *Un sistema lineal homogéneo tiene:*

1. *sólo la solución trivial o un número infinito de soluciones;*
2. *tiene infinitas soluciones si y sólo si tiene variables libres;*
3. *si hay más variables que ecuaciones entonces tiene infinitas soluciones.*

Ejemplo 32. *Determinar los valores de K para que el sistema sea compatible indeterminado, compatible determinado o incompatible.*

$$\begin{cases} x & +y & +Kz & = 1 \\ Kx & +(K-1)y & +z & = K \\ x & +y & +z & = K+1 \end{cases}$$

Verificar que la matriz ampliada de este sistema puede llevarse a la forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & K & 1 \\ 0 & -1 & 1-K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-K & K \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $K = 1$ el sistema es incompatible.

Si $K \neq 1$, entonces hay única solución:

$$z = \tfrac{K}{1-K}; \quad y = K^2 + K; \quad x = \tfrac{K^3 - K^2 - 2K + 1}{1-K}.$$

Por lo tanto si $K \neq 1$ el sistema es compatible determinado y para ningún valor de K el sistema es compatible indeterminado.

3. Matrices

3.1. Definiciones preliminares

Recordemos que una *matriz* de orden $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m.n$ números en forma de m filas y n columnas. La matriz A tiene al elemento a_{ij} en la fila i y la columna j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La i-ésima fila de la matriz A y la j-ésima columna de A son, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Una matriz de $1 \times n$ se llama *matriz fila*. Una matriz de $m \times 1$ se llama *matriz columna*. Una matriz de $n \times n$ se llama *matriz cuadrada* de orden n.

Ejemplo 33.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vemos que A es una matriz fila, B es una matriz columna y C es una matriz cuadrada de orden 2.

Una matriz en la cual *todos* sus elementos son iguales a cero, es una *matriz nula*. Por ejemplo, la matriz nula de orden 3×4 es

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 34. *Dada una matriz cuadrada A de oden n cuyos elementos son a_{ij} se notará como $A = (a_{ij})_n$. La* diagonal principal *de A está formada por los elementos a_{ii} para $i = 1, \dots, n$.*

La matriz A es triangular inferior *si todos los elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero. Análogamente, la matriz A es* triangular superior *si los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.*

La matriz A es diagonal *si todos los elementos por encima y por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.*

La matriz A es escalar *si es diagonal y todos los elementos en la diagonal principal son iguales.*

La matriz escalar con 1 en la diagonal se llama matriz identidad *y será notada I_n o simplemente, I, si no es necesario explicitar su tamaño.*

Ejemplo 35. *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces las matrices A, C y D son triangulares superiores, B, C y D son triangulares inferiores. C y D son diagonales. D es escalar. La diagonal principal de A es $1, 5, 9$ mientras que la de C es $1, -2, 2$.

Definición 36. *Dos matrices son* iguales *si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales. Es decir,* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *y* $B = (b_{rs})_{m\times n}$ *son iguales (y escribimos* $A = B$*) si* $a_{pq} = b_{pq}$ *para todo* $p = 1, \dots, m$ *y* $q = 1, \dots, n$.

3.2. Operaciones matriciales

Definición 37. *Dadas dos matrices* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *y* $B = (b_{ij})_{m\times n}$*, definimos:*

- *la matriz* $A + B$*, de orden* $m \times n$ *cuyos elementos* c_{ij} *verifican:* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *para todo* $i = 1, \dots, m$ *y* $j = 1, \dots, n$.
- *dado* $\alpha \in \mathbb{R}$*, la matriz* αA*, de orden* $m \times n$ *cuyos elementos* d_{ij} *verifican:* $d_{ij} = \alpha a_{ij}$ *para todo* $i = 1, \dots, m$ *y* $j = 1, \dots, n$.

Notemos que al tener definidas estas operaciones también queda definida la resta de matrices.

Teorema 38. *Sean A,B y C matrices* $m \times n$ *cualesquiera y* a, b *y* c *escalares (en* $\mathbb{R}$ *o en* $\mathbb{C}$*). Entonces:*

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + B = B + A$
3. $A + \mathbf{0} = A$
4. $A + (-A) = \mathbf{0}$
5. $c(A + B) = cA + cB$
6. $(a + b)C = aC + bC$
7. $(ab)C = a(bC) = b(aC)$
8. $1A = A$
9. $0A = \mathbf{0}$

Demostración. Ejercicio. □

Definición 39. *Dadas las matrices* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *y* $B = (b_{rs})_{n\times p}$*, definimos la matriz* producto de A por B *y la notamos* $A.B$ *o simplemente* AB*, a la matriz de orden* $m \times p$ *cuyos elementos* c_{ij} *verifican*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Observación 40.

- *Observar que para poder definir el producto* AB *el número de columnas de* A *debe ser igual al número de filas de* B.
- *El número de filas de* AB *coincide con el número de filas de* A.
- *El número de columnas de* AB *coincide con el número de columnas de* B.
- c_{ij} *es el resultado del producto escalar del vector fila* i *de* A *por el vector columna* j *de* B.
- *Esta no es una* operación *en el sentido de que hay 3 conjuntos de matrices diferentes en juego, salvo en el caso de matrices cuadradas.*

Ejemplo 41. *Sean las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 21 & -2 \\ -8 & 14 & 21 & -18 \end{pmatrix}.$$

Notemos que BA no existe.

Ejemplo 42. *Sean las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo muestra que $AB \neq BA$, es decir que el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa.

La siguiente definición alternativa de producto de matrices nos permite trabajar con los vectores fila y columna de las matrices.

Definición 43. *Si A es una matriz de $m \times k$ y B es una matriz de $k \times n$. El* producto AB *es la matriz de $m \times n$ cuyas columnas son $A\mathbf{b}^1, \ldots, A\mathbf{b}^n$ en la que $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n$ son las columnas de B.*

En general, si A es una matriz de $m \times k$, vamos a notar con $\mathbf{a}_i$ a las filas de A y con $\mathbf{a}^j$ a los vectores columna de A, para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, k$.

Observación 44. *Teniendo en cuenta esta definición de producto entre matrices, el elemento ij de la matriz AB es $\mathbf{a}_i\mathbf{b}^j$.*

Ejemplo 45. *Supongamos que*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$AB = \begin{pmatrix} A\mathbf{b}^1 & A\mathbf{b}^2 & A\mathbf{b}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 6 \\ 4 & 14 & 9 \end{pmatrix}$$

Definición 46. *Dada una matriz* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *su* matriz transpuesta *es la matriz* $A^t = (a'_{ij})_{n\times m}$ *tal que* $a'_{ij} = a_{ji}$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *y* $j = 1, \ldots, m$.

Por lo tanto, si $\mathbf{a}_i$ es la i-ésima fila de la matriz A de $n \times m$, $\mathbf{a}_i^t$ es la matriz $n \times 1$ con los mismos elementos que $\mathbf{a}_i$, es decir, es un vector columna.

Teorema 47. *Sean A, B y C matrices tales que todas las operaciones siguientes esten bien definidas, entonces:*

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $\alpha(BC) = (\alpha B)C = B(\alpha C)$ *para* α *escalar*
5. $I_m A = AI_n = A$ *si* A *matriz de orden* $m \times n$
6. $\mathbf{0}A = \mathbf{0}$

Demostración. Demostraremos la asociatividad y las demás demostraciones quedan como ejercicio.

Sean A de orden $m \times k$ y B de orden $k \times r$.

Consideremos primero el caso en que C es una matriz formada por una sola columna, es decir, $C = \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_r)^t$. Entonces,

$$(AB)\mathbf{v} = (A\mathbf{b}^1, \ldots, A\mathbf{b}^r)\mathbf{v} = v_1(A\mathbf{b}^1) + \cdots + v_r(A\mathbf{b}^r) = A(v_1\mathbf{b}^1 + \cdots + v_r\mathbf{b}^r) = A(B\mathbf{v}). \qquad (6)$$

Si ahora C tiene n columnas, de acuerdo a (**??**),

$$(AB)C = ((AB)\mathbf{c}^1, \ldots, (AB)\mathbf{c}^n) = (A(B\mathbf{c}^1), \ldots, A(B\mathbf{c}^n)) = A(B\mathbf{c}^1, \ldots, B\mathbf{c}^n) = A(BC).$$

□

Definición 48. *Sea A una matriz cuadrada. Entonces, la n-ésima potencia de A se define, recursivamente, como*

$$A^0 = I, \qquad A^n = A^{n-1}A \quad \textit{para } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 49. *Para cualquier* $m, n \in \mathbb{N}$,

$$A^n A^m = A^{n+m} \qquad (A^n)^m = A^{nm} \qquad (\alpha A)^n = \alpha^n A^n.$$

Demostración. La demostración es por inducción y se deja como ejercicio. □

Observación 50. *Vemos que hay similitudes entre las propiedades que verifica el producto de matrices con el producto de números enteros. Sin embargo hay importantes diferencias que queremos resaltar. Sean A y B matrices de dimensiones apropiadas.*

1. *Si AB está definida no necesariamente lo está BA (por ejemplo si A es de* 2×3 *y B de* 3×3*).*
2. *Si AB y BA están definidas no necesariamente tienen el mismo tamaño (por ejemplo si A es de* 2×3 *y B de* 3×2*).*
3. *Si AB y BA están definidas y tienen el mismo tamaño no necesariamente son iguales. Por ejemplo si:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $AB = \mathbf{0}$ *no implica* $A = \mathbf{0}$ *o* $B = \mathbf{0}$*, ni siquiera cuando* $A = B$*. Por ejemplo,* $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $CA = CB$ no implica que $A = B$. Buscar un ejemplo de esta afirmación.

6. $A^2 = I$ no implica que $A = \pm I$. Buscar un ejemplo de esta afirmación.

7. En general, $(AB)^n \neq A^n B^n$. Buscar un ejemplo de esta afirmación.

Definición 51. *Dada una matriz A una submatriz de A es cualquier matriz que se obtenga al suprimir una o más filas o columnas de A.*

Ejemplo 52. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

son submatrices de ella:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

3.3. Matriz inversa

Definición 53. *Se dice que la matriz A de $n \times n$ es* inversible *o* admite inversa *si existe una matriz B, llamada* inversa *de A, tal que*

$$AB = I \qquad BA = I.$$

A partir de esta propiedad, B debe ser de orden $n \times n$.

Ejemplo 54. *Veamos si la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

admite inversa.

Supongamos que

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

fuera inversa de A. Entonces, como $AB = I$ resulta

$$\begin{cases} a + c &= 1 \\ b + d &= 0 \\ a &= 0 \\ b &= 1 \end{cases}$$

Como se puede verificar (hacerlo!) que $BA = I$ si

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces, A admite inversa y que B es inversa de A.

Lema 55. *Si una matriz A es inversible entonces posee una única matriz inversa.*

Demostración. Supongamos que B y C son inversas de A. Entonces,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

∎

Una matriz que no tiene inversa se llama *no inversible* o *singular*.
Como una matriz A inversible tiene única inversa, notamos A^{-1} a la inversa de A.

Lema 56. *Propiedades de la inversa de una matriz:*

1. *Si A y B son matrices inversibles de orden n entonces AB son inversibles y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

2. *La inversa de una matriz inversible es inversible y además, $(A^{-1})^{-1} = A$.*

3. *El producto de una matriz inversible por un escalar distinto de cero es una matriz inversibles y además, $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$ para $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Demostración. 1. Vamos a verificar que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Tenemos que:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

y

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

2. Como A es inversible, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Esto muestra que A^{-1} también lo es y que $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. Ejercicio

□

Definición 57. *Si A es una matriz inversible entonces definimos $A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{n \text{ factores}}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 58. *Si A es una matriz cuadrada de orden k, m y n son dos números enteros* cualesquiera *y $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces, A^n es inversible y:*

1. *$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$*

2. *$A^nA^m = A^{n+m}$*

3. *$(A^n)^m = A^{nm}$*

4. *$(cA)^n = c^nA^n$*

Demostración. Ejercicio. Demostrar sólo para n, m negativos. □

3.4. Transposición y operaciones con matrices

Recordemos que si A es una matriz de orden $m \times n$ su transpuesta es la matriz de orden $n \times m$ cuyas i-ésima columna es la i-ésima fila de A.

Teorema 59. *Valen las siguientes propiedades:*

1. *$(A^t)^t = A$.*

2. *$(A + B)^t = A^t + B^t$.*

3. *$(cA)^t = cA^t$ para cualquier $c \in \mathbb{C}$.*

4. *$(AB)^t = B^tA^t$.*

5. *Si A es inversible también lo es A^t. En este caso, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Demostración. Idea de la demostración del item *4.*. Las demás se dejan como ejercicio.

Consideremos en primer lugar el caso especial en que A es una matriz de $1 \times n$ y B de orden $n \times 1$.

$$AB = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n + b_n = (b_1 \dots b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

De esta forma vemos que $(AB)^t = B^t A^t$ para este caso especial.

Si ahora A es una matriz de orden $m \times n$ y B es un vector columna de tamaño n. El caso general se bas en este caso y queda como ejercicio.

$$\begin{aligned} \text{La } j\text{-ésima columna de } (AB)^t &= (j- \text{ ésima fila de } AB)^t \\ &= (\text{la } j- \text{ ésima fila de } A \text{ por } B)^t \\ &= B^t \text{ por la } j- \text{ ésima columna de } A^t \\ &= \text{ la } j- \text{ ésima columna de } B^t A^t. \end{aligned}$$

□

Definición 60. *Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ es tal que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$ entonces decimos que A es* simétrica.

Si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ es tal que $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ con $i \neq j$ entonces decimos que A es antisimétrica.

Usualmente notaremos con $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ al conjunto de las matrices de orden $m \times n$ a coeficientes reales. Análogamente, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de las matrices cuadradas de orden n a coeficientes reales.

Teorema 61. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entonces:*

1. *A es simétrica $\Leftrightarrow A = A^t$.*

2. *A es antisimétrica $\Leftrightarrow -A = A^t$.*

3. *A puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.*

Demostración. 1. Sean $A = (a_{ij})$ y $A^t = (a'_{ij})$

$$A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a'_{ij} \forall i, j = 1, \dots, n \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1, \dots, n \Leftrightarrow A \text{ es simétrica}$$

2. Ejercicio.

3. Conisderemos las matrices $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^t)$ y $A_2 = \frac{1}{2}(A - A^t)$. Veamos que A_1 es simétrica:

$$A_1^t = (\frac{1}{2}(A + A^t))^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = A_1.$$

   Verificar que A_2 es antisimétrica. Como además, $A = A_1 + A_2$ el resultado está probado.

□

4. Determinantes

En esta sección definimos una función definida sobre el conjunto de todas las matrices cuadradas con imagen en el conjunto de los números reales, llamada *función determinante*.

Dada una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, denotamos con A_{pq} a la submatriz de A que se obtiene al suprimir la fila p y la columna q. De esta forma, A_{pq} es de orden $(m-1)\times(n-1)$.

Definición 62. *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, para $n \in \mathbb{N}$ definimos el* determinante de A, *y lo notamos con $|A|$ o $\det(A)$, al siguiente número real: (definición recursiva)*

1. *Si $n = 1$ y $A = (a)$ entonces $\det(A) = a$.*
2. *Si $n \geq 2$ y $A = (a_{ij})_n$ entonces*

$$\det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}|A_{1k}|.$$

A partir de la definición vemos que el determinante de una matriz de orden n se calcula a partir de n determinantes de matrices de orden $n-1$.

Ejemplo 63. *Si $n = 2$,*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y entonces $\det(A) = a(-1)^{1+1}|(d)| + b(-1)^{1+2}|(c)| = ad - bc$.

Ejemplo 64. *Si $n = 3$,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}|A_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|A_{12}| + a_{13}(-1)^{1+3}|A_{13}| \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}) + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}) - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Esta última expresión se obtiene a partir de la regla de Sarrus:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Definición 65. *Dada la matriz $A = (a_{ij})_n$, se llama* menor ij *y se lo nota con M_{ij} al determinante de la submatriz A_{ij}.*

De esta forma, $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}$.

Definición 66. *Dada la matriz $A = (a_{ij})_n$, se llama* cofactor del elemento ij *y se lo nota con C_{ij}, al número $(-1)^{i+j}M_{ij}$.*

De esta forma, $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{1k}$.

El siguiente resultado provee definiciones equivalentes del determinante de una matriz.

La definición que presentamos anteriormente corresponde al desarrollo del determinante por la *primera fila de A*.

Teorema 67. *Dada la matriz $A = (a_{ij})_n$,*

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}$$

para cualquier $i = 1, \ldots, m$, y entonces decimos que se ha desarrollado el determinante por la fila i.

O bien,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$$

para cualquier $j = 1, \ldots, n$, y entonces decimos que se ha desarrollado el determinante por la columna j.

Demostración. No la hacemos. $\square$

Teorema 68. *Dadas las matrices cuadradas A, B y C de orden n, valen las siguientes propiedades:*

1. $\det(A) = \det(A^t)$.
2. *Si B se obtiene de A multiplicando una fila (o columna) por una constante k distinta de cero, entonces* $\det(B) = k \det(A)$.
3. *Si B se obtiene de A intercambiando dos filas (o columnas) entonces* $\det(B) = -\det(A)$.
4. *Si A tiene dos filas (o columnas) iguales entonces* $\det(A) = 0$.
5. *Si A tiene dos filas (o columnas) proporcionales entonces* $\det(A) = 0$.
6. *Si en la matriz A los elementos de la i-ésima fila son de la forma $a_i = b_i + c_i$ entonces* $\det(A) = \det(B) + \det(C)$, *donde las matrices B se obtuvieron de A reemplazando, respectivamente, la i-ésima fila a_i por b_i y c_i. Análogamente vale para columnas.*
7. *Si B se obtiene de A sumando un múltiplo de una fila (o columna) a otra fila (o columna) entonces* $\det(B) = \det(A)$.
8. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demostración. 1. La demostración es por inducción en el orden de la matriz. Para $n = 1$ el resultado es obvio ya que $A = A^t$. Supongamos que el determinante de cualquier matriz de orden $n-1$ coincide con el de su transpuesta y probemos el resultado para matrices de orden n. Sea A una de ellas y desarrollemos su determinante por la fila i,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Si notamos con a'_{ij} a los elementos de A^t y desarrollamos su determinante por la columna i tenemos que

$$\det(A^t) = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki} (-1)^{k+i} M'_{ki}$$

siendo M'_{ik} el determinante de la submatriz de A^t que se obtiene al suprimir la fila i y la columna k de A^t. Por hipótesis inductiva, este determinante coincide coincide con el de su transpuesta, es decir, $M_{ik} = M'_{ki}$.

Como además, $a'_{ki} = a_{ik}$ resulta $\det(A) = \det(A^t)$.

2. Supongamos que $b_i = ka_i$. Desarrollando el determinante de B por la fila i obtenemos:

$$det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} ka_{ij}C_{ij} = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = k\det(A)$$

   donde la última igualdad es cierta ya que los únicos elementos en que difieren A y B son los de la fila i, los cuales se suprimen para el cálculo de los cofactores.

3. La demostración es por inducción en el orden de la matriz.

   Para $n = 2$ tenemos que

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = -\det(B).$$

   Supongamos ahora que el resultado es cierto para matrices de orden $n-1$ y sea A una matriz de orden n y B la matriz que se obtuvo de A intercambiando las filas r y s.

   Desarrollemos el determinante de B por una fila i distinta de r y s. Como B_{ik} es la submatriz de B que se obtiene al suprimir la fila i y la comumna k, por hipótesis inductiva $\det(B_{ik}) = -\det(A_{ik})$ ya que estas dos matrices verifican que sus filas r y s han sido intercambiadas, para toda columna k. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\det(B) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(-1)^{i+k}\det(B_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(-1)^{i+k}(-\det(A_{ik})) = -\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}\det(A_{ik}) \\ = -\det(A).\end{aligned}$$

4. Supongamos que A tiene dos filas iguales entonces al intercambiar estas dos filas la matriz obtenida es nuevamente A. Con lo cual tenemos que $\det(A) = -\det(A)$ y entonces $\det(A) = 0$.

5. Supongamos que $\mathbf{a}_i = k\mathbf{a}_j$, es decir, las filas i y j (con $i \neq j$) son proporcionales con constante de proporcionalidad k. Sea B la matriz que se obtiene al dividir la fila j de A por la constante k. De esta forma, B tiene dos filas iguales y por la propiedad anterior, $\det(B) = 0$. Por otro lado, $\det(A) = k\det(B)$ y entonces $\det(A) = 0$.

6. Supongamos que la fila i de B se obtuvo sumando el múltiplo k de la fila j de A, para $i \neq j$ y $k \neq 0$, entonces $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + k\mathbf{a}_j$.

   Si C es la matriz de orden n cuyas filas coinciden con las de A, excepto por la fila i, la cual definimos igual a $k\mathbf{a}_j$, resulta que $B = A + C$. Como C tiene dos filas proporcionales, $\det(C) = 0$ y por la propiedad ccccc, resulta que $\det(B) = \det(A) + \det(C) = \det(A)$.

7. Si en la matriz A los elementos de la i-ésima fila son de la forma $a_i = b_i + c_i$ entonces $\det(A) = \det(B) + \det(C)$, donde las matrices B se obtuvieron de A reemplazando, respectivamente, la i-ésima fila a_i por b_i y c_i. Análogamente vale para columnas.

8. No hacemos la demostración de $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

□

Teorema 69. *Valen las siguientes proposiciones:*

1. *Si todos los elementos de una fila o columna de A son cero, entonces* $\det(A) = 0$.

2. *Si una de las filas (o columnas) de A es combinación lineal de las restantes entonces* $\det(A) = 0$.

3. *Si a una fila de A se le suma una combinación lineal de filas o columnas de las restantes, entonces la nueva matriz así obtenida, B, verifica* $\det(A) = \det(B)$.

Demostración. 1. Basta desarrollar el determinante de A por una fila (o columna) nula.

2. Supongamos que $\mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \mathbf{a}_i$. Sea B_i la matriz que se obtiene de A al reemplazar la fila n por la fila $\mathbf{a}_i$. Por el teorema anterior, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \det(B_i)$ pero cada matriz B_i tiene dos filas iguales, y entonces $\det(B_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Tenemos así que $\det(A) = 0$.

3. Supongamos que $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{a}_j$. Llamemos C a la matriz que se obtiene al reemplazar la fila i de B por $\sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{a}_j$. Entonces, por el teorema anterior, $\det(B) = \det(A) + \det(C)$. Por otro lado, usando el resultado en el item anterior, $\det(C) = 0$ y entonces, $\det(A) = \det(B)$.

$\square$

Lema 70. *Dada una matriz $A = (a_{ij})_n$ y C_{ik} el cofactor de a_{ik} para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} \det(A) & si \quad i = k, \\ 0 & si\ no. \end{cases}$$

Demostración. Si $i = k$ entonces $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$ es el desarrollo del determinante de A por la fila k.

Si $i \neq k$ entonces $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{kj}$ es el desarrollo del determinante de la matriz que se obtiene de A al reemplazar la fila k de A por su fila i, lo cual resulta en una matriz que tiene dos filas iguales, o sea, con determinante cero. $\square$

5. Inversa de una matriz

Utilizaremos la función determinante para decidir si una matriz (cuadrada) es inversible.

Dada la matriz $A = (a_{ij})_{ij}$, notamos con $Adj(A) = (C_{ij})_{ij}$ la matriz *adjunta* de A, donde C_{ij} es el adjunto o cofactor de a_{ij}, para $i, j = 1, \ldots, n$.

Teorema 71. *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces, A es inversible si y sólo si* $\det(A) \neq 0$. *En ese caso,*

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^T}{\det(A)}$$

y

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Demostración. Supongamos que A es inversible. Entonces, existe A^{-1} que verifica $AA^{-1} = I$. Por propiedad del determinante del producto resulta que $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = 1$, lo cual prueba que $\det(A) \neq 0$ y que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Supongamos ahora que $\det(A) \neq 0$. Entonces está bien definida la matriz $B = \frac{Adj(A)^T}{\det(A)}$. Verificaremos que $B = \left(\frac{C_{ij}}{\det(A)}\right)$ es la inversa de A.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{C_{jk}}{\det(A)} = (\delta_{ij})$$

es decir, $AB = I$.

Análogamente tenemos que $BA = I$ y entonces $B = A^{-1}$. $\square$

Ejemplo 72. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso, $\det(A) = 13 \neq 0$ *y entonces* A *es inversible.*
Además,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 7 & -4 \\ 14 & 10 & -9 & 7 \\ -27 & -23 & 22 & -7 \\ 25 & 16 & -17 & 6 \end{pmatrix}$$

y

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -8 & 14 & -27 & 25 \\ -2 & 10 & -23 & 16 \\ 7 & -9 & 22 & -17 \\ -4 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Referencias

[1] . Nakos, D. Joyner *Álgebra lineal con aplicaciones*. International Thomson Edt.(1999)