Lógica proposicional

Razonamientos

LOGICA - INTRODUCCION

- **OBJETIVO**

Uno de los fundamentales objetivos ha sido el estudio de las DEDUCCIONES, RAZONAMIENTOS O ARGUMENTOS

⇓

LOGICA DEDUCTIVA

LOGICA (del Griego: RAZON, IDEA, PALABRA

Razonamiento

Si continúa la lluvia el río aumentará.

Si el río aumenta entonces el puente será arrastrado.

Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado entonces un solo camino no será suficiente para la ciudad.

O bien un solo camino es suficiente para la ciudad, o los ingenieros han cometido un error.

Por lo tanto los Ingenieros han cometido un error.

ES VALIDO ????

Razonamientos

- P1
- p2
- ...
- Pn

C

PREMISAS

CONCLUSION

EJEMPLO

- Rex es un perro
- Si Rex es un perro entonces tiene cuatro patas /∴ Rex tiene 4 patas.

Justificación de la validez del razonamiento?

Dos maneras diferentes de justificar

- Justificar que la veracidad de las hipótesis implica la veracidad de la conclusión

  (Justificación semántica $\Gamma \models \beta$)

- Dar una prueba matemática, que llegue a la conclusión a partir de las hipótesis, a través de pasos debidamente justificados.

  (Justificación sintáctica $\Gamma \vdash \beta$)

Justificación de la validez del razonamiento

Dos maneras diferentes de justificar

- Justificar que la veracidad de las hipótesis implica la veracidad de la conclusión

Justificación semántica

- Dar una prueba matemática, que llegue a la conclusión a partir de las hipótesis, a través de pasos debidamente justificados.

Justificación sintáctica

Ambas formas de justificar son equivalentes ?

Justificación Semántica

Definición: [Razonamiento válido]

Un razonamiento es válido si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas

$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$: $\quad\quad \Gamma \models C$

sii $\quad \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \Rightarrow C$

sii $\quad \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow C$

- Método del condicional asociado

Justificación Semántica

- Consiste en verificar que la fórmula de PROP que codifica el razonamiento es una tautología

$$\models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \rightarrow C$$

EJEMPLO DE REX

$$\models \{\ ((Rp \rightarrow 4p) \wedge Rp) \rightarrow 4p\ \}$$

Razonamiento- Ejemplos

- Si hay riesgo de lluvia, baja el barómetro. Pero el barómetro no baja. Por lo tanto no hay riesgo de lluvia.

- Si no llueve voy al rio. No voy al río. Por lo tanto llueve.

Razonamiento- Ejemplos

- Todo hombre es mamífero y todo mamífero es vertebrado. Por lo tanto todo hombre es vertebrado.

- Todo número natural es racional y todo número racional es real. Luego, todo número racional es real..

Obviemos la representación de ´todo´…

Razonamiento

Si continúa la lluvia el río aumentará.

Si el río aumenta entonces el puente será arrastrado.

Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado entonces un solo camino no será suficiente para la ciudad.

O bien un solo camino es suficiente para la ciudad, o los ingenieros han cometido un error.

Por lo tanto los Ingenieros han cometido un error.

ES VALIDO ????

Justificación Semántica

- **Ejemplo del Puente**

  1- $C \rightarrow R$

  2- $R \rightarrow P$

  3- $(C \rightarrow P) \rightarrow \neg S$

  4- $S \vee E$ / $\therefore$ E

➢ Se puede probar que es válido, pero para construir su tabla tenemos 32 filas (se pueden usar equivalencias para simplificar la fórmula).

➢ A continuación veremos otro método, que suele ser más operativo (menor complejidad)

Otra Justificación

- Veremos otro método para demostrar la validez de un razonamiento, el cual consiste en construir una ***prueba formal***.
- En estas pruebas, la corrección depende de la forma (sintaxis) y no del significado (semántica).
- A partir de las premisas se llega a la conclusión mediante una sucesión de pasos válidos, construidos por reglas precisas.

Método de la deducción o método demostrativo.

Justificación Sintáctica

Dar una prueba matemática, que:

- llegue a la conclusión a partir de las hipótesis,
- esté constituida de pasos debidamente justificados

p1	
p2	PREMISAS
Pn	
d1	CONCLUSIONES
dr	INTERMEDIAS
C	CONCLUSION

Introducción a la noción de sistema formal

- *formal* situación en la que se emplean símbolos cuyo comportamiento y propiedades están completamente determinados por un conjunto dado de reglas

- En un sistema formal **los símbolos carecen de significado**, y al manejarlos hemos de tener cuidado de no suponer nada de sus propiedades, salvo lo que se especifique en el sistema.

Noción de sistema formal

Para especificar un sistema formal se requiere:

1. Un alfabeto de símbolos.
2. Un conjunto de cadenas finitas de dichos símbolos, llamadas fórmulas bien formadas (fbf). ***(lenguaje formal)***
3. Un conjunto de fórmulas bien formadas, llamadas ***axiomas.***
4. Un conjunto finito de ***«reglas de inferencia o de deducción»***

Ejemplo: El sistema formal L

1. Alfabeto de símbolos {variables proposicionales, $\{\neg, \rightarrow\}$, (,) }
2. Conjunto de fbfs PROP con el conjunto $\{\neg, \rightarrow\}$
3. Tres esquemas de axiomas:

(L1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(L2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(L3) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

4. Regla de inferencia: la regla Modus Ponens (MP), A y $A \rightarrow B$ se deduce B

Noción de sistema formal

Debemos explicar ahora la naturaleza deductiva de cualquier sistema formal

<u>Definición:</u> [prueba o demostración]

Una **prueba o demostración** es una sucesión finita de *fbfs* $A_1,\ldots A_n$ tal que para todo i ($1 \leq i \leq n$), o A_i es un axioma del sistema o se deduce de dos miembros anteriores de la sucesión, digamos A_j y A_k $j,k<i$ como consecuencia directa, aplicando alguna regla de inferencia. En este caso se tiene también, que **A_n es un teorema del sistema ($\vdash A_n$)**

Noción de sistema formal

Observacion:

Una demostración en un sistema parte de los axiomas. Vamos a necesitar también **el concepto más general de deducción a partir de un conjunto dado de fbfs**

⇓

- **formalización de nuestros razonamientos.**

<u>Definición</u>: [deducción a partir de un conjunto de fórmulas]

Sea Γ un conjunto de fbfs del sistema formal (que pueden no ser axiomas o teoremas de L). Una sucesión finita $A_1,\ldots,A_n$ de fbfs es una ***deducción a partir de*** Γ si para todo i ($1 \leq i \leq n$) se verifica alguna de las condiciones siguientes:

(a) **A_i es un axioma del sistema.**

(b) **A_i es miembro de Γ , o**

(c) ***S*****e deduce directamente de dos miembros anteriores de la sucesión mediante una regla de inferencia.**

<u>Definición</u>: [deducción a partir de un conjunto de fórmulas]

El último miembro, A_n de una sucesión finita que sea una deducción a partir de Γ , se dice que es ***deducible o derivable a partir de Γ***, *o* ***que es una conclusión de Γ*** y se nota:

$$\Gamma \vdash \mathbf{A_n}.$$

Justificación Sintáctica

El método de la deducción

Este método se sustenta en la noción de deducción dada para un sistema formal. Aquí utilizaremos el siguiente sistema formal para la lógica proposicional:

- ✓ **Lenguaje formal: PROP**
- ✓ **Reglas de Inferencia y de reemplazo.**

Reglas de Inferencia

- ✓Pertenecen a las especificaciones del Sistema Lógico Formal, o sea al **Metalenguaje**.

- ✓Son reglas sintácticas que **me permiten deducir** a partir de ciertas formas proposicionales, otras formas proposicionales.

- ✓La **prueba** consiste en un encadenamiento de pasos de reglas de inferencia que nos permite llegar a la conclusión.

Reglas de Inferencia

✓1) *Modus ponens* (M.P.): $A \to B, A$ /:. B

✓2) *Modus tollens* (M.T.): $A \to B, \neg B$ /:. $\neg A$

✓3) *Conjunción* (Conj.): A, B /:. $A \wedge B$

✓4) *Simplificación* (Simplif.): $A \wedge B$ /:. A

✓5) *Adición* (Ad.): A /:. $A \vee B$

✓6) *Silogismo disyuntivo* (S.D.): $A \vee B, \neg A$ /:. B

✓*7) Silogismo hipotético* (S.H.): $A \to B, B \to C$ /:. $A \to C$

8) Dilema constructivo (D.C.):

✓$A \to B, C \to D, A \vee C$ /:. $B \vee D$

✓*9) Dilema destructivo* (D.D.):

✓$A \to B, C \to D, \neg B \vee \neg D$ /:. $\neg A \vee \neg C$

10) Remplazo de equivalentes (R.E.):

pueden remplazarse unos por otros los siguientes pares de formas equivalentes: Esta regla se basa en el Teorema visto

Doble negación (D.N.): $\neg\neg$ **A eq A**

Conmutatividad (Conmut.) ($\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$*)*

Asociatividad (Asoc.) ($\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$*)*

Distributividad (Distrib.)

$$\mathbf{A \wedge (B \vee C)\ eq\ (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$$

$$\mathbf{A \vee (B \wedge C)\ eq\ (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

§ De Morgan (De M.):

- $\mathbf{\neg(A \vee B)\ eq\ \neg A \wedge \neg B}$
- $\mathbf{\neg(A \wedge B)\ eq\ \neg A \vee \neg B}$

10) **Remplazo de equivalentes (R.E.):**

Definición del condicional (Def $\rightarrow$):

$$\mathbf{A \rightarrow B \ \ eq\ \neg A \vee B}$$

Trasposición (Trasp.): $A \rightarrow B \text{ eq } \neg B \rightarrow \neg A$

Definición del bicondicional (Def.$\leftrightarrow$)

$$\mathbf{A \leftrightarrow B\ eq\ (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)}$$

$$\mathbf{A \leftrightarrow B\ eq\ (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg\, B)}$$

Exportación (Exp.):

$$\mathbf{(A \wedge B) \rightarrow C\ eq\ A \rightarrow (\, B \rightarrow C)}$$

Idempotencia (ldemp.):

$$\mathbf{A\ eq\ \ A \wedge A}$$

$$\mathbf{A\ eq\ \ \ A \vee A}$$

Razonamiento (ejemplo)

PRUEBA

1- $C \rightarrow R$

2- $R \rightarrow P$

3- $(C \rightarrow P) \rightarrow \neg S$

4- $S \vee E \;/\; \therefore\; E$

		Justificación
5- $C \rightarrow P$	1y2	por S.H.
6- $\neg S$	3y5	por M.P.
7- E	4y6	por S.D.

- **LUEGO EL RAZONAMIENTO ES VALIDO**

Del conjunto de hipótesis Γ se deduce α?

$\Gamma \models \alpha$?

-Tablas de verdad

- equivalencia lógicas

existe un método que siempre responde SI o NO

$\Gamma \vdash \alpha$?

- Prueba formal
- requiere ingenio

Estas dos formas de responder la pregunta inicial son equivalentes?

Teorema de completitud

$\Gamma \models \alpha$

-Tablas de verdad

- equivalencia lógicas

existe un método que siempre responde SI o NO

$\Leftrightarrow$

$\Gamma \vdash \alpha$

- Prueba formal
- requiere ingenio

✓El teorema nos autoriza a combinar ambas técnicas y utilizar equivalencias semánticas y pruebas.
(que es lo que usualmente hacemos en matemáticas)