LOGICA Y ALGORITMOS

Profesores:

Raúl Kantor

Ana Casali

Año 2003

LOGICA Y ALGORITMOS

Módulos

- ✔ Cardinalidad y conjuntos inductivos
- ➢ Lógica: proposicional y de Ver orden
- ✔ Formalismos de cálculo: FR y FL
- ✔ Lenguajes y autómatas

LOGICA

Bibliografía

Lógica Proposicional: **Sintaxis y Semántica -**

A. Casali - 2001 (El Bastón)

Logic and Structure - Dirk Van Dalen (2a. edición)

Springer Verlag. ISBN: 0-201-56514-5

Lógica para Matemáticos - Hamilton Ed Paraninfo

Lógica Simbólica - Manuel Garrido (Cap 1- El Bastón)

Presentación

Lógica - Ing. En Computación - Univ. de la República

http://www.fing.edu.uy/inco/logica

LOGICA - INTRODUCCION

✔ OBJETIVO

Uno de los fundamentales objetivos ha sido el estudio de las DEDUCCIONES, RAZONAMIENTOS O ARGUMENTOS

⇩

LOGICA DEDUCTIVA

LOGICA del Griego: RAZON, IDEA, PALABRA

Razonamiento- Ejemplos

- Si hay riesgo de lluvia, baja el barómetro. Pero el barómetro no baja. Por lo tanto no hay riesgo de lluvia.

- Si no llueve voy al rio. No voy al río. Por lo tanto llueve.

QUE TIENEN EN COMÚN ????

Razonamiento- Ejemplos

- Todo hombre es mamífero y todo mamífero es vertebrado. Por lo tanto todo hombre es vertebrado.

- Todo número natural es racional y todo número racional es real. Luego, todo número racional es real..

QUE TIENEN EN COMÚN ????

Razonamiento-Ejemplo

Si continúa la lluvia el río aumentará.

Si el río aumenta entonces el puente será arrastrado.

Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado entonces un solo camino no será suficiente para la ciudad.

O bien un solo camino es suficiente para la ciudad, o los ingenieros han cometido un error.

Los Ingenieros han cometido un error??? O no???

LOGICA - INTRODUCCION

LOGICA

Teoría formal de las deducciones

LOGICA FORMAL

Matematización de la lógica

LOGICA MATEMATICA O SIMBOLICA

LOGICA - HISTORIA

350 ac Aristóteles y Estoicos	**ANÁLISIS DE DEDUCCIONES**
1700 Liebniz-Kant	**LOGICA SIMBOLICA-**
1800 Boole-Frege	**MATEMATICA**
1950 Gentzen	**DEDUCCION NATURAL**
Gödel-Church	**TEOREMAS DE LIMITACION**
Post-Turing	**TEORIA DE LA COMPUTACION**
Tarski	**SEMANTICAS**

LOGICA - HISTORIA

1950 ➨ **MUCHAS AREAS LOGICAS NUEVAS**

- **Lógicas no-clásica: Modales, multivaluadas, fuzzy (Lukasiewicz – Zadeh)**
- **Teoría de modelos (Tarski)**
- **Teoría de algoritmos (Markov)**
- **Funciones recursivas (Kleene-Rogers)**
- **Lingüística-Lógica (Chomsky)**
- **Lógica e IA (Newell-Simon)**

Motivación

- Validez de las deducciones
- Ver que un programa es correcto = probar un teorema sobre cierto objeto matemático
- Paradigma de Programación lógica
- Representación del Conocimiento (Inteligencia Artificial)

Distintos Sistemas Lógicos:

- **LOGICA PROPOSICIONAL**
- **LOGICA DE PREDICADOS**
- LOGICAS NO-CLASICAS
  - MULTIVALUADAS (Fuzzy Logic)
  - MODALES

OBJETIVO: ESTABLECER LA VALIDEZ DE DISTINTOS RAZONAMIENTOS - OBTENER CONCLUSIONES DE UN CONJUNTO DE FORMULAS

Lógica proposicional

Lógica Proposicional

- LENGUAJE
  - Sintaxis: fbfs
  - Semántica: asignación de valores a las variables

- RAZONAMIENTOS
  - Justificación semántica
  - Justificación sintáctica

Introducción Informal

- **Proposición**: Una oración afirmativa de la cual podemos decir que es **verdadera** o **falsa** (pero no ambas!!)

- Ejemplos de Proposiciones:
  - Ayer llovió en Rosario.
  - El sol gira alrededor de la tierra.
  - 2 . 3 = 3 + 3
  - 3 es primo.
  - El sucesor de 3 es primo.

más proposiciones...

- Si ayer llovió en Rosario, entonces el parque se mojó.
- El sol gira alrededor de la tierra o la tierra gira alrededor del sol.
- $2 . 3 = 6$ y 6 es impar
- 3 no es primo.
- Hay un número natural que es par y es primo.
- Todo entero par mayor que cuatro es la suma de dos números primos.

ejemplos de oraciones que no son proposiciones...

- ¿Ayer llovió en Rosario?
- ¿Por qué es importante saber si el sol gira alrededor de la tierra?
- Parece que no hay primos que sean pares.
- Averigüen si la tierra gira alrededor del sol o si el sol gira alrededor de la tierra.
- $2 . n = n + n$
- $x - y = y - x$

1. Sintaxis de la Lógica Proposicional

1. Sintaxis

Alfabeto PROPOSICIONAL

Σ_{PROP} que consiste de:

i) variables proposicionales $p_0, p_1, p_2, \ldots$

ii) conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

iii) símbolos auxiliares: (,)

Notación : llamaremos **C** al conjunto $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Sintaxis

Fórmulas proposicionales PROP (f.b.f.)

PROP es el conjunto definido inductivamente por :

i) $p_i \in$ PROP para todo $i \in \mathbf{N}$ (fórmulas atómicas - AT)

ii) Si $\alpha \in$ PROP y $\beta \in$ PROP entonces

- $(\alpha \wedge \beta) \in$ PROP
- $(\alpha \vee \beta) \in$ PROP
- $(\alpha \rightarrow \beta) \in$ PROP
- $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in$ PROP

iii) Si $\alpha \in$ PROP entonces $(\neg\alpha) \in$ PROP

PROP (cont.)

- Ejemplos de objetos de PROP:
  - p_1
  - $(p_1 \rightarrow p_3)$
  - $((p_1 \rightarrow p_2) \vee (p_3 \wedge (\neg p_5)))$

  - Pertenece a PROP $(p_1 \rightarrow p_2) \neg p_3$????

Convenciones sintácticas

- Omitimos paréntesis alrededor de la negación
- $\neg$ separa menos que $\wedge$, $\wedge$ separa menos que $\vee$
- $\vee$ separa menos que $\rightarrow$
- $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ separan igual

Secuencia de formación y subfórmula

a. Una secuencia φ_0 , φ_1 ,.... φ_n es una secuencia de formación para φ sii $\varphi_n = \varphi$ y para todo $k \leq n$:

φ_k es atómica o bien

$\varphi_k = (\varphi_i \quad \varphi_J)$ para algún i, j < k o bien,

$\varphi_k = (\neg\varphi_J)$ para algún j < k

b. φ es subfórmula de ψ ssi:

$\varphi = \psi$ o bien

$\psi = (\varphi_1 \quad \varphi_2)$ y φ es subfórmula de φ_1 o de φ_2

$\psi = (\neg\, \varphi_1)$ y φ es subfórmula de φ_1

<u>Observación</u> φ_0 , φ_2 ,.... φ_n es secuencia de formación para φ_n

luego para todo j<n, la secuencia φ_o , φ_ς ,.... φ_j es de formación para φ_j

Principio de Inducción Primitiva para PROP

Sea P una propiedad que cumple

pb) - $P(p_i)$ para todo $i \in$ **N**

pi) - Si $P(\alpha)$ y $P(\beta)$ entonces:

– $P((\alpha \quad \beta))$, donde $\quad \in$ C

– Si $P(\alpha)$ entonces $P((\neg\alpha))$

Entonces, para toda $\alpha \in$ PROP, se cumple $P(\alpha)$

Ejemplo:

Demostrar que para todo $\alpha \in$ PROP $cant_{(}(\alpha) = cant_{)}(\alpha)$

Esquema de Recursión Primitiva para PROP

Para definir $\boldsymbol{f} : \text{PROP} \to \text{B}$ debo considerar

- $\boldsymbol{f}\,(\text{p}_\text{i}) = ...$ (para todo $\text{i} \in \mathbf{N}$)
- $\boldsymbol{f}((\alpha \wedge \beta)) = \ldots\, \boldsymbol{f}\,(\alpha) \ldots \boldsymbol{f}\,(\beta) \ldots$
- $\boldsymbol{f}((\alpha \vee \beta)) = \ldots\, \boldsymbol{f}\,(\alpha) \ldots \boldsymbol{f}\,(\beta) \ldots$
- $\boldsymbol{f}((\alpha \to \beta)) = \ldots\, \boldsymbol{f}\,(\alpha) \ldots \boldsymbol{f}\,(\beta) \ldots$
- $\boldsymbol{f}((\neg\alpha)) = \ldots.\, \boldsymbol{f}\,(\alpha) \ldots.$

Esquema de Recursión Primitiva para PROP

Teorema [**esquema de recursión primitiva para PROP**]

Dadas las siguientes funciones

$H_{at} : AT \rightarrow A$

$H : PROP \times A \times PROP \times A \rightarrow A$ para $\in C$

$H_{\neg} : PROP \times A \rightarrow A$

Existe una única función $\boldsymbol{f} : PROP \rightarrow B$ que satisface:

$$\boldsymbol{f}(\alpha) = H_{at}(\alpha) \quad \text{para } \alpha \in AT$$

$$\boldsymbol{f}((\alpha \quad \beta)) = H \ (\alpha, \boldsymbol{f}(\alpha), \beta, \boldsymbol{f}(\beta))$$

$$\boldsymbol{f}((\neg\alpha)) = H_{\neg}(\alpha, \boldsymbol{f}(\alpha))$$

Ejemplos de funciones recursivas

Dada $\alpha \in$ PROP, queremos obtener el conjunto de sus fórmulas atómicas ***(átomos)***:

at: PROP $\rightarrow$ *Pot* (AT)

– ***at*** $(p_i) = \{p_i\}$

($\in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

– ***at***$((\alpha \quad \beta)) =$ ***at***$(\alpha) \cup$ ***at***(β)

– ***at***$((\neg\alpha)) =$ ***at***(α)

Ejemplos de funciones recursivas

1. long : PROP $\rightarrow$ N **(cantidad de símbolos de la palabra)**
2. Tree : PROP $\rightarrow$ Arbol
3. Rango : PROP $\rightarrow$ N **(profundidad máxima del árbol o profundidad del átomo más interior)**

Sustitución de una fórmula por una variable

_ [_/_] : PROP x PROP x $\{p_0, p_1, \ldots\} \rightarrow$ PROP

$$p_i\,[\varphi\ /\ p_i] = \varphi$$

$$p_j\,[\varphi\ /\ p_i] = p_j \quad \text{si } i \neq j$$

$$(\alpha \quad \beta)\,[\varphi\ /\ p_i] = (\alpha\,[\varphi\ /\ p_i] \quad \beta\,[\varphi\ /\ p_i])$$

$$(\neg\alpha)\,[\varphi\ /\ p_i] = (\neg\ \alpha\,[\varphi\ /\ p_i])$$

Traducción al lenguaje lógico

- Queremos usar ese lenguaje simbólico para representar hechos (del mundo real o ficticio)

TRADUCCION

Traducción al lenguaje lógico

- Las oraciones simples se traducen como letras de proposición (elementos de P)
  - **Ejemplos:**
    - Ayer llovió en Rosario ➔ p_0.
    - El intendente se mojó ➔ p_1.
    - El sol gira alrededor de la tierra ➔ p_2.
    - 2 . 3 = 6 ➔ p_3
    - 6 es impar ➔ p_4.
    - El sucesor de 3 es primo ➔ p_5.

Traducción al lenguaje Lógico

- Las oraciones compuestas se traducen usando los conectivos
  - **Ejemplos:**
    - * Si ayer llovió en Rosario, entonces el intendente se mojó ➔ $(p_0 \rightarrow p_1)$.
    - * 2 . 3 = 6 y 6 es impar ➔ $(p_3 \wedge p_4)$.
    - * 6 no es impar ➔ $(\neg p_4)$.

Traducción al lenguaje Lógico

- Algunas oraciones no tienen una buena traducción a PROP:
  - Hay aves que no vuelan. $\longrightarrow$ p_0
  - Todo entero par mayor que cuatro es la suma de dos números primos. $\longrightarrow$ p_1

2. Semántica de la Lógica Proposicional

2. Semántica de la lógica Proposicional

AT	EXPRESIONES AFIRMATIVAS. EN LENGUAJE NATURAL	VALOR DE VERDAD
p_i	**“La casa de Juan se está incendiando”**	**V**

2. Semántica de la lógica Proposicional

El significado de una proposición está dado por su valor de verdad (V o F) que se obtiene de la siguiente forma:

- ✓ A las variables proposicionales se les asigna un valor de verdad (V o F)
- ✓ Estos valores de extienden a las proposiciones no atómicas de acuerdo al significado de los conectivos que contienen.

Significado de los conectivos

✓ **Negación [$\neg\alpha$ o $\sim\alpha$]**

El significado de la negación de la fórmula $\alpha \in$ PROP: $\neg\alpha$, queda definido por:

$v(\neg\alpha)$ = V sii $v(\alpha)$ = F

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

$f_\neg: E \to E$ $E=\{V,F\}$, donde

$f_\neg(V) = F$ y $f_\neg(F) = V$, la tabla de verdad es su expresión tabular.

Significado de los conectivos

✓ **Conjunción: [$\alpha \wedge \beta$]**

Dadas α, $\beta \in$ PROP, El significado de la conjunción $\alpha \wedge \beta$ ("α y β") queda definido por:

v(($\alpha \wedge \beta$)) = V sii **v**(α) = V y **v**(β) = V

α	$\wedge$	β
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

f ^: ExE → E

Significado de los conectivos

- **Disjunción ($\alpha \vee \beta$)**
- **Dadas $\alpha, \beta \in$ PROP, el significado de la disjunción $\alpha \vee \beta$ (" α o β o ambos ") queda definido por:**
  - $\mathbf{v}((\alpha \vee \beta)) = F$ sii $\mathbf{v}(\alpha) = F$ y $\mathbf{v}(\beta) = F$

α	$\vee$	β
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

Significado de los conectivos

Implicación ($\alpha \to \beta$)

Dadas α, $\beta \in$ PROP, El significado de la implicación $\alpha \to \beta$ ("si α entonces β") queda definido por:

$\mathbf{v}((\alpha \to \beta)) = F$ sii $\mathbf{v}(\alpha) = V$ y $\mathbf{v}(\beta) = F$

α	$\to$	β
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Significado de los conectivos

Bicondicional ($\alpha \leftrightarrow \beta$)

Dadas α, β PROP, El significado de $\alpha \leftrightarrow \beta$ ("α si y solo si β") queda definido por:

$v((\alpha \leftrightarrow \beta)) = V$ sii $v(\alpha) = v(\beta)$

α	$\leftrightarrow$	β
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

Valuaciones

Def: Una función v: PROP $\rightarrow$ {V,F} es una valuación si satisface:

1. $v((\alpha \wedge \beta)) = V$ sii $v(\alpha)=V$ y $v(\beta)=V$
2. $v((\alpha \vee \beta)) = F$ sii $v(\alpha)=F$ y $v(\beta)=F$
3. $v((\alpha \rightarrow \beta)) = F$ sii $v(\alpha)=V$ y $v(\beta) = F$
4. $v((\alpha \leftrightarrow \beta)) = V$ sii $v(\alpha) = v(\beta)$
5. $v((\neg\alpha)) = V$ sii $v(\alpha) = F$

Valuaciones

✓El valor de verdad de los átomos determina el valor de verdad de una fórmula compleja

Teorema

Sea ω: AT $\rightarrow$ {V,F}, existe una única valuación v: PROP $\rightarrow$ {V,F} tal que

$v(\alpha) = \omega(\alpha)$ para toda fórmula atómica α.

Valuaciones

✓El valor de verdad de una fórmula **depende únicamente del valor de los átomos** subfórmulas (se formaliza en el siguiente Lema)

Lema

Sean ν y ν'dos valuaciones / ν(pi) = ν'(pi) para toda pi fórmula atómica de α, entonces ν(α) = ν'(α)

Tablas de Verdad

- Las Tablas de verdad sirven para ver ***todos los posibles valores de verdad*** que una proposición puede tener considerando todas las valuaciones posibles.
- Se definen por recursión en PROP

- **Casos base** p_i

p_i
F
V

Casos recursivos

$\wedge$

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

$\vee$

α	β	$(\alpha \vee \beta)$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

$\rightarrow$

α	β	$(\alpha \gamma \beta)$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

$\neg$

α	$(\neg \alpha)$
F	V
V	F

$\leftrightarrow$

α	β	$(\alpha \gamma \beta)$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Tablas de Verdad: Ejemplo

Tabla de verdad de $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\neg(p_1 \vee p_2))$:

1	2	3	4	5	6
p_1	p_2	$(p_1 \rightarrow p_2)$	$(p_1 \vee p_2)$	$\neg(p_1 \vee p_2)$	$(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\neg(p_1 \vee p_2))$
F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
V	V	V	V	F	F

Tablas de Verdad (cont.)

Tabla de verdad de $(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow ((\neg p_1) \gamma p_2)$:

V	2	3	4	5	6
p_1	p_2	$(p_1 \vee p_2)$	$\neg p_1$	$(\neg p_1) \gamma p_2$	$(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow ((\neg p_1) \gamma p_2)$
F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V
V	V	V	F	V	V

Esta proposición es siempre verdadera sin importar el valor de verdad de p_1 y p_2

tautología

Tablas de verdad

Ejemplo

$(p_1$	$\vee$	$p_2)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	p_1	$\rightarrow$	$p_2)$
V	V	V	**V**	F		V	V
V	V	F	**V**	F		V	F
F	V	V	**V**	V		V	V
F	F	F	**V**	V		F	F

Tautología y contradicción

* α es una **tautología** sii para cualquier valuación $\boldsymbol{v}$: PROP $\rightarrow$\{V,F\} se cumple que $\boldsymbol{v}(\alpha) = V$. (N<u>otación</u>: $\models \varphi$)

*α es una **contradicción** sii para cualquier valuación $\boldsymbol{v}$: PROP $\rightarrow$\{V,F\} se cumple que $\boldsymbol{v}(\alpha) = F$.

Tautología

- Para comprobar si una fórmula es una tautología o una contradicción debemos realizar su tabla de verdad.

- Todas las Tautologías (Contradicciones) de n átomos, dan lugar a una misma función de verdad $f: E^n \to V$ $(f: E^n \to F)$.

Tautologías – ejemplos

Propiedades de la Lógica Proposicional

- $\models (\alpha \vee \neg\alpha)$
- $\models (\alpha \leftrightarrow \alpha)$
- $\models (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$
- $\models (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$
- $\models (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
- $\models (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$
- $\models (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha)$
- $\models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\neg \alpha) \vee \beta)$
- $\models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg (\alpha \wedge (\neg \beta)))$
- $\models (\alpha \leftrightarrow (\neg(\neg \alpha)))$

Tautologías – más ejemplos

- $\models (\alpha \lor \alpha) \leftrightarrow \alpha$
- $\models (\alpha \land \alpha) \leftrightarrow \alpha$

- $(\alpha \land \neg\alpha)$ *es una contradicción*
- $(\alpha \leftrightarrow \neg\alpha)$ *es una contradicción*

$(\alpha \land \beta) \leftrightarrow \beta$ *no es ni una tautología ni una contradicción*

Def **Consecuencia lógica - Implicación lógica**

- Sea $\Gamma \subseteq$ PROP y $\varphi \in$ PROP.

  Decimos que ***φ es consecuencia lógica de Γ*** sii
  para cualquier valuación ***v***
  Si $\boldsymbol{v}(\psi) = V$ para todo $\psi \in \Gamma$, entonces $\boldsymbol{v}(\varphi) = V$

- En este caso decimos que ***Γ implica lógicamente a φ***

  lo notamos: $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \Rightarrow \varphi$

  y significa: $\models \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi$

- En particular si $\Gamma = \{\psi_1\}$:

  $\psi_1 \Rightarrow \varphi$ **sii** $\models \psi_1 \rightarrow \varphi$

Consecuencia lógica - Implicación lógica

Notación:

$\Gamma \models \varphi$ se lee "φ es consecuencia lógica de Γ"

$\varphi_{\varsigma} \ldots \varphi_n \models \varphi$ se lee como $\{\varphi_{\varsigma} \ldots \varphi_n\} \models \varphi$

Ejemplos de consecuencias lógicas

$\alpha , \beta \models \alpha \wedge \beta$

Lo que es igual a probar: $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta$

Sii $\models \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$

(hacer tabla)

Ejemplos de consecuencias lógicas

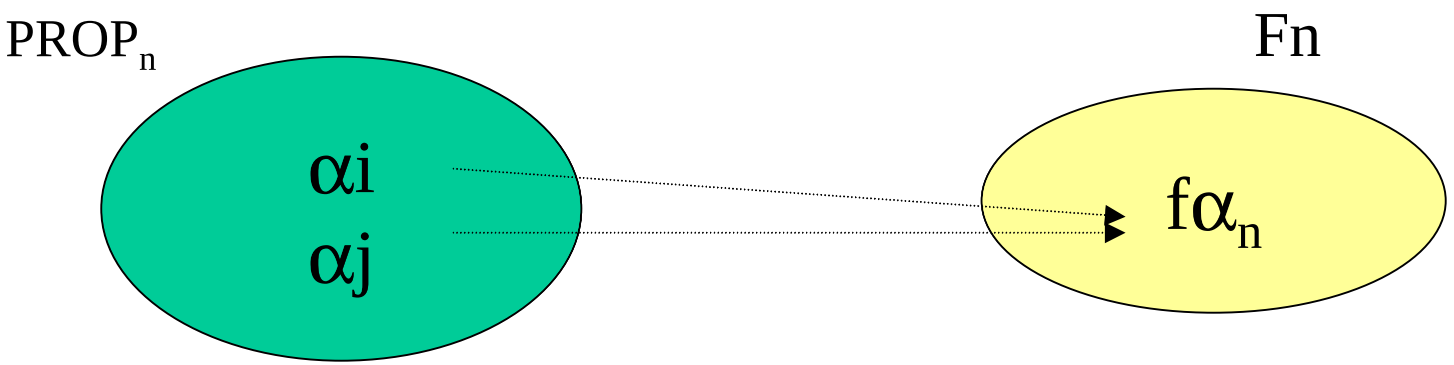
- $\alpha , \beta \models \alpha \wedge \beta$
- $\alpha \models \alpha \vee \beta$ $\qquad$ $\beta \models \alpha \vee \beta$
- $\alpha \vee \beta , \neg \alpha \models \beta$ $\qquad$ $\alpha \vee \beta , \neg \beta \models \alpha$
- $\alpha \rightarrow \beta , \alpha \models \beta$
- $\alpha \rightarrow \beta , \neg \beta \models \neg \alpha$
- $\alpha \leftrightarrow \beta , \alpha \models \beta$
- $\alpha \leftrightarrow \beta , \neg \alpha \models \neg \beta$

Equivalencia de Proposiciones

Observación:

$\alpha \in$ PROP $\longrightarrow$ función de verdad ($f\alpha$)

$\#\ PROP_n = \aleph_0$ $\qquad\qquad$ $\#\ \{f\alpha_n\} = 2\exp 2^n$



- **Luego a más de una proposición le correspone una misma función de verdad (tabla)**

Equivalencia de Proposiciones

- **Def [eq ó $\cong$]**

  Dos proposiciones α y β son *equivalentes* sii $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es una tautología.

  O sea, si y sólo si, para cualquier valuación v: PROP $\rightarrow$ {F,V}, se cumple que: $\boldsymbol{v}(\alpha) = \boldsymbol{v}(\beta)$

- **Notación:** α **eq** β **abrevia** $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$

- **<u>Lema</u>**

  eq es una relación de equivalencia

Reglas de manipulación y sustitución de fórmulas

¿Cómo operar con las fórmulas?

- Para clasificar las fórmulas de la lógica proposicional, podemos trabajar con tablas de verdad...
  - ***pero a veces las tablas son muy grandes: para una fórmula con n letras de proposición, la tabla tiene 2^n filas.***
- Lo que nos importa muchas veces es sólo la estructura de las fórmulas. Buscamos reglas para transformar fórmulas complejas en fórmulas más simples y fáciles de clasificar.

Sustitución por fórmulas equivalentes

- Si φ_1 y φ_2 son equivalentes, entonces puedo sustituir una letra proposicional de una fórmula ψ cualquiera por φ_1 y por φ_2, y obtener fórmulas equivalentes.
- Esto se utiliza mucho en matemática: no dudamos cuando vemos el siguiente razonamiento:
  - **3 + (2 x 5) = 3 + 10** **Por qué es válido eso?**
  - Porque sabemos que 2 x 5 = 10, y reemplazamos iguales por iguales
  - esto es, en la expresión **(3 + ξ)** ***sustituimos*** a ξ por **2 x 5** y por **10,** y obtenemos ***dos números iguales***.

Sustitución por fórmulas equivalentes

- **Teorema1**

  Si $\models \alpha$ **y** $\models (\alpha \rightarrow \beta)$ entonces $\models \beta$

Def: **Sustitución de una variable por una fórmula**

_ [_/_] : PROP x PROP x $\{p_0, p_1, \ldots\} \rightarrow$ PROP

$$p_i\,[\varphi \ / \ p_i] = \varphi$$

$$p_j\,[\varphi \ / \ p_i] = p_j \quad \text{si } i \neq j$$

$$(\alpha \quad \beta)\,[\varphi \ / \ p_i] = (\alpha\,[\varphi \ / \ p_i] \quad \beta\,[\varphi \ / \ p_i])$$

$$(\neg\alpha)\,[\varphi \ / \ p_i] = (\neg\,\alpha\,[\varphi \ / \ p_i])$$

Sustitución por fórmulas equivalentes

- **Teorema 2**

  Si $\models \alpha$ **y** $\varphi \in$ PROP entonces si $\boldsymbol{\alpha' = \alpha}$ $[\varphi /p]$ se tiene que

$$\models \alpha'$$

- **Teorema [sustitución]**

Si φ_1 **eq** φ_2 entonces para todo $p \in$ **AT** y para toda $\psi \in$ PROP se cumple que

$$\psi[\varphi_1/p] \textbf{ eq } \psi[\varphi_2/p]$$

Leyes algebraicas

Las siguientes son tautologías:

$$\left.\begin{array}{l}\blacksquare\ (\varphi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)\\ \blacksquare\ (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)\end{array}\right\}\ \text{asociatividad de } \wedge \text{ y } \vee$$

$$\left.\begin{array}{l}\blacksquare\ (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)\\ \blacksquare\ (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)\end{array}\right\}\ \text{conmutatividad de } \wedge \text{ y } \vee$$

$$\left.\begin{array}{l}\blacksquare\ \varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)\\ \blacksquare\ \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)\end{array}\right\}\ \text{distributividad de } \wedge \text{ y } \vee$$

$$\left.\begin{array}{l}\blacksquare\ \neg (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \wedge \neg\varphi)\\ \blacksquare\ \neg (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \vee \neg\varphi)\end{array}\right\}\ \text{Leyes de De Morgan}$$

$$\left.\begin{array}{l}*\ (\varphi \vee \varphi) \leftrightarrow \varphi\\ *\ (\varphi \wedge \varphi) \leftrightarrow \varphi\end{array}\right\}\ \text{idempotencia de } \wedge \text{ y } \vee$$

$$*\ \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi\ \}\ \text{doble negación}$$

Más propiedades...

- Lema

Si $\models \varphi \to \psi$

entonces $(\varphi \wedge \psi)$ **eq** φ

$(\varphi \vee \psi)$ **eq** ψ

- Lema

a. Si $\models \varphi$ entonces $(\varphi \wedge \psi)$ **eq** ψ

b. Si $\models \varphi$ entonces $(\neg\varphi \vee \psi)$ **eq** ψ

Equivalencias entre conectivos

- Teorema

a. $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ **eq** $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

b. $(\varphi \rightarrow \psi)$ **eq** $(\neg\varphi \vee \psi)$

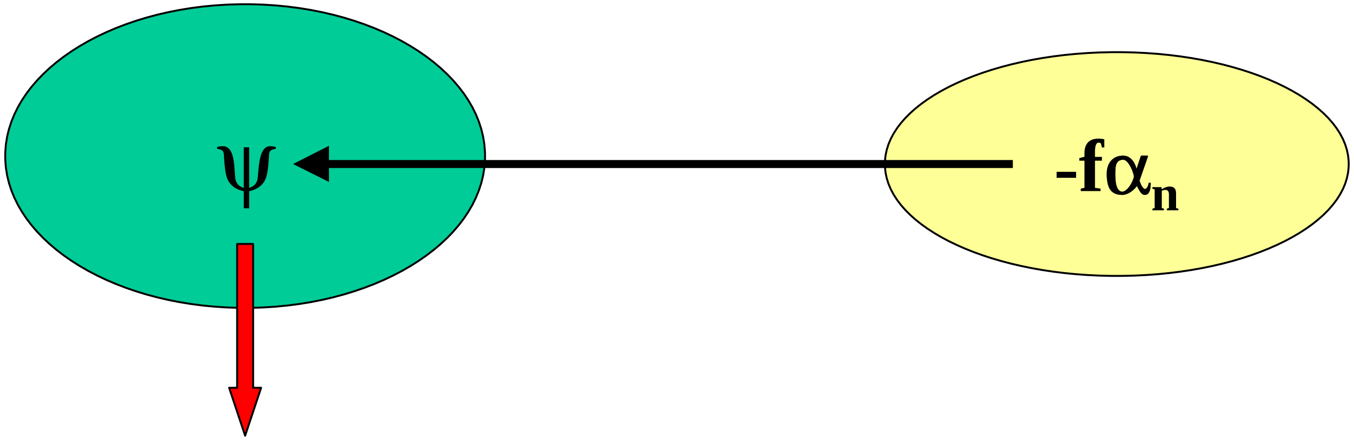
c. $(\varphi \vee \psi)$ **eq** $(\neg\varphi \rightarrow \psi)$

d. $(\varphi \vee \psi)$ **eq** $\neg (\neg\psi \wedge \neg\varphi)$

e. $(\varphi \wedge \psi)$ **eq** $\neg (\neg\psi \vee \neg\varphi)$

Formas Normales

- Hemos visto que a toda $\psi \in$ PROP le corresponde una función de verdad $f\psi$, ahora vamos a demostrar que toda función de verdad f corresponde a una forma restringida ($\neg$, $\wedge$, $\vee$)



Forma normal

Formas Normales

- Dada una función f especificada por la tabla de verdad, construir ψ en forma restringida ($\neg$, $\wedge$, $\vee$):

- Considerar las valuaciones en las cuales f es V
- Formar las conjunciones básicas correspondientes
- ψ es la disjunción de las conjunciones básicas.

- **Teorema**

  Toda función de verdad f es la función de verdad de una forma proposicional restringida

Conjunciones y disyunciones finitas

- **Definición**

$$\bigwedge_{i\leq 0} \varphi_i = \varphi_0 \qquad\qquad \bigvee_{i\leq 0} \varphi_i = \varphi_0$$

$$\bigwedge_{i\leq n+1} \varphi_i = \Big(\bigwedge_{i\leq n} \varphi_i\Big) \wedge \varphi_{n+1} \qquad\qquad \bigvee_{i\leq n+1} \varphi_i = \Big(\bigvee_{i\leq n} \varphi_i\Big) \vee \varphi_{n+1}$$

✓Las conjunciones y las disjunciones finitas son los elementos básicos de las formas normales

Formas Normales

Definición [**formas normales**]

- **Una fórmula φ está en forma normal disjuntiva si es de la forma $\bigvee_{i\leq n} (\bigwedge_{j\geq m_i} \varphi_{ij})$ donde cada φ_{ij} es atómica o la negación de una fórmula atómica**

- **Una fórmula φ está en forma normal conjuntiva si es de la forma $\bigwedge_{i\leq n} \left(\bigvee_{j\geq m_i} \varphi_{ij}\right)$ donde cada φ_{ij} es atómica o la negación de una fórmula atómica.**

Formas Normales

Teorema

Para toda $\psi \in$ PROP existen fórmulas en forma normal disjuntiva $\psi^{\mathbf{d}}$ y en forma normal conjuntiva $\psi^{\mathbf{c}}$ tales que:

$$\psi \ \mathbf{eq} \ \psi^{\mathbf{d}} \quad \textit{y} \quad \psi \ \mathrm{eq} \ \psi^{c}$$

Demostraciones:

•*Demostración constructiva*

•*Utilizando equivalencias de conectivos y leyes algebraicas.*

Conjuntos completos de conectivos

✓ ***Idea:***

Hemos definido la sintaxis de la lógica proposicional utilizando cinco conectivos, vimos que hay equivalencia semántica entre ellos, por ejemplo $(\varphi \vee \psi)$ **eq** $\neg(\neg\psi \wedge \neg\varphi)$

Con cuáles nos podemos quedar para obtener una lógica equivalente, utilizando un conjunto mínimo de símbolos???

Conjuntos completos de conectivos

- ✓ Un conjunto de conectivos C es **completo (adecuado)** si cualquier función de verdad es definible en términos de los conectivos de C.

- **Def** **[conjunto completo de conectivos]**

  C es un **conjunto completo de conectivos** si para cualquier conectivo n-ario \$ y cualesquiera $\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n$ existe una proposición ψ que contiene sólo a $\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n$ y los conectivos de C tal que

  ψ eq $\$(\varphi_\varsigma,\varphi_2,\ldots\varphi_n)$

-

Conjuntos completos de conectivos

- Ejemplos: $\{\neg , \vee\}$, $\{\neg , \wedge\}$, y $\{\neg , \rightarrow\}$ son completos.

- **Teorema**

  $\{\neg , \vee\}$ $\{\neg , \wedge\}$ $\{\neg , \rightarrow\}$ son conjuntos completos de conectivos.

$\{\neg , \leftrightarrow\}$ lo es ????

Conjuntos completos de conectivos

✓ Existen otros conectivos.

Dos de ellos son interesantes: NOR y NAND

- **NOR $\downarrow$:** su tabla de verdad es:

α	$\downarrow$	β
V	F	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

- **$\alpha \downarrow \beta$ eq $\neg (\alpha \vee \beta)$**

Conjuntos completos de conectivos

NAND $|$ **:** su tabla de verdad es:

α	$\mid$	β
V	F	V
V	V	F
F	V	V
F	V	F

$\alpha \mid \beta$ **eq** $\neg(\alpha \wedge \beta)$

- **Teorema:**

Los conjuntos $\{\downarrow\}$ y $\{\mid\}$ son conjuntos completos de conectivos

Conjuntos completos de conectivos

Dem:

basta que expresemos los conectivos de un conjunto completo, el $\neg$ y el $\vee$ por ejemplo, en función del $\downarrow$ (|):

- $\neg\alpha$ **eq** $\alpha\downarrow\alpha$
- $\alpha\wedge\beta$ **eq** $(\alpha\downarrow\alpha)\downarrow(\beta\downarrow\beta)$

Ejemplo:

escribir $\alpha\to\beta$ como una proposición que utilice solo $\downarrow$

$\alpha\to\beta$ **eq**

$[(\alpha\downarrow\alpha)\downarrow((\beta\downarrow\beta)\downarrow(\beta\downarrow\beta))]\downarrow[(\alpha\downarrow\alpha)\downarrow((\beta\downarrow\beta)\downarrow(\beta\downarrow\beta))]$

- **Larguísima !!!! Buscar equilibrio !!!**