FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL

Las funciones con las que se ha trabajado hasta el momento son funciones reales de una variable real (su rango es un subconjunto de los reales). Se estudiarán en este capítulo funciones de una variable real pero cuyo rango es un conjunto de vectores. Este tipo de funciones son las que se utilizan para describir la trayectoria de un objeto.

1. Funciones vectoriales

1.1. *Definición*

Una *función vectorial de una variable real* en el espacio es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores del espacio, es decir, es una función del tipo

$$\mathbf{r} : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{V}_3$$
$$t \;\to \mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k} = (f(t), g(t), h(t))$$

donde f, g y h son funciones reales de variable real t, llamadas *funciones componentes* de $\mathbf{r}$.

Nota: Si la función vectorial $\mathbf{r}$ describe el movimiento de una partícula, el vector $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ señala su posición en el instante t, en estos casos t representa la variable tiempo.

Ejemplo 1: $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{V}_3 \,/\, \mathbf{r}(t) = (2-3t)\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + (-1+t)\,\mathbf{k}$

Ejemplo 2: $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{V}_3 \,/\, \mathbf{r}(t) = (t^2, sen\,t, cos\,3t)$

1.2 *Dominio de una función vectorial*

Esta dado por la intersección de los dominios de sus funciones componentes, es decir, si $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ entonces

$$I = Dom(\mathbf{r}) = Dom(f) \cap Dom(g) \cap Dom(h)$$

Ejemplo: Si $\mathbf{r}(t) = \left(1+t^2, \sqrt{t}, ln\,t\right)$ el dominio de $\mathbf{r}$ será $I = \{t \in \mathbf{R} \,/\, t > 0\}$

1.3 *Límite y continuidad de una función vectorial*

Sea la función vectorial $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{V}_3 \,/\, \mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ se define

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right)$$

siempre que existan los límites de las funciones componentes.

Ejemplo: Si $\mathbf{r}(t) = \left(1+3t, sen\,t, t^2 - e^{-2t}\right)$ entonces

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t\to 0} (1+3t)\ ,\ \lim_{t\to 0} sen t\ ,\ \lim_{t\to 0} (t^2 - e^{-2t}) \right) = (1,0,-1)$$

Si $a \in I$ se dice que $\mathbf{r}$ *es continua en* a si $\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$

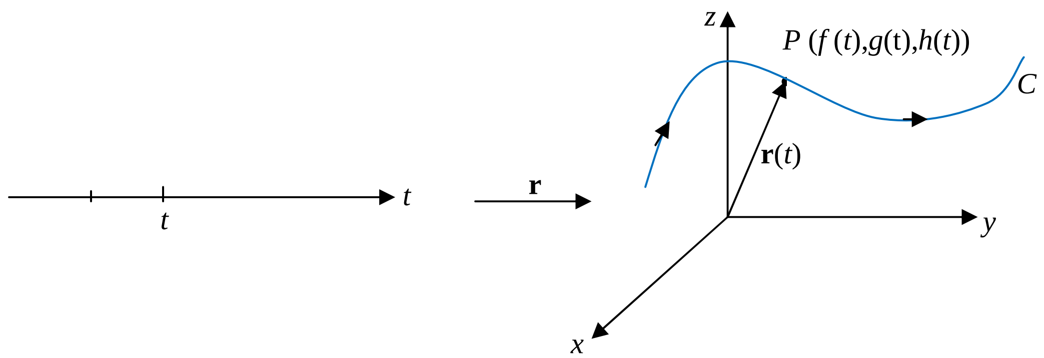
Teniendo en cuenta las definiciones de límite y continuidad resulta:

"La función vectorial $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ es continua en a si y solo si sus funciones componentes f, g y h son continuas en a"

1.4 *Representación gráfica de una función vectorial*

Sea la función vectorial $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{V}_3 \ /\ \mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$

Para cada $t \in I$ se obtiene un vector $\mathbf{r}(t)$, que es el vector posición del punto $P(f(t), g(t), h(t))$. Si la función vectorial es continua en I, es decir sus funciones componentes *f, g* y *h* son continuas en I, define una curva *C* en el espacio formada por los extremos del vector $\mathbf{r}(t)$ donde *t* varía de *a* a *b*.



Entonces la curva *C* es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ del espacio tal que

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in I$$, a estas ecuaciones se las llama *ecuaciones paramétricas* de la curva *C* y t es el *parámetro*.

Cuando se grafica una curva descrita por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, cada punto de la misma (extremo del vector $\mathbf{r}(t)$) queda determinado por un valor elegido para el parámetro *t*. Al trazar los puntos resultantes de valores crecientes de *t*, la curva se va trazando en una dirección específica, en este caso se dice que la curva está *orientada positivamente*.

Ejemplo 1: Sea $\mathbf{r}(t) = \left(3 - t\ ,\ -2 + 2t\ ,1 + 3t\right)$ con $t \in \mathbf{R}$, cómo $\mathbf{r}$ es continua en $\mathbf{R}$ define una curva *C* en el espacio. Las ecuaciones paramétricas de *C* son

$$\begin{cases} x = \ 3 - t \\ y = -2 + 2t \quad \text{con } t \in I \\ z = \ 1 + 3\,t \end{cases}$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de una recta que contiene al punto $P_0\,(3, -2,\,1)$ y es paralela al vector $\mathbf{u} = (-.1,\,2,\,3)$.

Ejemplo 2: Sea $\mathbf{r}(t) = \left(cos\ t\ ,\ sen t\ ,\ t\ \right)$ con $t \in \mathbf{R}$, cómo $\mathbf{r}$ es continua en $\mathbf{R}$ define una curva *C* en el espacio, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = \ cos\ t \\ y = \ sen t \quad \text{con } t \in \mathbf{R} \qquad (*) \\ z = \ t \end{cases}$$

Veamos cual es la curva *C* definida por la función vectorial $\mathbf{r}$.
Para ello consideremos las dos primeras igualdades de las ecuaciones (*)

$\begin{cases} x = \ cos\ t \\ y = \ sen t \end{cases}$, de donde $\begin{cases} x^2 \ = \ cos^2 t \\ y^2 = \ sen^2 t \end{cases}$ y sumando miembro a miembro resulta

$x^2 + y^2 \ = 1$, esta ecuación en el espacio es la de un cilindro circular cuyo eje es el eje “z”, entonces la curva *C* está contenida en dicho cilindro. La curva que se obtiene es un espiral alrededor del cilindro y se la llama *hélice*.

Nota: se ha definido función vectorial de una variable real en el espacio, en forma similar se puede definir función vectorial de un variable real en el plano y también en el espacio n-dimensional $\mathbf{V}_n$. Para estas funciones vectoriales también se definen los conceptos de límite y continuidad en forma similar a las definiciones dadas para funciones vectoriales en el espacio. Para el caso particular de una función vectorial en el plano, si la misma es continua en un intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$ su representación gráfica es una curva plana *C* determinada por los puntos extremos de los vectores $\mathbf{r}(t)$ que se obtienen al variar *t* en ***I***. Si $\mathbf{r}(t) = (\,f\,(t), g\,(t)\,) = f\,(t)\ \mathbf{i} + g\,(t)\,\mathbf{j}$ con $t \in I$, las *ecuaciones paramétricas* de la curva *C* son $\begin{cases} x = f\,(t) \\ y = g\,(t) \end{cases}$ con $t \in I$

Ejemplo 3: Sea $\mathbf{r}(t)=\left(\cos t,\, \operatorname{sen} t\right)$ con $t\in[0,2\pi]$, cómo $\mathbf{r}$ es continua en $\mathbf{R}$ define una curva C en el plano, cuyas ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t\end{cases}$ con $t\in[0,\,2\pi]$

Para determinar cuál es la curva C, elevando ambos miembros de las ecuaciones paramétricas al cuadrado y sumando miembro a miembro obtenemos la ecuación cartesiana $x^2+y^2=1$, que en el plano representa una circunferencia con centro en $(0,\,0)$ y radio 1.

2.- Derivada de una función vectorial

2.1 *Definición*

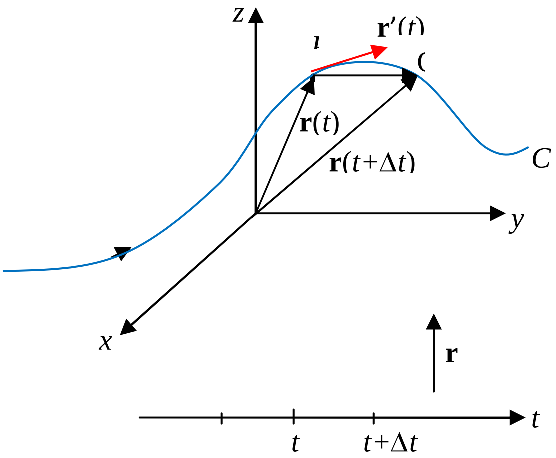
Sea $\mathbf{r}$ una función vectorial, se define su derivada $\mathbf{r}'$ como

$$\mathbf{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}\,(t+\Delta t)-\mathbf{r}\,(t)}{\Delta t}$$

siempre que este límite exista.

2.2 *Interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial*

Supongamos que $\mathbf{r}(t)$ sea el vector posición del punto P y $\mathbf{r}(t+\Delta t)$ el vector posición del punto Q, entonces $\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)=\overrightarrow{PQ}$ se puede considerar como un *vector secante* a la curva C.



Si $\Delta t>0$ el vector $\dfrac{1}{\Delta t}\left(\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)\right)=\dfrac{1}{\Delta t}\overrightarrow{PQ}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector $\overrightarrow{PQ}$, entonces cuando $\Delta t\to 0$ el vector $\dfrac{1}{\Delta t}\overrightarrow{PQ}$ se aproxima a un vector que está en la recta tangente a la curva C en el punto P. Si $\Delta t<0$ con un razonamiento similar se llega a la misma conclusión. Por lo que al vector $\mathbf{r}'(t)$ se lo denomina *vector tangente* a la curva C en el punto P, siempre que $\mathbf{r}'(t)$ exista y $\mathbf{r}'(t)\neq\mathbf{0}$.

La *recta tangente* a la curva C en el punto P es la recta que contiene a P y tiene la dirección del vector $\mathbf{r}'(t)$.

También se puede considerar el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$.

2.3 *Teorema*: Fórmula de cálculo de $\mathbf{r}'(t)$

Sea la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} + h(t)\,\vec{k} = (f(t), g(t), h(t))$ con $t \in I$ tal que f, g y h son funciones derivables en ***I*** entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\,\vec{i} + g'(t)\,\vec{j} + h'(t)\,\vec{k} = (f'(t), g'(t), h'(t))$$

Demostración:

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\left(f(t+\Delta t), g(t+\Delta t), h(t+\Delta t)\right) - \left(f(t), g(t), h(t)\right)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[f(t+\Delta t) - f(t), g(t+\Delta t) - g(t), h(t+\Delta t) - h(t)\right] =$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t}\right) \underset{(*)}{=}$$

$$= \left(f'(t), g'(t), h'(t)\right)$$

La igualdad (*) es válida pues por hipótesis f, g y h son funciones derivables.

Ejemplo: Sea $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ con $t \in \mathbf{R}$, vimos que su representación gráfica es una hélice.

- $\mathbf{r}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$
- $\mathbf{r}'(0) = (-\operatorname{sen} 0, \cos 0, 1) = (0, 1, 1)$
- $\mathbf{T}(0) = \dfrac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- Las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice en el punto $P(1, 0, 0)$ son

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

2.4 *Reglas de derivación*

Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ funciones vectoriales derivables, c un escalar y f una función real derivable. Entonces

a. $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)\right] = \dfrac{d\,\mathbf{r}_1(t)}{dt} + \dfrac{d\,\mathbf{r}_2(t)}{dt}$

b. $\dfrac{d}{dt}\left[c\,\mathbf{r}_1(t)\right]=c\;\dfrac{d\,\mathbf{r}_1(t)}{dt}$

c. $\dfrac{d}{dt}\left[\,f\,(t)\cdot\mathbf{r}_1(t)\,\right]=\dfrac{d\,f(t)}{dt}\cdot\mathbf{r}_1(t)+f(t)\cdot\dfrac{d\,\mathbf{r}_2(t)}{dt}$

d. $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{r}_1(t)\bullet\mathbf{r}_2(t)\,\right]=\dfrac{d\,\mathbf{r}_1(t)}{dt}\bullet\mathbf{r}_2(t)+\mathbf{r}_1(t)\bullet\dfrac{d\,\mathbf{r}_2(t)}{dt}$

e. $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)\,\right]=\dfrac{d\,\mathbf{r}_1(t)}{dt}\times\mathbf{r}_2(t)+\mathbf{r}_1(t)\times\dfrac{d\,\mathbf{r}_2(t)}{dt}$

f. $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{r}_1(\,f(t))\,\right]=\dfrac{d\,\mathbf{r}_1(\,f(t))}{dt}\cdot f\,'(t)$

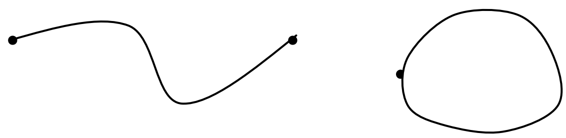
Observación: en c)”.” indica el producto entre una función real y una función vectorial; en d) “•”indica producto escalar entre funciones vectoriales y en e) “x” es el producto vectorial entre funciones vectoriales.

3. Definición de distintos tipos de curvas

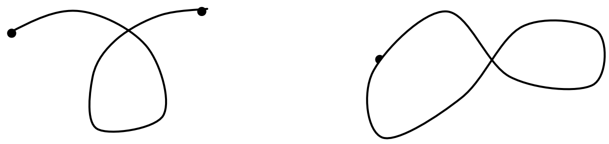
Sea una curva *C* la representación gráfica de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ con $t\in\mathbf{I}=\left[a,b\,\right]$

• *C* es una *curva simple* si $\forall\, t_1,t_2\in(a,b)$ tal que $t_1\neq t_2$ resulta $\mathbf{r}(t_1)\neq\mathbf{r}(t_2)$

curvas simples

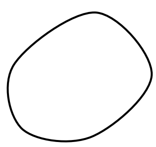


curvas no simples

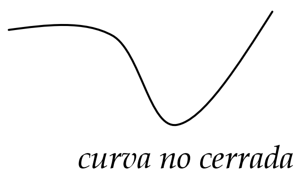


Es decir una curva *C* es *simple* si no se cruza a si mismo al variar t en (a,b) .

• *C* es una *curva cerrada* si $\mathbf{r}(a)=\mathbf{r}(b)$.



curva cerrada



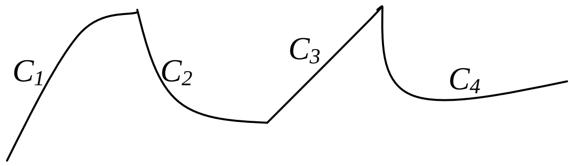
curva no cerrada

• *C* es una *curva suave* si $\mathbf{r}'(t)$ es continua en (a,b) y $\mathbf{r}'(t)\neq\mathbf{0}\;\;\forall t\in(a,b)$, es decir una curva suave no posee puntos angulosos.

• C es una *curva seccionalmente suave* (*suave a trozos o suave por partes*) si está formada por un número finito de arcos de curva suave.

Curva seccionalmente suave

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$



4. Longitud de un arco de curva

Sea C un arco de curva suave y simple, la representación gráfica de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ con $t \in \mathbf{I} = [a,b]$.
Se puede probar que la longitud del arco de curva C viene dada por:

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| \, dt$$

Ejemplo: Calcular la longitud del arco de curva C definido por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (cos\ t\ ,\ sen t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
C es un arco se curva suave y simple (verificarlo!!).

$$\mathbf{r}'(t) = (-sen t,\ cos t)$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-sen t)^2 + (cos t)^2} = 1$$

$$L = \int_0^{2\pi} d\,t = 2\,\pi$$

Nota: Una curva puede ser descrita por más de una función vectorial. Por ejemplo las funciones vectoriales $\mathbf{r}_1(t) = (cos t,\ sen t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $\mathbf{r}_2(u) = (cos\ 2u,\ sen\ 2u)$ con $u \in [0, \pi]$ definen la misma curva, una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 1. Entonces para una misma curva se tienen distintas parametrizaciones. Se puede probar que el cálculo de la longitud de un arco de curva suave y simple es independiente de la parametrización que se utilice.

5. Movimientos en el espacio: velocidad y aceleración

Supongamos una partícula que se mueve en el espacio de manera que su posición en cada instante t de tiempo está dado por el vector $\mathbf{r}(t)$.

El cociente $\dfrac{\mathbf{r}\,(t+\Delta t)-\mathbf{r}\,(t)}{\Delta t}$ nos da la *velocidad promedio* en un intervalo de tiempo de longitud Δt .

El *vector velocidad* $\mathbf{v}(t)$ en el tiempo t será $\mathbf{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbf{r}\,(t+\Delta t)-\mathbf{r}\,(t)}{\Delta t} = \mathbf{r}\,'(t)$

La *rapidez* de la partícula en el tiempo t es $\left|\mathbf{v}\,(t)\right| = \left|\mathbf{r}\,'(t)\right|$

El *vector aceleración* $\mathbf{a}(t)$ en el tiempo t será $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}\,'(t) = \mathbf{r}\,''(t)$.