Curso de Posgrado: Tópicos avanzados en teoría de grafos

1. Grafos planares

1.1. Preliminares

Recordemos algunos conceptos:

- Una ***curva*** es la imagen de una función contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.
- Una ***curva poligonal*** es una curva compuesta por un numero finito de segmentos.
- Una ***curva poligonal*** $u-v$ es una curva poligonal tal que $f(0) = u$ y $f(1) = v$.
- Una representación de $G = (V, E)$ es una función f definida sobre $V \cup E$ donde $f(u) \in \mathbb{R}^2$ (inyectiva), si $e = uv$, $f(e)$ es una curva poligonal $f(u) - f(v)$.
- Un punto de $\mathbb{R}$ es un cruce si está en $f(e) \cap f(e')$ y NO es un extremo común.

Es común usar usar el mismo nombre para G y una representación de G. Análogamente para vértices/aristas y puntos/curvas.

1.2. Representación de grafos

Dada una representación podemos modificar sus curvas poligonales $u - v$ para que:

- No haya 3 aristas con un punto interno común.
- Ninguna arista contenga más vértices que sus extremos.
- No haya dos aristas tangentes.
- Si dos aristas se cruzan más de una vez, se modifican las curvas asignadas para reducir el número de cruces a a lo sumo 1.

Consideramos representaciones con estas 4 propiedades.

1.3. Definición de grafos planares

Def: un grafo G es **PLANAR** si admite una representación sin cruces.

Una tal representación es llamada una **inmersión (plana)** de G.

Un grafo es **plano** si es una inmersión plana particular de un grafo planar.

Una inmersión plana de G divide al plano en regiones..

Recordemos que:

- Una curva es simple si no tiene puntos repetidos (excepto, tal vez el inicio y el final)
- Una curva es cerrada si sus extremos son iguales.
- Una region U es un abierto convexo de $\mathbb{R}$.
- Dado G plano, sus **caras** son las regiones maximales del plano, que NO contienen puntos de la inmersión. Las caras son disuntas dos a dos.
- G es finito, tiene una única cara no acotada (**cara exterior**).
- La **longuitud** de una cara, es la longuitud del camino cerrado que la acota. Dicho camino es llamado la **frontera** de la cara.

Teorema de la curva de Jordan
Toda curva cerrada C divide al plano en dos regiones abiertas, siendo C su frontera.

Un vértice x esta «adentro» de una cara si no es un vértice de la frontera de la cara y existe para y vértice de la frontera, una poligonal x-y que no la cruza.

En un grafo plano, todo ciclo está inmerso como una curva simple cerrada. Algunas caras están adentro y otras afuera de dicha curva.

Observemos que si una arista es de corte, estará en la frontera de una única cara, y se contará dos veces en el camino que la delimita. Ejemplos.

Notamos con $l(F)$ a la longitud de la frontera de la cara F.

Lema: Dado G grafo plano, $2e(G) = \sum_i l(F_i)$

1.4. Grafos Outerplanar

Def: un grafo G es **outerplanar** si tiene una inmersion en la cual todo vértice está en la frontera de la cara exterior (no acotada).

Ejemplos...

Proposición 6.1.18 La frontera de la cara exterior de un grafo outerplano 2-conexo es un ciclo recubridor.

Proposición 6.1.19 K_4 y $K_{2,3}$ NO son outerplanar.

Proposición 6.1.20 G simple, outerplanar, entonces existe v tal que $d(v) \leq 2$.

1.5. Fórmula de Euler, Triangulación y grafo planar maximal

Recordemos que Euler probó la relación que existe entre la coantidad de aristas, vértices y caras de un grafo planar.

Teorema 6.1.21 Si G es un grafo plano conexo con n vértices, e aristas y f caras, se tiene que $n - e + f = 2$.

De este teorema, podemos probar desigualdades útiles en la hora de probar que un grafo es no planar:

- Dado G simple con al menos 3 vértices, $e \leq 3n - 6$.
- Si es G simple sin triángulos, con al menos 3 vértices, entonces $e \leq 2n - 4$.

Def: G es **planar maximal** si es simple y NO es subgrafo recubridor de ningún otro grafo planar.

Observemos que si G es planar maximal, el agregado de una nueva arista entre vértices existentes, genera un grafo no planar.

Una **triangulacón** es un grafo plano que tiene toda cara tiene como frontera un ciclo de longuitud 3.

Proposición 6.1.26 Sea G simple, plano con n vértices. Son equivalentes:

1. G tiene $3n - 6$ aristas.
2. G es una triangulación.
3. G es un grafo planar maximal.

1.6. Hacia el Teorema de Kuratowski

Subdivisión de un grafo.

Def: G' es una subdivision de G si es obtenido a partir de G reemplazado aristas por caminos simples.

Un grafo se dirá no planar minimal, si es no planar y todo subgrafo propio del mismo es planar.

Lema 6.2.1 Sea G un grafo que tiene un subgrafo que es subdivision de K_5 o de $K_{3,3}$, entonces G es no planar.

Prueba

Todo subgrafo de un grafo planar, es planar. Ya se probó que K_5 y $K_{3,3}$ son no planares, y claramente cualquier subdivisión de los mismos es un grafo no planar (subdividir aristas no cambia la condición de ser planar). Luego, G es no planar.

Un **subgrafo Kuratowski** de G es un subgrafo que es subdivisión de $K_{3,3}$ o de K_5.

Lema 6.2.4 Sea F el conjunto de las aristas de la frontera de una cara en una inmersión plana de G. Entonces existe una inmersión plana de G donde F es el conjunto de las aristas de la cara exterior de G.

Prueba:

Haciendo una proyección de la inmersión en la esfera unitaria, podemos luego volver a proyectar en el plano esta figura, partiendo desde un punto interno de la cara acotada por las aristas de F (es decir, ubicando el polo norte en un punto interior de la cara determinada por F).

Lema 6.2.5 Sea G no planar minimal, entonces es 2-conexo.

Prueba: Supongamos que G tiene un vértice de corte: v, y sean $G_1, \cdots, G_k$ las $\{v\}$-lobes de G. Por la minimalidad de G, G_i es plano para $i = 1, \cdots, k$. Luego, podemos considerar una inmersión de cada G_i en la cual el vértice v esté en la cara exterior del mismo. Ajustando cada representación plana de manera tal que se ajuste a un ángulo menor a $360^o/k$, se obtendría una representación plana para G. Absurdo. Luego G es 2-conexo.

Lema 6.2.6 Sea G no planar y $S = \{x, y\}$ un conjunto separador del mismo. Entonces, existe un S-lobe tal que agregandole la arista xy es no planar.

Prueba: Sean $G_1, \cdots, G_k$ las S-lobes de G y $H_i = G_i \cup \{xy\}$ (arista xy) para $i = 1, \cdots, k$. Si cada H_i es planar, existirá una representación plana del mismo, con la arista xy en la frontera de la cara exterior. Se podría entonces ir «adosando» *la representación de H_i a la de $\bigcup_{j=1}^{i-1} H_j$ en la cara que contiene a la arista xy en su frontera. Se obtiene de esta manera una inmersión plana de G (borramos luego la arista xy en el caso que no fuera arista de G). Absurdo. Luego existe al menos un S-lobe tal que H_i es no planar.*

Lema 6.2.7 Sea G un grafo no planares sin subgrafos de Kuratowski, con mínima cantidad de aristas entre los grafos con estas características. Entonces, G es 3-conexo.

Prueba: Es claro que si G no tiene subgrafos de Kuratowski, $G - e$ tampoco, para cualquier arista e. Por la hipótesis de ser G un grafo con mínima cantidad de aristas que sea no planar y sin subgrafos de Kuratowski, $G - e$ es planar, es decir, G es no planar minimal. Por lema 6,2,5 , G es entonces 2-conexo.
Supongamos que G tiene un conjunto separador $S = \{x, y\}$. El lema anterior nos asegura que existe un S-lobe tal que agregándole la arista xy, es un grafo no planar, llamemos a un tal grafo, H. Éste tiene menos aristas que G, luego, debe tener un subgrafo de Kuratowski: F que claramente tiene a la arista xy en su conjunto de aristas.
Como S es un conjunto de corte minimal, tanto x como y tiene vecinos en cada S-lobe. Reemplazando en F la arista xy por un camino $x - y$ en alguna otra S-lobe, obtenemos un subgrafo de Kuratowski de G.
Esto contradice la hipótesis, la cual asegura que G no tiene subgrafos de Kuratowski. G no tiene conjunto separador de dos vértices, G es 3-conexo.

Recordemos la definición de la operación contracción de una arista:

Def: Dado G grafo y $e \in E(G)$, notamos $G \cdot e$ al grafo obtenido a partir de G contrayendo su arista e, es decir, si $e = uv$, reemplazamos u y v por un vértice que tendrá como vértices vecinos a los vértices de $N_G(u) \cup N_G(v) \setminus \{u, v\}$. Observar que $|E(G \cdot e)| = |E(G)| - 1$.

Lema 6.2.9 (Thomassen, 1980) Todo grafo 3-conexo con al menos 5 vértices tiene una arista e tal que $G \cdot e$ es 3-conexo.

Prueba: (por contradicción)
Sea $e = xy$ una arista de G tal que $G \cdot e$ NO es 3-conexo, luego $G \cdot e$ tiene un conjunto separador S de cardinal 2, en el cual el vértice que representa la contracción de e está en él. Llamemos z al otro vértice de S.

Se dirá entonces que z es un compañero de los vértices adyacentes x e y. Observar que $\{x, y, z\}$ es un conjunto separador de G.

Supongamos que no existe arista e tal que $G \cdot e$ sea 3-conexo. Luego, cada arista de G tiene un compañero.

Elijamos una arista $e = xy$ y un compañero de la misma z tales que $G - \{x, y, z\}$ tenga una componente conexa de mayor orden (cantidad de vértices), digamos H. Sea H' otra componente conexa de $G - \{x, y, z\}$.
Como $\{x, y, z\}$ es un conjunto separador minimal de G, cada uno de éstos vértices tiene al menos un vecino en H y en H'. Sea u vecino de z en H' y sea v el compañero de zu.
$G - \{u, v, z\}$ es no conexo.

- *Si $v \notin V(H)$, como $G - \{u, v, z\}$ es no conexo, y $H \cup \{x, y\}$ es conexo, se tiene que hay una componente conexa de mayor orden que H en $G - \{u, v, z\}$, contradiciendo la elección de e y z.*
- *Si $v \in V(H)$, $H - \{v\} \cup \{x, y\}$ es conexo (si $H - \{v\} \cup \{x, y\}$ es no conexo, resulta $G - \{v, z\}$ no conexo, absurdo). Entonces, existe una componente conexa de $G - \{u, v, z\}$ que contiene a $H - \{v\} \cup \{x, y\}$. Ésta componente conexa, tiene más vertices que H, contradiciendo la eleccion de x, y, z.*

Luego, existe $e \in E(G)$ tal que $G \cdot e$ es 3-conexo.

Def: Una inmersión se dirá **convexa** si es una inmersión plana en la cual todas las caras tienen como frontera un polígono convexo.

Lema 6.2.10 Si $G \cdot e$ tiene un subgrafo de Kuratowski, entonces G también.

Prueba: Sea $e = xy$ y z el vértice que representa a la arista e en $G \cdot e$ y H un subgrafo de Kuratowski en $G \cdot e$. Si $z \notin V(H)$, entonces H es subgrafo de G.

Si $z \in V(H)$ y $\delta_H(z) \leq 2$, entonces obtenemos un subgrafo de Kuratowski a partir de H, reemplazando z por x o por y o por la arista xy.

Si $z \in V(H)$ y $\delta_H(z) \geq 3$ y a lo sumo un vértice adyacente a z en H, es adyacente a x en G– digamos un vértice a–, expandiendo z a la arista xy se alarga el camino $z - a$se obtiene un subgrafo Kuratowski en el grafo G, en el cual y es el vértice branch del subgrafo Kuratowski de G.

Si $z \in V(H)$ y $\delta_H(z) \geq 3$ y tanto x como y es adyacente en G a dos vértices del subgrafo H. Ésto nos indica que H es subdivisión de K_5, que $\delta_H(z) = 4$, dos vértices

adyacentes a z en H son adyacentes a x en G, digamos u_1, u_2 y dos vértices adyacentes a z en H son adyacentes a y en G, digamos v_1, v_2.
En G obtenemos una subdivisión de $K_{3,3}$, con partición: $\{u_1, y, u_2\}$ y $\{v_1, x, v_2\}$, borrando las aristas u_1u_2 y v_1v_2.

Conclusión: Si G no tiene subgrafos de Kuratowski, entonces $G \cdot e$ tampoco.

Teorema 6.2.11 (Tutte) Si G es un grafo 3-conexo sin subdivisiones de K_5 ni de $K_{3,3}$, entonces existe una inmersión convexa en el plano, sin tres vértices alineados.

Prueba: (de Thomassen, 1980)
La prueba se hará por inducción sobre $n = |V(G)|$.

Si $n = 4$, el único grafo de 4 vértices 3 conexo es K_4, que claramente admite una tal inmersión.

Sea $n \geq 5$. Como G es 3-conexo, existe e tal que $G \cdot e$ es 3-conexo. Digamos que $e = xy$ y sea z el vértice de $G \cdot e$ que aparece cuando contraemos e.

Por el lema 6,2,10, $G \cdot e$ no tiene subgrafos de Kuratowski, y en consecuencia, aplicando la hipótesis inductiva, existe una inmersión convexa de $H = G \cdot e$, sin tres vértices alineados.

En esta inmersión plana, consideremos el subgrafo que resulta de borrar todas las aristas incidentes en z. Éste tendrá una cara (puede ser la no acotada) que tiene a z en su interior. Como $H - z$ es 2 conexo, la frontera de ésta cara es un ciclo, digamos C.

Entonces, todos los vecinos de z en H están en C. Dichos vecinos, eran vecinos en G de x, de y o de ambos (recordar $e = xy$). Sean $x_1, \cdots, x_k$ los vertices de $N_G(x) \cap C$, ordenados según aparecen en C. Se presentan tres posibles casos:

Caso 0 : *$N(y) \cap V(C) \subseteq \{x_k, \cdots, x_1\}$. Se obtiene en este caso una inmersión plana de G.*

Caso 1 : *$N(x) \cap N(y) \cap V(C) = \{u, v, w\}$. Se obtiene en este caso una subdivisión de K_5 en G.*

Caso 2 : *y tiene vecinos u, v que se presentan en forma alternada con los vecinos x_i, x_j de x. Se obtiene en este caso una subdivisión de $K_{3,3}$ en G, donde $\{x, v, u\}$ y $\{x_i, y, x_j\}$ son los conjuntos estables.*

Luego, sólo es posible que se de el caso 0*, y en éste, se obtiene una inmersión convexa en el plano, sin tres vértices alineados de G.*

Podemos ahora probar el teorema de Kuratowski:

Teorema 6.2.2 Kuratowski (1930). Un grafo G es planar si y sólo si no tiene subdivisiones de K_5 ni de $K_{3,3}$.

Prueba:

$\Rightarrow$) *Todo subgrafo de un grafo planar es planar. La subdivisión de aristas no altera la condición de ser planar. Los grafos K_5 y $K_{3,3}$ son no planares, luego G no tiene subdivisiones de K_5 ni de $K_{3,3}$.*

$\Leftarrow$) *Si G sin subgrafo de Kuratowski, fuera no planar, consideremos H un subgrafo de G mínimamente no planar (H es no planar, pero todo subgrafo obtenido por borrado de cualquier arista, es planar). Como la operación de borrar aristas no genera subgrafos de Kuratowski, H tampoco tiene subgrafos de Kuratowski. Por Lema 6.2.7, H es* 3*- conexo. Todo grafo* 3*-conexo, sin subgrafos de Kuratowski, es planar. Contradicción.*

Otra manera de caracterizar a los grafos planares es a través de «menores»..

Def: H es un **menor del grafo** G si H es obtenido borrando o contrayendo aristas de G.

Ejemplo: K_5 es un menor del grafo de Petersen. Observar que dicho grafo no tiene subdivision de K_5, pero sí de $K_{3,3}$.

Si H' es un subgrafo de G que es subdivisión del grafo H, H es menor de G; ya que contrayendo las aristas de H' incidentes en vértices de grado 2 en G, se obtiene H.

EJERCICIO: Sea H con grado máximo 3. G contiene una subdivisión de H si y sólo si G contiene un subgrafo contraíble a H.

Teorema Wagner (1937). Un grafo G es planar si y sólo si ni K_5 ni de $K_{3,3}$ son menores de G.

Prueba:

$\Rightarrow$)*Si G es planar, G no tiene subdivisiones de K_5 ni de $K_{3,3}$. Tanto el borrado como la contracción de aristas preservan la planaridad. Luego, ni K_5 ni de $K_{3,3}$ son menores de G.*

$\Leftarrow$) *Si G es no planar, tiene un subgrafo F que es una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$. contrayendo las aristas de F incidentes en vértices de grado 2, se obtiene a K_5 o a $K_{3,3}$ como menor de G.*

1.7. Algoritmo polinomial de planaridad

Def: Sea H un subgrafo de G (no necesariamente inducido). Un H**-fragmento de** G es :

- una arista $e \in E(G) - E(H)$ tal que los extremos de e son vértices de H, o
- una componentes conexa de $G - V(H)$ con las aristas que lo «conectan» con H

Observar que H y sus fragmentos forman una descomposición de G, cada H-fragmento son «piezas» que se deben agregar a una inmersión de H para obtener una inmersión de todo G.

Def: Sea C un ciclo de G, diremos que dos C-fragmentos: A y B **están en conflicto** si:

1. A y B tienen 3 vértices en común que los conectan con C, o
2. Existen v_1, v_2, v_3, v_4 en orden cíclico en C tales que v_1, v_3 están conectados con A y v_2, v_4 están conectados con B.

El grafo conflicto de C es aquel que tiene un vértice por cada C-fragmento de G y dos vértices son adyacentes si sus correpondientes fragmentos están en conflicto.

Tutte probó :

G es planar si y sólo si el grafo conflicto de cada ciclo de G es bipartito.

ALGORITMO

INPUT: G grafo 2 conexo.

IDEA: Ir agregando en forma sucesiva caminos del fragmento correspondiente. Mantener el conjunto de vértices que están en la frontera del subgrafo ya inmerso.

INICIALIZACIÓN: G_0 es un ciclo arbitrario de G, inmerso en el plano.

ITERACIÓN: Teniendo determinado G_i, hallar G_{i+1}:

1. Determine los G_i-fragmentos de G.
2. Para cada B, G_i-fragmentos de G, determine todas las caras de G_i que contienen a todos los vértices «anclas» de B; a este conjunto lo notamos $F(B)$.
3.
   a) Si $F(B) = \emptyset$ para algún B, $\longrightarrow$ STOP: G es no planar.
   b) Si $|F(B)| = 1$ para algún B $\longrightarrow$ elijo ese B.
   c) Si $|F(B)| > 1$ para todo B, $\longrightarrow$ elijo cualquier B.

4. Tomo P: camino entre dos vértices anclas de B, lo grafico en una de las caras que están en $F(B)$
   $G_{i+1} = G_i \cup P$
   Actualizar la lista de las fronteras de la cara de G_{i+1}

5. Si $G_{i+1} = G \longrightarrow$ STOP: G es planar.
   Si no $i := i + 1$, ir a paso 1

EJERCICIO: Probar que el grafo de Petersen es no planar, utilizando el algoritmo.

Teorema El Algoritmo produce una inmersión plana si G es un grafo planar.

Prueba:
Podemos suponer que G es 2 conexo. Sabemos que un ciclo aparece como una curva simple cerrada en cada inmersión plana de G y puede ser extendida a una inmersión plana de G. Luego, G_0 se puede extender a una inmersión plana e G cuando G es planar.

Observemos que cada G_i-fragmento tiene al menos 2 vértices «anclas» a G_i, por ser G grafo 2 conexo.

Si para algún G_i-fragmento B, $|F(B)| = 1$, se tiene que hay una única cara de G_i que puede contener a P en una extensión de G_i a una inmersión plana de G. El algoritmo ubica a P en esa misma cara y obtiene G_{i+1}, extendible.
Si $|F(B)| > 1$ para todo B, G_i-fragmento, se podría tener un problema si se elige una cara no conveniente para graficar el camino P elegido del fragmento B tomado.

Supongamos que dibujamos P en en la cara $f \in F(B)$ y que G_i se puede extender a una inmersión plana $\hat{G}$ de G en la cual, P está adentro de la cara $f' \in F(B)$.

Modificaremos $\hat{G}$ para mostrar que G_i se puede extender a otro G' en el cual P está adentro de la cara f. Esto mostrará que la elección no generó problemas y que G_{i+1} es extendible.

Sea $C \subset V(G_i)$ el conjunto de vértices comunes a las fronteras de f y de f' ($f, f' \in F(B)$, claramente C contiene a los vértices «anclas» de B a G_i). Dibujaremos G' intercambiando todo G_i-fragmento cuyos vértices anclas están en C, que en $\hat{G}$ aparecen en f' y en f.

Este cambio produce la inmersión buscada G', salvo en el caso en que se produzca un conflicto entre un G_i-fragmento cambiado de cara y algún otro $\hat{B}$, G_i-fragmento

no *cambiado de cara.*

Supongamos que $\hat{B}$ *está en* f *en el grafo* $\hat{G}$*. Que hay conflicto, significa que en* $\hat{G}$ *existe un* B' *en* f' *y que estamos tratando de dibujar en* f*, tal que* B' *y* $\hat{B}$ *son adyacentes en el grafo conflicto de la frontera de la cara* f*.*

Sean A' *y* $\hat{A}$ *los conjuntos de vértices en los cuales* B' *y* $\hat{B}$ *se anclan en la frontera de* f*.*

Dado que B' *y* $\hat{B}$ *están en conflicto,* A' *y* $\hat{A}$ *tienen tres vértices en común o hay cuatro vértices alternantes en la frontera de* f *(2 en* A' *y dos en* $\hat{A}$*). Como* $A \subseteq C$ *pero* $\hat{A} \not\subseteq C$*, en realidad siempre se tiene la segunda posibilidad.*

Sean x, u, y, v*, con* $x, y \in A' \subset C$ *y* $u, v \in \hat{A}$*, podemos suponer que* $u \notin C$

Como $u \notin C$ *y el vértice* y *está entre los vértices* u *y* v *e* f*, ninguna otra cara contiene al mismo tiempo a* u *y* v*. Luego* $\hat{B}$ *no tiene a sus vértices anclas en dos al menos dos caras , es decir se contradice la hipótesis* $|F(\hat{B})| > 1$*.*