Retículos. Parte 3.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

27 de septiembre de 2018

Álgebras de Boole

Definición

Un **álgebra de Boole** es un retículo acotado, distributivo con complementos:

$$(B, \vee, \wedge, 0, 1, (\ )^c).$$

(Recordar que la distributividad implica que la función $(\ )^c$ está bien definida.)

Las álgebras de Boole son importantes porque:

- capturan la estructura fundamental de la lógica: $\vee = \text{OR}$, $\wedge = \text{AND}$, $(\ )^c = \text{NOT}$,
- modelan la teoría de conjuntos (en la cual se basa toda la matemática).

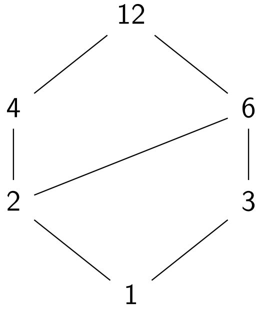
Ejemplo

$(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \varnothing, X, (\ )^c)$ es un álgebra de Boole.

Ejemplo

$(D_n, \mathrm{mcm}, \mathrm{mcd}, 1, n)$ admite una estructura de álgebra de Boole $\iff n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s$ es producto de primos distintos.

Subejemplo D_{12}



No es álgebra de Boole pues 2 no tiene complementos.

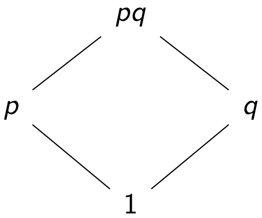
Subejemplo

Si n es tal que $p^2 \mid n$ (con p primo) entonces p no tienen complementos en D_n. Por lo tanto D_n no es álgebra de Boole si n no es producto de primos distintos (faltaría probar la otra implicación). En efecto,

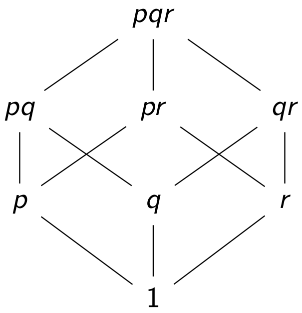
$$\operatorname{mcm}(p, x) = n \implies p \mid x \implies p \mid \operatorname{mcd}(p, x) \neq 1.$$

Ejemplo $D_p \simeq \mathcal{P}(\{p\})$

Ejemplo $D_{pq} \simeq \mathcal{P}(\{p, q\})$



Ejemplo $D_{pqr} \simeq \mathcal{P}(\{p, q, r\})$



Caso general

- D_n con $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_s$ (primos distintos).
- $x \in D_n \iff x = p_{i_1} \cdots p_{i_k}$ para algún subconjunto $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, s\}$.
- $\dfrac{n}{x} = \displaystyle\prod_{j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}} p_j$ y por lo tanto
- $\operatorname{mcm}\left(x, \dfrac{n}{x}\right) = \operatorname{mcd}\left(x, \dfrac{n}{x}\right) = 1.$
- Es decir, $\dfrac{n}{x}$ es el complemento de x.

Ejercicio

La función $f : D_n \to \mathcal{P}(\{p_1, \ldots, p_s\})$ definida como

$$f(x) = \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}\}$$

es un isomorfismo de retículos.

Morfismos de álgebras de Boole

- Los **(iso)morfismos de álgebras de Boole** pueden definirse abstractamente como las funciones (biyectivas)

$$f : (B, \vee, \wedge, 0, 1, (\ )^c) \to (B', \vee, \wedge, 0, 1, (\ )^c)$$

  tales que $\forall x, y \in B$,
  - $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$,
  - $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$,
  - $f(0) = 0$,
  - $f(1) = 1$,
  - $f(x^c) = f(x)^c$.
- Ya vimos que las dos primeras condiciones implican las otras tres. Es decir, los isomorfismos de álgebras de Boole no son otra cosa que los isomorfismos de retículos.

Pregunta

Si $(B, \leq)$ es un álgebra de Boole finita, ¿es cierto que $(B, \leq) \simeq (\mathcal{P}(X), \subset)$ para algún conjunto X? ¿Quién debería ser el conjunto X?

Corolario

Si $(B, \vee, \wedge, 0, 1, (\ )^c)$ *es un álgebra de Boole finita, entonces* $|B| = 2^n$ *para algún* $n \in \mathbb{N}_0$.

Contraejemplo

El resultado anterior deja de valer si B es infinita. Por ejemplo, si $(B, \vee, \wedge, 0, 1, (\ )^c)$ es un álgebra de Boole numerable, entonces $B \not\simeq \mathcal{P}(X)$ para todo conjunto X. En efecto, B no puede estar en biyección con $\mathcal{P}(X)$ pues

- si X es finito, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito de cardinal $2^{|X|}$ y
- si X es numerable (no puede ser más grande), entonces $|\mathcal{P}(X)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| = |B|$ (¿por qué?).

Ejemplo concreto (ejercicio)

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})_{\mathsf{fin}} := \{A \subset \mathbb{N} : |A| < \infty\}$ (subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$),
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})_{\mathsf{cofin}} := \{A \subset \mathbb{N} : |A^c| < \infty\}$, (subconjuntos de $\mathbb{N}$ con complemento finito),
- $B := \mathcal{P}(\mathbb{N})_{\mathsf{fin}} \cup \mathcal{P}(\mathbb{N})_{\mathsf{cofin}}$,
- B es numerable,
- $(B, \cup, \cap, \varnothing, \mathbb{N}, (\ )^c)$ es un álgebra de Boole (más aún, es una *subálgebra* de Boole de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

Leyes de De Morgan

Proposición

Si $(B, \vee, \wedge, 0, 1, (\ )^c)$ *es un álgebra de Boole entonces valen* $\forall x, y$

- $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$,
- $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$.

En palabras: la función complemento es un antiisomorfismo de álgebras de Boole.

Demostración.

Para el primer ítem debemos chequear que

- $(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) = 0$
- $(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) = 1$

y para el segundo debemos chequear que

- $(x \wedge y) \wedge (x^c \vee y^c) = 0$
- $(x \wedge y) \vee (x^c \vee y^c) = 1$. $\square$

Demostración (cont.)

$$
\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge (x^c \wedge y^c) &= [(x \vee y) \wedge x^c] \wedge y^c \\
&= [(x \wedge x^c) \vee (y \wedge x^c)] \wedge y^c \\
&= [0 \vee (y \wedge x^c)] \wedge y^c \\
&= (y \wedge x^c) \wedge y^c = (y \wedge y^c) \wedge x^c \\
&= 0 \wedge x^c = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x \vee y) \vee (x^c \wedge y^c) &= (x \vee y \vee x^c) \wedge (x \vee y \vee y^c) \\
&= (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \vee 1 = 1
\end{aligned}
$$

Ejercicio: completar las otras dos igualdades (se puede hacer bien fácil por dualidad, teniendo en cuenta una sutileza). $\square$

Idea de la demostración del teorema M_3-N_5

Retículos modulares

Un retículo $(L, \vee, \wedge)$ se dice **modular** si

$$\forall x, y, z \in L, [x \geq z \implies x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z].$$

Observar que distributivo $\implies$ modular

Ejemplo

- $L = \{\text{subespacios vectoriales de } \mathbb{R}^n\}$,
- $(L, \subset)$ es retículo, pero no es subrretículo de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (pues la unión de subespacios no necesariamente es un subespacio),
- $V \wedge W = V \cap W$,
- $V \vee W = V + W := \langle V \cup W \rangle$.
- L es modular. En efecto, debemos probar que

$$U \supset W \implies U \cap (V + W) = (U \cap V) + W.$$

Ejemplo (cont.)

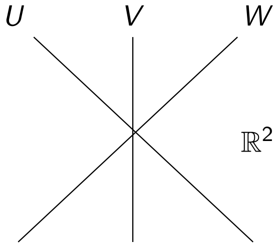
- $x \in U \cap (V + W) \implies x = v + w \in U$ con $v \in V$, $w \in W$.
- Luego $v = x - w \in U$ pues $W \subset U \implies v \in U \cap V$
- y por ende $x \in (U \cap V) + W$.

Recíprocamente,

- $x = u + w$ con $u \in U \cap V \subset V$, $w \in W \implies x \in U$.
- Luego $x \in U \cap (V + W)$.

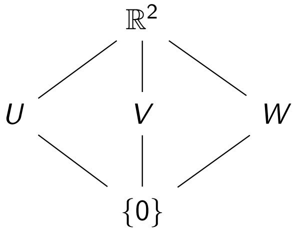
Observación

- L no es distributivo.
- $U \cap (V + W) = U \cap \mathbb{R}^2 = U$,
- $(U \cap V) + (U \cap W) = \{0\}$.



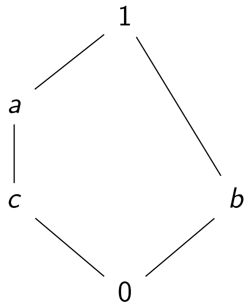
Ejemplo

M_3 es modular (no es distributivo): ídem ejemplo anterior.



Ejemplo

- N_5 no es distributivo ni modular.
- $a \geq c$,
- $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$,
- $(a \wedge b) \vee c = 0 \vee c = c$.

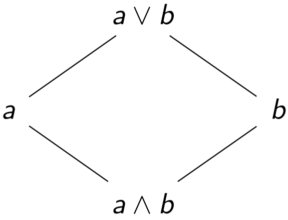


Retículos libres

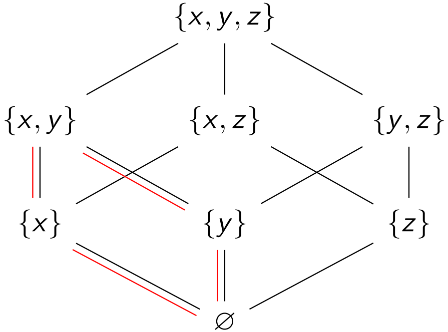
- Partimos de una cantidad prefijada de elementos (podrían ser infinitos):
$$X = \{x, y, z, \ldots\}.$$
- Definimos las operaciones $x \wedge y$, $x \wedge z$, $y \vee z$, $x \wedge (y \vee z)$, etc. sin restricciones (de manera libre), agregando tantos elementos como sean necesarios, salvo por las restricciones que impone la estructura, por ejemplo
- $x \wedge x = x \vee x = x \vee (x \wedge z) = x$, etc.
- Formamos el **retículo libre** $F(X)$ (siempre existe).
- $F(X)$ tiene la siguiente **propiedad universal:** para todo retículo L tal que $X \subset L$ "monótonamente incluido" existe un morfismo de retículos $\varphi : F(X) \to L$ tal que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in X$.

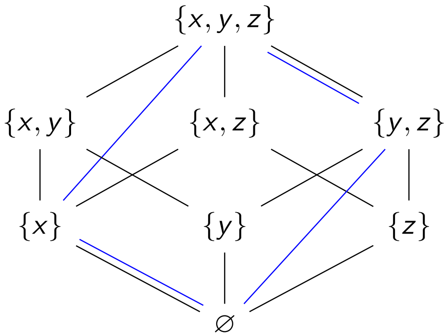
Ejemplo

- $F(\{a,b\}) \simeq \mathcal{P}(\{a,b\})$.



- $\{a,b\}$ se puede incluir monótonamente en $\mathcal{P}(\{x,y,z\})$ de varias formas distintas por ejemplo en $\{\{x\},\{y\}\}$ o en $\{\{x\},\{y,z\}\}$.
- Esto nos da distintas copias de $F(\{a,b\})$ dentro de $\mathcal{P}(\{x,y,z\})$ (como subrretículos).


$\{x, y, z\}$
$\{x, y\}$
$\{x, z\}$
$\{y, z\}$
$\{x\}$
$\{y\}$
$\{z\}$
$\varnothing$


$\{x, y, z\}$
$\{x, y\}$
$\{x, z\}$
$\{y, z\}$
$\{x\}$
$\{y\}$
$\{z\}$
$\varnothing$

Observación

- $\mathcal{P}(\{x, y, z\})$ no es un retículo libre.
- Más adelante veremos una justificación precisa mostrando explícitamente quién es el retículo libre en tres elementos.
- Idea intuitiva: $\mathcal{P}(\{x, y, z\})$ es un álgebra de Boole y propiedades como la distributividad imponen fuertes restricciones a las operaciones $\vee, \wedge$, que no están presentes en un retículo libre.
- Notar sin embrago (ejemplo anterior) que $\mathcal{P}(\{x, y\})$ sí es un retículo libre (al comenzar con tan pocos elementos, propiedades como la distributividad y la existencia de complementos deben valer forzosamente).

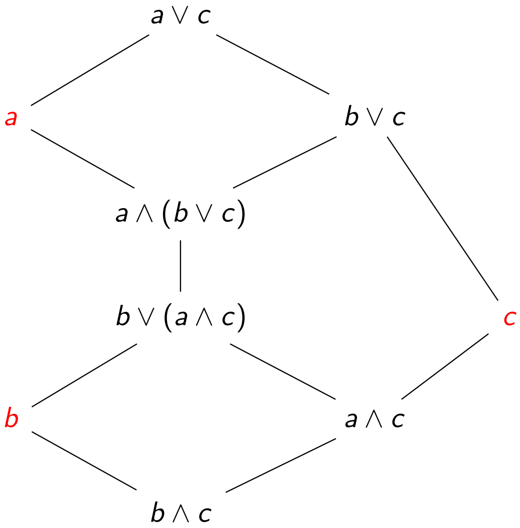
Retículos libres con restricciones

Es posible formar retículos libres en un conjunto X imponiendo ciertas relaciones entre elementos de X o ciertas propiedades sobre el retículo a construir (por ejemplo que sea distributivo, modular, etc.).

Ejemplo/Ejercicio

El retículo libre en $\{a, b, c\}$ sujeto a la restricción $b < a$ es:

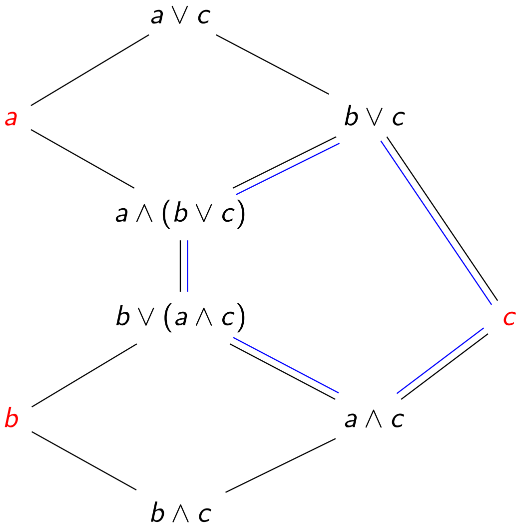
$F_{b<a}(3)$



Ejemplo/Ejercicio

El retículo libre en $\{a, b, c\}$ sujeto a la restricción $b < a$ es:

$F_{b<a}(3)$



Teorema

El retículo distributivo libre generado por $\{x, y, z\}$ *tiene 18 elementos.*

Teorema (Dedekind ∼1900)

El retículo libre generado por $\{x, y, z\}$ *tiene* 28 *elementos.*

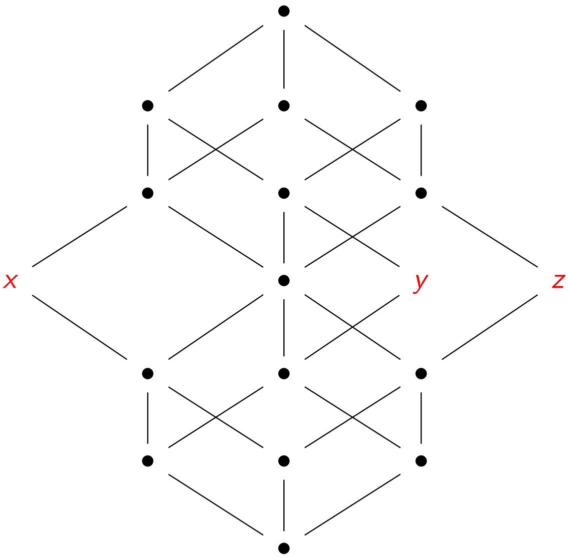
Corolario

$\mathcal{P}(\{x, y, z\})$ *no es un retículo libre.*

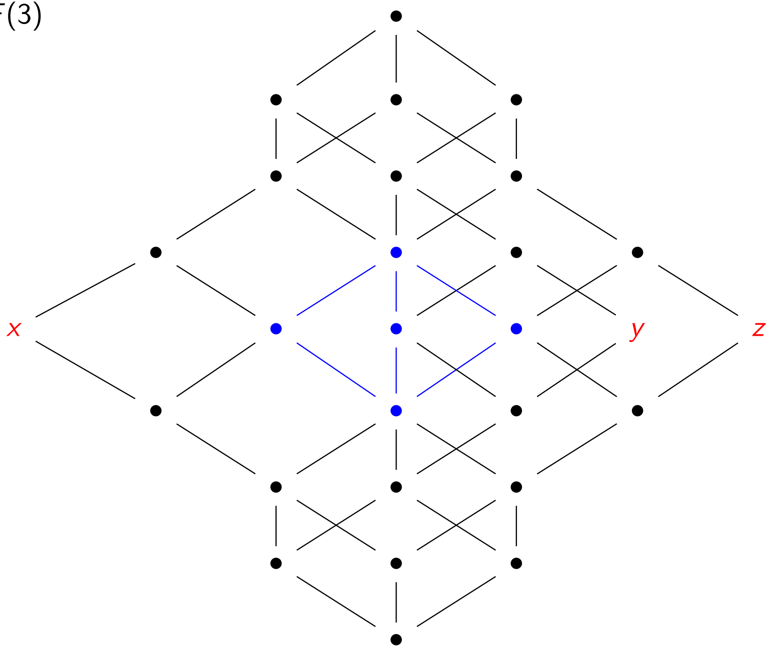
Teorema

El retículo libre en $\{x, y, z, t\}$ *tiene infinitos elementos.*

$F_{\mathrm{dist}}(3)$



$F(3)$



Cocientes

- $\varphi : L \to K$ morfismo de retículos.
- $\ker \varphi$ relación de equivalencia en L:

$$a \sim b \iff \varphi(a) = \varphi(b).$$

- $L/\ker \varphi$ es un retículo isomorfo a $\operatorname{im} \varphi$ (teorema de isomorfismo).

Teorema

Sea L un retículo. Entonces

1. *L es modular $\iff$ no tiene subrretículos isomorfos a N_5.*
2. *Si L es modular entonces, L es distributivo $\iff$ no tiene subrretículos isomorfos a M_3.*

Demostración

Lema (Ejercicio)

Un subrretículo de un retículo modular (resp. distributivo) es modular (resp. distributivo).

Prueba de 1.

- Sean $a, b, c, \in L$ tales que $a > b$ y $a \wedge (b \vee c) \neq (a \vee b) \wedge c$.
- $\exists \varphi : F_{b<a}(3) \to L$ morfismo de retículos (inclusión).
- $N_5 \subset F_{b<a}(3)$ induce un morfismo de retículos $\varphi| : N_5 \to L$.
- $\operatorname{im} \varphi| = N_5 / \ker \varphi| = N_5$.
- Ejercicio: N_5 no tiene cocientes, es decir $\ker \varphi| = \Delta$ es la relación de igualdad.

Prueba de 2.

- Si L es modular y no distributivo entonces existen $x, y, z \in L$ tales que $x \wedge (y \vee z) \neq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
- $\exists \varphi : F(3) \to L$ morfismo de retículos.
- $M_3 \subset F$ induce un morfismo $\varphi| : M_3 \to L$.
- $\operatorname{im} \varphi| = M_3 / \ker \varphi = M_3$.
- Ejercicio: M_3 no tiene cocientes. $\square$